



Diagnosticando conhecimentos matemáticos requeridos nas provas do ENEM

Maria das Dores de **Morais**

Brasil

dora.pe@gmail.com

Leonardo de **Morais**

UFPE

Brasil

leonardob.morais@gmail.com

Resumo

Este trabalho teve como objetivo identificar quais conhecimentos são requeridos dos alunos para resolver questões propostas pelo Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) nos anos de 2009 e 2010 em relação às grandezas e medidas, particularmente aqueles relacionados a comprimento, área e volume. Para tanto foram analisadas 13 questões do referido exame. Os resultados mostraram dentre outros aspectos: a presença dos sólidos geométricos como prismas, cilindro, pirâmide, cone e esfera; a mobilização para o uso das fórmulas de área do triângulo e do retângulo e as de volume de sólidos como cubo, cilindro, cone e esfera; a necessidade de tornar a situação significativa para o aluno, mesmo quando lida com objetos matemáticos (figuras planas e espaciais); o reconhecimento e uso adequado das fórmulas de volume de sólidos geométrico; manipulações algébricas; a compreensão de volume enquanto grandeza; articulação com outros conteúdos e o uso apropriado de unidades de medida.

Palavras chave: ENEM, fórmulas, grandezas e medidas, situações-problema, sólidos geométricos.

Introdução

O ensino das grandezas e medidas percorre parte da educação básica, conforme se verifica nos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997; 1998; 2002). Esse bloco constitui um papel de destaque não apenas no contexto matemático como também nas práticas sociais desde as civilizações antigas. Os egípcios, por exemplo, já utilizavam o cálculo de volume de depósitos quando da necessidade de estocagem de alimentos e para fins de comércio (Lima, 1997).

Na sociedade atual, a utilização desse conhecimento não é menos importante, pois seu uso se encontra presente em diversas atividades como agricultura (para transporte, estocagem de alimentos e demarcação de terras) e construção civil (aquisição de areia, por exemplo). Dentro do contexto matemático, problemas relativos à medida de grandezas, como área e volume, estão na origem das ideias de número racional e irracional e na noção intuitiva de integral. Portanto, esses fatos reforçam a importância do estudo desse conteúdo na educação básica.

No tocante ao ensino médio, podemos dizer que os conteúdos matemáticos estão divididos em três eixos que devem ser seguidos ao longo dessa modalidade de ensino. São eles: 1) Álgebra: números e funções; 2) Geometria e medidas; 3) Análise de dados. Os conteúdos com os quais estamos trabalhando se encontram no eixo dois, mais especificamente as grandezas comprimento, área e volume (BRASIL, pág. 120, 2002b).

No que diz respeito à área, Douady e Perrin-Glorian (1989) propõem um modelo didático para a aquisição desse conceito, no qual é necessário distinguir três quadros: o geométrico (figuras planas), o das grandezas (área) e o numérico (medida). Segundo Barros (2002) e Oliveira (2002), esse modelo pode ser utilizado para a abordagem do conceito de volume (ou de um modo geral, para o tratamento das grandezas geométricas).

Em relação ao ensino de medidas, quantificações, grandezas e escalas, os documentos oficiais (BRASIL, 2002a, 2002b) que norteiam o ensino de matemática na educação básica explicitam as competências e habilidades a serem desenvolvidas pelos estudantes, dentre elas podemos elencar: Selecionar e utilizar instrumentos de medição e de cálculo, representar dados e utilizar escalas, fazer estimativas, elaborar hipóteses e interpretar resultados; Identificar e fazer uso de diferentes formas e instrumentos apropriados para efetuar medidas ou cálculos; Usar adequadamente réguas, esquadros, transferidores, compassos, calculadoras e outros instrumentos ou aparelhos.

Os PCN+ que é uma versão mais completa dos Parâmetros Curriculares Nacionais (2002b) também indicam os conteúdos e habilidades que devem ser atingidos em cada eixo. Em relação à geometria e medidas, com os conteúdos áreas e volumes as seguintes habilidades devem ser desenvolvidas: Estimar valor exato e aproximado; Identificar e fazer uso de diferentes formas para realizar medidas e cálculos; Utilizar propriedades geométricas para medir, quantificar e fazer estimativas de comprimentos, áreas e volumes em situações reais relativas, por exemplo, de recipientes, refrigeradores, veículos de carga, móveis, cômodos, espaços públicos; Efetuar medições, reconhecendo, em cada situação, a necessária precisão de dados ou de resultados e estimando margens de erro. (BRASIL, pag. 125, 2002b).

Complementando o que se propõe nos Parâmetros Curriculares, a Base Curricular Comum para as Redes Públicas de Ensino de Pernambuco (BCC-PE, 2008), no que refere a Matemática, explicita que as atividades propostas deverão proporcionar a consolidação dos conceitos aprendidos nas etapas anteriores. De acordo com este documento, o aluno já deve reunir as condições necessárias para a compreensão de demonstrações mais elaboradas, que conduzam a fórmulas, dentre outras, as de volume de figuras geométricas.

De um modo geral, foram analisadas as duas últimas provas do ENEM, a fim de verificar quais conhecimentos são requeridos dos alunos em relação às grandezas comprimento, área e volume, para que eles possam resolver as questões propostas.

Diagnosticando conhecimentos matemáticos requeridos nas provas do ENEM

A justificativa para análise desse exame ocorreu por diversos fatores: Primeiro por ser o ENEM uma avaliação de rede que atinge a maioria dos estudantes brasileiros; segundo, existe uma matriz que explicita as habilidades e competências a serem desenvolvidas pelos estudantes; terceiro porque o ENEM pode influenciar no ensino e nortear as escolhas dos conteúdos pelas escolas, fato este corroborado pelas informações obtidas pelo Instituto Nacional de Ensino e Pesquisas (INEP) quando salienta que uma das propostas do exame é induzir a reestruturação dos currículos do ensino médio e o quarto, é que a prova do ENEM é composta na maioria das vezes, por situações problemas que exigem dos alunos uma interpretação e conversão do problema para a linguagem matemática.

Quando criado em 1998, o ENEM tinha como objetivo inicial avaliar o desempenho dos estudantes ao fim da educação básica permitindo o aluno se auto-avaliar. Em 2004, criou-se o Programa Universidade para todos (ProUni), o qual tinha como finalidade a concessão de bolsas de estudos integrais e/ou parciais a estudantes de cursos de graduação e de cursos sequenciais de formação específica, em instituições privadas de educação superior, tendo como forma de acesso o desempenho no ENEM. Em 2009, houve uma mudança bastante significativa nesse exame, pois ele passou ser utilizado como forma única de acesso a algumas universidades públicas e/ou como um das etapas em exames de admissão a universidades públicas. Diante disso, observa-se a importância que o ENEM vem adquirindo no cenário educacional. Portanto, fazer um estudo mais minucioso sobre que se espera dos alunos em relação a comprimento, área e volume pode contribuir para o ensino dessas grandezas.

Método

De acordo com os princípios e objetivos desta proposta de pesquisa, foi considerado importante desenvolver um estudo para identificar quais conhecimentos são requeridos dos alunos nas questões propostas pelo ENEM em relação ao eixo geometria e medidas, particularmente aqueles relacionados às grandezas comprimento, área e volume. Para analisar tais conhecimentos à luz das reflexões acima, recorreremos a treze itens da avaliação em Matemática do referido exame nos anos de 2009 e 2010, por se tratarem de instrumentos socialmente reconhecidos, especialmente no campo da Educação Matemática. Com o intuito de fortalecer as bases teóricas da pesquisa foi feito um levantamento de referencial teórico que tratem de questões relativas grandezas e medidas a partir de documentos oficiais dentre os quais podemos destacar os PCN(1997) e a BCC-PE (2008).

Quadro 1

Resultados das análises dos problemas.

Problema	Grandeza	Enunciado	Análise
----------	----------	-----------	---------

Diagnosticando conhecimentos matemáticos requeridos nas provas do ENEM

P1	Volume	A cisterna é um recipiente utilizado para armazenar água da chuva. Os principais critérios a serem observados para captação e armazenagem de água da chuva são: a demanda diária de água na propriedade; o índice médio de precipitação (chuva), por região, em cada período do ano; o tempo necessário para armazenagem; e a área de telhado necessária ou disponível para captação. Para fazer o cálculo do volume de uma cisterna, deve-se acrescentar um adicional relativo ao coeficiente de evaporação. Na dificuldade em se estabelecer um coeficiente confiável, a Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária (EMBRAPA) sugere que sejam adicionados 10% ao volume calculado de água. Desse modo, o volume, em m^3, de uma cisterna é calculado por $V_c = V_d \times N_{dia}$, em que V_d = volume de demanda da água diária (m^3), N_{dia} = número de dias de armazenagem, e este resultado deve ser acrescido de 10%. Para melhorar a qualidade da água, recomenda-se que a captação seja feita somente nos telhados das edificações. Considerando que a precipitação de chuva de 1 mm sobre uma área de 1 m^2 produz 1 litro de água, pode-se calcular a área de um telhado a fim de atender a necessidade de armazenagem da seguinte maneira: área do telhado (em m^2) = volume da cisterna (em litros)/precipitação. Disponível em: www.cnpsa.embrapa.br. Acesso em: 8 jun. 2009 (adaptado). Para atender a uma demanda diária de 2.000 litros de água, com período de armazenagem de 15 dias e precipitação média de 110 mm, o telhado, retangular, deverá ter as dimensões mínimas de ☐ A 6 metros por 5 metros, pois assim teria uma área de 30 m^2. ☐ B 15 metros por 20 metros, pois assim teria uma área de 300 m^2. ☐ C 50 metros por 60 metros, pois assim teria uma área de 3.000 m^2. ☐ D 91 metros por 30 metros, pois assim teria uma área de 2.730 m^2. ☐ E 110 metros por 30 metros, pois assim teria uma área de 3.300 m^2.	Neste primeiro problema, embora seja requerido cálculo de volume, não é o objetivo central do problema. Há também situações em que capacidade aparece apenas como contexto, já que o que se exige para se chegar à resposta são conhecimentos sobre porcentagem.
P2	Volume	O aquífero Guarani localiza-se no subterrâneo dos territórios da Argentina, Brasil, Paraguai e Uruguai, com extensão total de 1.200.000 quilômetros quadrados, dos quais 840.000 quilômetros quadrados estão no Brasil. O aquífero armazena cerca de 30 mil quilômetros cúbicos de água e é considerado um dos maiores do mundo. Na maioria das vezes em que são feitas referências à água, são usadas as unidades metro cúbico e litro, e não as unidades já descritas. A Companhia de Saneamento Básico do Estado de São Paulo (SABESP) divulgou, por exemplo, um novo reservatório cuja capacidade de armazenagem é de 20 milhões de litros. Disponível em: http://noticias.terra.com.br. Acesso em: 10 jul. 2009 (adaptado). Comparando as capacidades do aquífero Guarani e desse novo reservatório da SABESP, a capacidade do aquífero Guarani é ☐ A $1,5 \times 10^2$ vezes a capacidade do reservatório novo. ☐ B $1,5 \times 10^3$ vezes a capacidade do reservatório novo. ☐ C $1,5 \times 10^6$ vezes a capacidade do reservatório novo. ☐ D $1,5 \times 10^8$ vezes a capacidade do reservatório novo. ☐ E $1,5 \times 10^9$ vezes a capacidade do reservatório novo.	Nesse segundo, trabalha-se transformação de unidade de medida, a saber, a relação entre km^3 e L. Esse problema ressalta o uso incomum de se medir capacidade usando como unidade o km^3, embora na situação tratada se tenha a capacidade do “recipiente” medido nessa unidade. Por ser suficientemente grande, considera-

Diagnosticando conhecimentos matemáticos requeridos nas provas do ENEM

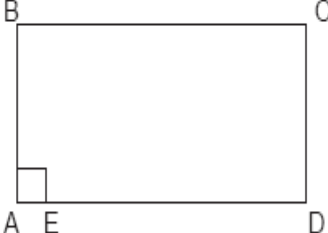
			se pertinente o uso do km^3 para medir a capacidade, pois seria exaustivo medi-la usando m^3 ou o litro como unidade. Atividades como essa são amplamente trabalhadas em livros didáticos de Matemática para o ensino fundamental, embora muitas vezes não permitem ao aluno dar sentido aos procedimentos, pois se valoriza regras de memorização que podem ser facilmente esquecidas.
P3	Volume	Uma empresa que fabrica esferas de aço, de 6 cm de raio, utiliza caixas de madeira, na forma de um cubo, para transportá-las. Sabendo que a capacidade da caixa é de 13.824 cm^3, então o número máximo de esferas que podem ser transportadas em uma caixa é igual a ☐ A 4. ☐ D 24. ☐ B 8. ☐ E 32. ☐ C 16.	Nesse terceiro o aluno deveria estar atento ao fato de que o número de esferas não pode ser dado pelo quociente entre o volume do cubo e o volume de uma esfera, pois há espaços vazios entre as esferas dentro desse objeto. Portanto, era preciso saber a medida da aresta do cubo e para isso, recorre-se a fórmula. Outra observação importante é mudança no valor

Diagnosticando conhecimentos matemáticos requeridos nas provas do ENEM

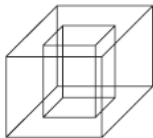
			da medida do volume do cubo quando se usa a esfera como unidade. Ao ser medido usando o cm^3, tem-se 13.824 cm^3 de volume, enquanto ao usar a esfera, obtém-se 8 esferas. No entanto, o volume do cubo é o mesmo. Esse fato ressalta a proposta do modelo didático para a abordagem de volume, ou seja, a dissociação/articulação entre a medida, a unidade e a grandeza.
P4	Volume	Uma fábrica produz velas de parafina em forma de pirâmide quadrangular regular com 19 cm de altura e 6 cm de aresta da base. Essas velas são formadas por 4 blocos de mesma altura — 3 troncos de pirâmide de bases paralelas e 1 pirâmide na parte superior —, espaçados de 1 cm entre eles, sendo que a base superior de cada bloco é igual à base inferior do bloco sobreposto, com uma haste de ferro passando pelo centro de cada bloco, unindo-os, conforme a figura.  Se o dono da fábrica resolver diversificar o modelo, retirando a pirâmide da parte superior, que tem 1,5 cm de aresta na base, mas mantendo o mesmo molde, quanto ele passará a gastar com parafina para fabricar uma vela? ☐ A 156 cm^3. ☐ C 216 cm^3. ☐ B 189 cm^3. ☐ D 540 cm^3. ☐ E 192 cm^3.	Nesse quarto, é suficiente identificar as variáveis necessárias para usar a fórmula do volume de uma pirâmide. O que se exige é uma interpretação correta da situação e consequentemente a aplicação da fórmula.

Diagnosticando conhecimentos matemáticos requeridos nas provas do ENEM

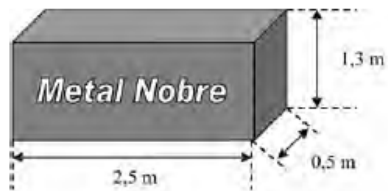
P5	Comprimento	O mapa ao lado representa um bairro de determinada cidade, no qual as flechas indicam o sentido das mãos do tráfego. Sabe-se que esse bairro foi planejado e que cada quadra representada na figura é um terreno quadrado, de lado igual a 200 metros. Desconsiderando-se a largura das ruas, qual seria o tempo, em minutos, que um ônibus, em velocidade constante e igual a 40 km/h, partindo do ponto X, demoraria para chegar até o ponto Y? ☐ A 25 min. ☐ D 1,5 min. ☐ B 15 min. ☐ E 0,15 min. ☐ C 2,5 min.	Nesse quinto, são relacionados conhecimentos da Matemática e da Física, uma vez que envolve o conceito de velocidade constante. Como o problema pede para desconsiderar a largura das ruas, a distância percorrida é a soma dos comprimentos dos lados dos quadrados, conhecimento suficiente para resolver o problema.
----	-------------	--	--

P6	Comprimento; Área	O governo cedeu terrenos para que famílias construíssem suas residências com a condição de que no mínimo 94% da área do terreno fosse mantida como área de preservação ambiental. Ao receber o terreno retangular ABCD, em que $AB = \frac{BC}{2}$, Antônio demarcou uma área quadrada no vértice A, para a construção de sua residência, de acordo com o desenho, no qual $AE = \frac{AB}{5}$ é lado do quadrado.  Nesse caso, a área definida por Antônio atingirá exatamente o limite determinado pela condição se ele - A duplicasse a medida do lado do quadrado. - B triplicasse a medida do lado do quadrado. - C triplicasse a área do quadrado. - D ampliasse a medida do lado do quadrado em 4%. - E ampliasse a área do quadrado em 4%.	Nesse sexto, é preciso mobilizar um procedimento frequentemente introduzido no ensino de área, a saber, a subdivisão da figura em partes menores, pois como o comprimento do lado maior é o dobro do lado menor ($2AB = BC$), tem-se dois quadrados cuja medida do lado é igual do lado menor do retângulo original. Além disso, a medida do lado do quadrado AE é um quinto da medida do lado do quadrado dividido. Portanto, a área será um vinte cinco avos. Como o retângulo foi dividido em dois quadrados iguais, tem-se 50 quadrados pequenos, cuja área é 2% da figura original. O aluno precisava mobilizar conhecimento sobre a relação entre a medida do lado e a área de um quadrado. Este problema evidencia o conceito de comprimento
----	-------------------	---	---

Diagnosticando conhecimentos matemáticos requeridos nas provas do ENEM

			enquanto grandeza linear e de área enquanto grandeza bidimensional.
P7	Volume		Nesse sétimo, volume não é tratado como objeto, ou seja, não são mobilizados conhecimentos desse conteúdo para resolver o problema. No entanto, o volume da esfera é a quantidade de água deslocada.
P8	Volume	Um porta-lápis de madeira foi construído no formato cúbico, seguindo o modelo ilustrado a seguir. O cubo de dentro é vazio. A aresta do cubo maior mede 12 cm e a do cubo menor, que é interno, mede 8 cm.  O volume de madeira utilizado na confecção desse objeto foi de ☐ A 12 cm³. ☐ B 64 cm³. ☐ C 96 cm³. ☒ D 1 216 cm³. ☐ E 1 728 cm³. Uma fábrica produz barras de chocolates no formato de paralelepípedos e de cubos, com o mesmo volume. As arestas da barra de chocolate no formato de paralelepípedo medem 3 cm de largura, 18 cm de comprimento e 4 cm de espessura. Analisando as características das figuras geométricas descritas, a medida das arestas dos chocolates que têm o formato de cubo é igual a ☐ A 5 cm. ☒ B 6 cm. ☐ C 12 cm. ☐ D 24 cm. ☐ E 25 cm.	Nesses dois que formam o oitavo, temos que o primeiro exige do aluno conhecimentos sobre a aplicação da fórmula e reconhecimento das variáveis envolvidas, ou seja, a medida da aresta,. E o segundo ecessita que os alunos façam uma relação entre um paralelepípedo e um cubo. Nesse caso, exigem-se habilidades do campo algébrico, a saber, a manipulação das fórmulas envolvidas.

P9; P10	Volume	Em um casamento, os donos da festa serviam champanhe aos seus convidados em taças com formato de um hemisfério (Figura 1), porém um acidente na cozinha culminou na quebra de grande parte desses recipientes. Para substituir as taças quebradas, utilizou-se um outro tipo com formato de cone (Figura 2). No entanto, os noivos solicitaram que o volume de champanhe nos dois tipos de taças fosse igual. Considere: $V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3} \pi R^3 \quad \text{e} \quad V_{\text{cone}} = \frac{1}{3} \pi R^2 h$ Sabendo que a taça com o formato de hemisfério é servida completamente cheia, a altura do volume de champanhe que deve ser colocado na outra taça, em centímetros, é de ☐ A 1,33. ☒ B 6,00. ☐ C 12,00. ☐ D 56,52. ☐ E 113,04. Dona Maria, diarista na casa da família Teixeira, precisa fazer café para servir as vinte pessoas que se encontram numa reunião na sala. Para fazer o café, Dona Maria dispõe de uma leiteira cilíndrica e copinhos plásticos, também cilíndricos. Com o objetivo de não desperdiçar café, a diarista deseja colocar a quantidade mínima de água na leiteira para encher os vinte copinhos pela metade. Para que isso ocorra, Dona Maria deverá ☒ A encher a leiteira até a metade, pois ela tem um volume 20 vezes maior que o volume do copo. ☐ B encher a leiteira toda de água, pois ela tem um volume 20 vezes maior que o volume do copo. ☐ C encher a leiteira toda de água, pois ela tem um volume 10 vezes maior que o volume do copo. ☐ D encher duas leiteiras de água, pois ela tem um volume 10 vezes maior que o volume do copo. ☐ E encher cinco leiteiras de água, pois ela tem um volume 10 vezes maior que o volume do copo.	Nesse nono é suficiente relacionar as fórmulas do volume da esfera e do cone, as quais são informadas na situação. E para o décimo, que traz dois recipientes cilíndricos com medidas diferentes [e necessária a mobilização e a aplicação da fórmula de volume do cilindro para resolver a questão. Assim como a comparação do volume desses dois objetos.
---------	--------	--	--

P11	Volume	A siderúrgica "Metal Nobre" produz diversos objetos maciços utilizando o ferro. Um tipo especial de peça feita nessa companhia tem o formato de um paralelepípedo retangular, de acordo com as dimensões indicadas na figura que segue.  O produto das três dimensões indicadas na peça resultaria na medida da grandeza ☐ A massa. ☒ B volume. ☐ C superfície. ☐ D capacidade. ☐ E comprimento.	Nesse décimo primeiro, é explorada a compreensão de volume enquanto uma grandeza tridimensional, pois é feita referência ao produto das medidas nas três dimensões. Assim como há uma explicitação que o produto final representa a medida da grandeza.
-----	--------	--	--

Principais resultados

Tradicionalmente o ENEM está pautado em situações problemas onde o aluno precisa compreender o contexto, reconhecer e aplicar os conhecimentos matemáticos adquiridos durante o ensino básico. Essa característica desse exame ficou mais evidente durante a análise dos problemas, pois todos estavam inseridos dentro de um contexto mais amplo, em geral, referenciando situações cotidianas.

Foi bastante recorrente, nas situações específicas de volume, a presença dos sólidos geométricos como prismas, cilindro, pirâmide, cone e esfera. Porém esses objetos apareciam, quase sempre representando um objeto do mundo real. Apareceram recipientes cilíndricos, velas em forma de pirâmide, copos representado por cones, etc. Com isso, observa-se uma preocupação em tornar a situação significativa para o aluno, mesmo quando lida com objetos comuns à matemática.

Em muitas situações, foi observado que os alunos precisavam mobilizar as fórmulas de área e volume de sólidos como cubo, cilindro, cone e esfera. Algumas exploravam manipulações algébricas, outras apenas a aplicação, sendo exigido o reconhecimento das variáveis envolvidas. Sabemos que a utilização da fórmula é um requisito importante para a resolução das questões, entretanto, mais do que ter o conhecimento da fórmula é necessário que o aluno compreenda o problema para que ele possa saber usá-la. No problema P10, por exemplo, a fórmula aparecia descrita, requerendo apenas seu uso adequado. Em outros problemas, como por exemplo, o P12, há referência de volume enquanto grandeza, dissociando-o da medida e de sólido.

Alguns problemas que abordam capacidade trazem como contexto o líquido. Isso pode

induzir a compreensão errônea de que capacidade está relacionada a líquido comumente encontrado em materiais didáticos e em situações cotidianas. Observamos situações que exigiram transformação de unidades, neste caso envolvendo L, m^3 e km^3 , uma vez que todas lidavam com capacidade. E em outros problemas volume aparecia como contexto ou como um recurso para se chegar à resposta final e conectado a outras grandezas como comprimento, área e massa e a conteúdos de outros campos da matemática como a álgebra, por exemplo.

Em síntese, constatamos alguns conhecimentos exigidos dos alunos como, por exemplo: o reconhecimento e uso adequado das fórmulas de volume de sólidos geométricos; manipulações algébricas; compreensão de volume enquanto grandeza; articulação com outros conteúdos e o uso apropriado de unidades de medida. Essas constatações são importantes para a elaboração de sequências didáticas no ensino desses conteúdos.

Bibliografia e referências

- BARROS, J. S. (2002). Investigando o conceito de volume no ensino fundamental: um estudo exploratório. 2002. 147 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Centro de Educação, Universidade Federal de Pernambuco, Recife.
- BRASIL. (1997) Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria do Ensino Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais. Área de Matemática.
- _____. (1998). Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria do Ensino Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais. Área de Matemática.
- BRASIL. (2002). Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria do Ensino Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais. Área de Matemática.
- _____. (2002). Secretaria da Educação Média e Tecnológica. PCN+: Ensino Médio – orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília: MEC.
- Douady R.; Perrin-Glorian M.-J. (1989). Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane. In: Educational Studies in Mathematics. vol. 20, n. 4, p. 387 – 424.
- LIMA, E. L. (1997). Medida e Forma em Geometria. 2a Edição, Publicação SBM.
- OLIVEIRA, G. R. F. (2002). Construção do Conceito de Volume no Ensino Fundamental: um estudo de caso. Recife, 2002. Dissertação (Mestrado em Educação). Programa de Pós-Graduação em Educação, Centro de Educação, Universidade Federal de Pernambuco, Recife.
- PERNAMBUCO. (2008). Secretaria de Educação. Base Curricular Comum para as Redes Públicas de Ensino de Pernambuco: matemática / Secretaria de Educação. - Recife: SE. 134p.