XIII CONFERENCIA INTERAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
2011 CIAEM 50 años
26 - 30 Junio, 2011
Recife, Brasil
del Comité Interamericano de Educación Matemática

Elementos para una aproximación epistemológica a un "espacio de trabajo" algebraico

Arturo **Mena**-Lorca
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Chile
arturo.mena@ucv.cl

Astrid **Morales** Soto
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Chile
ammorale@ucv.cl

Resumen

La discusión de los filósofos de la ciencia del siglo pasado modificó el concepto mismo de lo que es una ciencia. Una noción que se introdujo en esa discusión fue la de paradigma. Alain Kuzniak y Katherine Houdement utilizaron esa noción para su Teoría de paradigmas y espacio de trabajo geométrico, que permite observar y analizar los procesos de enseñanza y aprendizaje en una perspectiva particularmente apropiada. Parece natural, guardando las distancias, preguntarse si acaso hay análogos igualmente útiles para el caso de la enseñanza y aprendizaje del álgebra. Aquí damos algunos elementos para una aproximación de carácter epistemológico al asunto y señalamos cuál podría ser su utilidad eventual.

Palabras clave: educación, matemática, epistemología, didáctica, paradigma.

Ciencia y paradigmas

Kuhn y Lakatos-Musgrave

En 1943 Karl Popper publicó su *Logik der Forschung*, que reescribiría en inglés como *The Logic of Scienctific Discovery*, en 1959 (Popper, 1999). El libro incluye la idea de revoluciones en la ciencia, y trata el criticismo en la ciencia bajo el concepto de falsabilidad, que caracterizaría a las teorías empíricas -el cuantificador universal es inalcanzable, el contraejemplo es posible-.

Por su parte, Thomas Kuhn, en *The Structure of Scientific Revolutions* (1962) se focaliza en la idea de revolución en la ciencia, y difiere en cuanto al rol del criticismo en ello.

Tras el simposio acerca de la obra de Kuhn que presidió Popper, ocurrido en Londres en 1965, Imre Lakatos y Alan Musgrave publicaron *Criticism and the Growth of Knowledge*, en 1970 (Lakatos & Musgrave, 1970). Las perspectivas desarrolladas allí han sufrido, por cierto, cierta transformación (Cf. Barker, Andersen & Chen, 2006), sin embargo, las categorías que se introdujeron en esos trabajos aún son vigentes.

Paradigma

Kuhn utiliza profusamente el término *paradigma*. Proveniente del griego –*παράδειγμα:* La ciencia progresa en distintas etapas: preciencia, ciencia normal, revolución, preciencia… En la etapa precientífica faltan acuerdos en aspectos fundamentales y hay constante debate acerca de ello, existen tantas teorías como investigadores, cada uno de estos está obligado a comenzar de nuevo. La etapa propiamente científica consiste en que todos los científicos adhieren a un mismo paradigma.

Programas de investigación científica

Para Lakatos y Musgrave, la ciencia es una sucesión de teorías enlazadas en *programas* de *investigación científica*.

La ciencia tiene un núcleo o centro firme, que aquí llamamos *episteme*, que está rodeado de un cinturón protector de hipótesis auxiliares, y consiste además de heurísticas, que son reglas metodológicas: procedimientos aplicables (o no) a la investigación, a la solución de problemas, y que definen implícitamente el marco conceptual del programa. Los diferentes programas pueden estar basados en hipótesis “inconmensurables”, esto es, partir desde puntos de vista no comparables entre sí; en todo caso, compiten entre ellos, en cuanto a capacidad explicativa, predictiva y descubridora/creadora de nuevos problemas.

Un nuevo programa comporta un cambio progresivo de la problemática. Un programa degenera cunado enfrenta una proliferación contradicciones.

La historia de la ciencia es la de paradigmas que compiten entre sí; la competencia es buena para el progreso científico. Es bueno que los científicos adhieran a un programa hasta que este alcance su punto de saturación y deba ser reemplazado por otro. La “ciencia normal” de Kuhn es un programa que ha conseguido el monopolio.

Ilustraciones

Un ejemplo interesante de lo planteado hasta aquí es el del reemplazo de la Física aristotélica por la newtoniana; Newton expresa con claridad no solo que no comparte las respuestas dadas por la escolástica, sino tampoco las preguntas. “Decimos que cada especie de cosas está provista con una cualidad específica oculta por medio de la cual actúa y produce efectos manifiestos, es decirnos nada: Pero derivar desde los fenómenos dos o tres principios generales del movimiento, y después decirnos cómo las propiedades y acciones de todas las cosas corpóreas siguen de esos principios manifiestos sería un gran paso en la filosofía aunque las causas de esos principios no hubieren sido aún descubiertas”. (Newton, 1704, Query 31).

Otro ejemplo, enteramente natural, nos parece, es el de la educación (de la matemática).

Paradigmas y "espacio de trabajo"

Paradigma en el aula

No es obvio, por supuesto, que estas discusiones de los grandes filósofos de la ciencia del siglo pasado tengan algo que decir respecto de lo que sucede en un aula en la que se aprende matemáticas. (En cualquier caso, en el aprendizaje de la Física, por ejemplo, se observa claramente que habrá que dejar atrás modo de pensar aristotélico por otro que proviene de Galileo y otros próceres).

Pensemos, sin embargo, en la actividad de un conjunto de alumnos trabajando en un problema de matemáticas. Ellos subscriben un conjunto de creencias acerca de lo que son los objetos que estudian, algunas de las cuales han podido ser comprobadas o aprendidas; hay cierto tipo de "argumentos" que aceptarán, ciertas "herramientas" que tienen a su alcance y que pueden utilizar; hay preguntas que encuentran de interés…

Más aún, pareciera claro que, conforme avanzan sus estudios, los paradigmas a los cuales adhieren van también progresando.

Paradigma y "espacio de trabajo geométrico"

La consideración precedente, ingenua, ha sido debidamente elaborada por Alain Kuzniak y Katherine Houdement para el caso de la geometría, hasta el punto de convertirla en la teoría que se denomina precisamente Teoría de paradigmas y espacio de trabajo geométrico (Kuznak 2003, 2006; Houdement & Kuzniak 2006). La teoría ha clarificado la situación en el aula, y ha demostrado, en particular, que el paradigma que pone en juego el profesor puede estar en conflicto con aquel que debería utilizar con sus alumnos –en efecto, puede ocurrir que él trate de reproducir aquel que se le ha demandado y/o que ha podido construir en la etapa final de sus estudios, pero sus estudiantes podrían no estar en condiciones de seguirle–.

Paradigma y "espacio de trabajo" algebraico

Una pregunta inmediata y, en realidad, inevitable, es, si acaso hay una teoría, análoga a la anterior, para el caso del álgebra.

Tal teoría debería considerar a comunidades de estudiantes trabajando en problemas, los aspectos cognitivos implícitos –intuición, experiencia, razonamiento–, la disciplina que conocen. Habría que examinar las maneras de trabajar en las distintas etapas escolares: los paradigmas subyacentes, la materia bajo estudio, eventualmente, los recursos materiales (herramientas, artefactos) que se utilicen, la clase de argumentaciones (demostraciones) aceptadas; el tipo de explicaciones que provee el profesor (tal vez apropiada, tal vez infructuosa, errónea, incluso, contraproducente).

Se necesitaría preguntarse si acaso el trabajo de aula se realiza de acuerdo a diferentes puntos de vista, si a su vez estos determinan el rol de los objetos y/o el tipo de argumentación que se acepta; qué papel juegan (si alguno) en esos puntos de vista: la experimentación, la conjetura, el dibujo, la deducción, la "intuición", la manipulación algebraica. Habría que determinar cuál es el rol de problemas, operaciones, transformaciones, representaciones,…

Lo anterior es, en algunos aspectos, similar al del caso de la Geometría. Sin embargo, es natural esperar que algunos aspectos jugarán roles de importancia diversa. La visualización y la medición, por ejemplo, puede estimarse diferente en el caso algebraico. Por otra parte, en las dos primeras "etapas" de la geometría (ETG I y ETG II), se trabaja frecuentemente con métodos *ad hoc* para cada demostración (argumentación) o construcción; los métodos del álgebra, por el contrario, tienden a ser implícita o aun explícitamente universales (y los cuantificadores son relevantes, bien sea de manera no expresa). El lenguaje del álgebra parece debidamente más codificado que el de la geometría en aquellos estadios. La vinculación con la realidad, la modelación, discurren en carriles diversos en los casos del álgebra y de la geometría.

Para discernir el "espacio de trabajo" adecuado, el profesor debería aprender que hay: paradigmas diferentes en diversas etapas del estudio del "álgebra" , rupturas entre los diferentes niveles, y comprenderlos y usarlos en su diseño de clases y en sus interacciones con alumnos, de manera explicarse claramente, proponer actividades apropiadas y corregir malentendidos didácticos.

Para determinar los paradigmas en juego, es relevante establecer qué caracteriza a los problemas y ejemplos significativos que se entregan a los estudiantes. Por sobre otras consideraciones, importa que el profesor y el alumno no trabajen en distintos "espacios de trabajo" algebraico.

Álgebra y Epistemología

Epistemología e historia

Con seguridad, la historia de la disciplina puede darnos alguna idea acerca de los obstáculos que deberán enfrentarse, las etapas que podrían seguirse, los esfuerzos que habrá que realizar, y ciertos puntos delicados.

En efecto, la humanidad ha recorrido un camino que ha debido ir construyendo, y, si bien el lenguaje y, en realidad, la conceptuación disponible hoy en día para realizar ese tránsito son más claras (aun cuando eventualmente más inaccesibles para un neófito), parece posible pensar que aquellas etapas recorridas en la historia nos pueden sugerir las que deberán atravesar los alumnos en forma individual y también de manera colectiva.

De hecho Piaget y García (1989) sostienen que las diversas etapas en la construcción de distintas formas de conocimiento son secuenciales y que el mismo orden secuencial es evidente en la historia. Según ellos, un aspecto cualquiera del conocimiento no puede ser disociado de su contexto histórico y, por lo tanto, la historia del concepto puede dar alguna indicación acerca de su significación epistémica. Ellos consideran que estos niveles son la herramienta más constructiva que hallaron en su búsqueda de los mecanismos comunes entre historia y psicogénesis. (Ibíd., p. 29).

Basados en la premisa anterior, daremos a continuación algunos elementos de la historia del álgebra, tomada en una acepción suficientemente amplia, enfatizando algunos aspectos de carácter epistemológico.

El álgebra

Hay distintas maneras de considerar qué es el álgebra. De hecho y según describiremos, hoy en día la expresión comporta dos acepciones bastante diferentes.

Una primera observación es que el álgebra está inextricablemente ligada a los números, a las ecuaciones y a los problemas que con estas se resuelven. Ahora bien, pensar en números es pensar operaciones; aún más, ya las operaciones comportan cierto tipo de “ecuaciones”: encontrar x tal que $2+x=5$ es restar 5-2, etc. A su vez, pensar en operaciones puede hacerse en forma concreta, obteniendo resultados o bien fijarse en las propiedades que estas cumplen.

Según E. T. Bell (1945), G. Nessemlam introdujo en 1842 tres fases históricas del álgebra: la retórica, la sincopada y la simbólica; tales etapas se refieren al uso del lenguaje. Álgebra En la etapa retórica, el lenguaje utilizado es la lengua materna. Ella se presta bien para problemas sencillos, pero, evidentemente, se constituye en una dificultad para problemas más complejos. Aryabhata, hacia el 500 d. C., trabajará de esa manera, sin símbolos: ...tome la raíz cuadra de esto, substraiga el doble del primer término... Tan tarde como el año 1540, cuando Tartaglia se encuentra con Cardano, en lugar de una fórmula le enseña un verso que utiliza para resolver las ecuaciones cúbicas: “Cuando el cubo y la cosa juntas son iguales a un número discreto…”(en nuestra terminología, $x^3+cx=d$).

Diofanto, hacia 250 d. C., incluye algunos símbolos en sus trabajos, y comienza así el álgebra sincopada: si se trata de encontrar dos números cuya suma es 20 y el producto 96, dirá $2x$ es la diferencia requerida, luego, los números son $10+x$, $10-x$...(Por supuesto, él usa letras griegas, y los símbolos + y – no están a su disposición).

El modo de trabajo simbólico, el habitual en una clase de álgebra de secundaria, pertenece a una etapa más avanzada del álgebra.

Una primera cuestión es, entonces, la de las exigencias cognitivas que comportan estas fases y el tránsito entre ellas.

Números

La Historia, la de la Humanidad, empieza con los números; de números son los primeros registros escritos que se conocen.

La dificultad conceptual que suponen es manifiesta en los registros de que se dispone: se comienza a contar sin números (pueblos que ponen nombres estandarizados a los hijos, de acuerdo al orden de nacimiento, pero sin concepto de número; nombres que señalan, en orden, a dedos, muñecas, codos, hombros), o se cuenta hasta sólo hasta tres (hotentotes, qawéshkar del Sur de Chile, algunos aborígenes de Australia), o cuatro (guaraníes); cantidades “grandes” aludidas jalándose los cabellos…

Contar números (naturales) “grandes” o aun contar indefinidamente supone agrupamiento de cantidades y, en el mejor de los casos, base de numeración. Se encuentran registros de cierta oscilación al respecto (6 podría decirse “una vez sobre el más próximo –mano o pie”; 14 “no tengo 15”; en el Estrecho de Torres –Australia-Nueva Zelanda– se cuenta, sucesivamente, *urapun*, *okosa, okosa urapun*, *okosa okosa…).* Los griegos, que comenzaron utilizando simplemente letras para las cantidades, derivaron, en el Ática, a un sistema que después adaptarían los romanos: hay “bases” 5 y 10, se suma y se resta, correspondientemente, unidades, decenas, etc. (en Micenas diseñaron un sistema más eficiente).

El sistema posicional se presta más no sol al registro de números “grandes”, sino a las operaciones entre ellos. Los Harrappan, en el Punjab, entre 2500 y 1700 a. C., desarrollaron el primer sistema decimal que se conoce; los babilonios tuvieron un sistema sexagesimal del cual todavía hoy usamos ciertos elementos, los mayas utilizaron un sistema de base 20 (en el francés actual hay vestigios de un sistema de la misma base). El 0, propiamente tal, fue inventado solo en India y los otros pueblos que usan notación posicional enfrentan ambigüedades en la lectura de números de tres o más “dígitos”.

La dificultad que todo esto supone puede estimarse al considerar que Gerberto d'Aurillac, quien sería el Papa en el año 1000, trató antes de esa fecha de introducir el sistema decimal en Europa, pero su éxito fue escaso y Fibonacci en su *Liber Abaci* intentará nuevamente en el 1202.

Los números racionales, positivos, aparecen antes que los enteros negativos. Lo hacen a veces como fracciones de unidades de medida (de mano, de palma, de codo, entre los egipcios; de codos entre los babilonios. Los indios tienen un sistema más abstracto. Los griegos los identifican con la división de trazos: poseen un “álgebra geométrica”.

Los enteros aparecen en una forma muy “moderna” con Brahmagupta, en 628, como pares (ganancias, pérdidas) de un negocio: al final del día, ganar 9 y pagar 2 es equivalente a ganar 7 y no gastar.

Construcción de los números

En cuanto al álgebra, un problema central fue siempre y naturalmente, si había soluciones y, de haberlas, en qué ámbito habitaban.

Se podría pensar, entonces, que los números se fueron ampliando sucesivamente para encontrar soluciones de ecuaciones cada vez más demandantes; así, $x+2=5$ y $2x=6$ tendrían soluciones en **N**, pero $x+2=1$ obligaría a ampliar a **Z**; luego $6x=2$ a **Q**; $x^2=4$ se puede resolver en **Q**, pero $x^2=2$ requiere de extenderse a **R**; posteriormente, $x^2+1=0$ obliga a ampliarse a **C**. Así, se habría construido sucesivamente **N**, **Z**, **Q**, **R** y **C** (y, por otros motivos los cuaterniones de Hamilton y las octavas de Cayley).

La historia, sin embargo, muestra otra sucesión. En orden de aparición formal: los complejos, en 1833, por William Rowan Hamilton como pares ordenados, y Augustin Louis Cauchy, en 1847, como expresiones polinomiales en i tal que $i^2=-1$. Los cuaterniones, en 1843, por Hamilton. Los octoniones por J. T. Graves en 1843. Los enteros y los racionales, en1860, por Karl Weierstrass. Los reales, en 1872, por Richard Dedekind; Georg Cantor en el mismo año, R. Kronecker en 1887 (y Karl Weierstrass, en 1860). Finalmente, los naturales en 1889.

Es importante señalar el obstáculo que cada extensión de los números comporta. Para los pitagóricos, convencidos que los números racionales positivos regían el mundo, la aparición de la raíz cuadrada de 2 comportaría un descalabro tal que, según la tradición, Hippasos de Metapontum habría sido ahogado en el mar; M. Stifel, 1544, negará que sean “verdaderos números”. Descartes rechazará las soluciones negativas de las ecuaciones; tan tarde como 1803 Lazarus Carnot alegará de una multitud de “absurdos palpables que resultan de la noción misma de número negativo”. Cardano, al trabajar con imaginarios, dirá “dejando de lado las torturas mentales que esto involucra…”. Los nombres de “irracionales”, y de “imaginarios”, “sofísticos” o “imposibles” reflejan estos obstáculos.

Visualización

Representar los números enfrentó también dificultades. Antes del plano de Argand-Gauss para los números complejos, Euler se refirió a los imaginarios diciendo que lo único que sabíamos de ellos era que no eran positivos, ni negativos, ni cero. Fácil de leer en el plano complejo, pero no en los modelos que se había propuesto, como por ejemplo, el de (la geografía de) los países bajos, que tienen una parte “virtual” –quitada al mar o bien que puede ser quitada por él–.

La simbología

La simbología era crucial para el desarrollo del álgebra. En cuanto a los números mismos, ya señalamos que alguna sirve para anotar, con restricciones, pero no para calcular. Las notaciones para las operaciones evolucionan tardíamente: Johann Widmann introduce los símbolos para suma y resta en 1489; Michael Stiefel los popularizará en 1554; la x para multiplicar es de William Oughtred en 1631 y la contigüidad y ausencia de símbolo es de Pascal; Rafael Bombelli presenta alguna notación abreviada para raíces cuadradas y cúbicas; el signo igual es de Robert Recorde en 1557.

La introducción de letras (incógnitas, parámetros) es lenta. La expresión en idioma común acota el desarrollo del álgebra.

François Viète, en 1579 y luego en 1591, introduce las cantidades literales. Antes de ello, la incógnita será la “cosa” (Nicolo Fontana, hacia 1540) o similar. La evolución de la escritura de las ecuaciones transita paso a paso desde Regiomanto (1464), pasando por Luca Pacioli, (1494), François Viète (1593), Simon Stevin (1585), Christophe Klau (1593), para terminar estableciéndose en su forma actual con Descartes, en 1630.

Ecuaciones y problemas

La modelación de problemas es seguramente un aliciente para la resolución de ecuaciones; sin embargo, se observa por doquier por doquier y con frecuencia la presencia de problemas “inútiles”, suerte de juegos inofensivos hechos por el placer del cálculo: gatos que comen ratones (antiguo Egipto), perlas que se caen a una cortesana o flechas que se lanzan a un guerrero (India), pájaros que tratan de alcanzar un pescado desde distintos árboles (el propio Al-Khowarizmi), la posible edad de Diofanto en charada… (Un escriba babilonio dirá: sé sacar cuentas que otros no saben…).

Etapas en el desarrollo del Álgebra

La teoría de ecuaciones

Las etapas señaladas por Piaget y García, a las que aludimos, ocurren tanto en los procesos históricos como en aquellos que surgen en los aprendizajes (Ibíd., p. 29); ellas no son solo períodos en el desarrollo histórico o del aprendizaje, sino que representan además maneras de organizar el conocimiento. Cada etapa comienza con una reorganización de lo que se ha heredado de las precedentes (Ibíd., p. 8); cada vez que se alcanza un nuevo nivel, lo que es sobrepasado es integrado en las nuevas estructuras.

Para el Álgebra, el tema es particularmente interesante; ella parece ser un ejemplo privilegiado en términos históricos.

Etapa *intraoperacional*: está caracterizada por el estudio de formas aisladas –se aborda cada objeto por separado– y por los métodos de ensayo y error.

Etapa *interoperacional*: en ella se cambia el enfoque desde el analizar cada objeto a un estudio de las relaciones o transformaciones entre diferentes objetos. (Ibíd., p. x).

Etapa *transoperacional:* en esta etapa, deliberadamente se ignora la multiplicidad de especificidades de los objetos o situaciones. Ella se caracteriza por la evolución de estructuras en las cuales las relaciones internas corresponden a transformaciones interoperacionales: una vez que se ha dominado y generalizado las transformaciones, pueden hacerse nuevas síntesis. (Ibíd., p. 182).

Las etapas operacionales de la teoría de ecuaciones son claramente identificables. (Cf., al respecto, Mena, 2010).

Etapa intra. Esta etapa comienza con ecuaciones lineales tratadas por egipcios y babilonios. Hacia el año 400 a. C se encuentra un algoritmo (completar cuadrado) para resolver problemas que usan (en nuestra terminología) ecuaciones cuadráticas. Euclides ofrecerá un método geométrico para encontrar una longitud (que corresponde a nuestra ecuación cuadrática). Hacia el año 830, al-Khâwârazmi, con el apoyo de explicaciones geométricas, trata, por separado, diversas ecuaciones lineales y cuadráticas. Otros árabes (incluyendo a Omar-al-Khayam) intentarán resolver algún tipo de ecuaciones cúbicas. Luego de una que aparece en la Flos de Leonardo de Pisa, en 1225, Scipione del Ferro, por ejemplo, conoce un tipo hacia 1500. Con seguridad, Nicolo Fontana (Tartaglia) sabe otro. Se trata de hacer un cambio de variable de manera de encontrar una resolvente cuadrática que se sabe resolver. Cardano se entera, hacia 1540, le sonsaca el caso y lo publica, junto con el de la ecuación cuártica desarrollado por su discípulo Ferrari –que usa una resolvente cúbica–.

Etapa inter. Lagrange, en 1770, considera la naturaleza de las soluciones de las ecuaciones cúbica y cuártica, y trata de entender por qué se habían podido resolver. Observa que para ellas se usaban resolventes: ciertos cambios de variables permiten encontrar una ecuación asociada de menor grado, cuya solución se conoce y a partir de la cual se obtienen las soluciones de la ecuación original. Intenta ese camino para ecuaciones de grado 5, pero ahora el grado, en lugar de disminuir, sube. Concluye entonces que se necesita un nuevo enfoque si se quiere avanzar sobre el asunto.

Habrá trabajos similares de Habrá trabajos similares de Alexandre Vandermonde (1770), (Edward Waring (1770), Paolo Ruffini (1798, 1802, 1813). En 1824, Niels Heinrik Abel publica una memoria en que demuestra correctamente que es imposible resolver la ecuación quíntica por radicales (aunque sí se puede encontrar una para la ciclotómica de grado arbitrario, por ejemplo).

Etapa trans. Esta etapa comienza con la introducción de la teoría de grupos con Galois, incluyendo los subgrupos normales y los grupos cocientes en una versión primera. Hay cuatro fuentes reconocidas de la teoría de grupos propiamente tal (cf. Wussing, 1984; Kleiner, 1986; Nicholson, 1993): el álgebra clásica (bien representada por Lagrange, 1770); la teoría de números, (desde las Disquisitiones de Gauss, 1801); la geometría (particularmente, el programa Erlangen de Klein, 1872), y el análisis (en especial, Sophus Lie, 1874; Henri Poincaré y Felix Klein, 1876).

Tras el resultado de Abel en 1824, era natural buscar una manera de determinar cuándo una ecuación es resoluble por radicales, esto es, utilizando las cuatro operaciones y extracción de raíces n-ésimas.

Galois ha leído (además de a Legendre en Geometría) los trabajos originales de Lagrange y de Abel. En varias memorias que presenta a la Academia de Ciencias de París –en 1829, 1830, 1831 y 1832 (Galois, 1962)– establece cuándo se puede encontrar una fórmula y cuándo no. Galois observa que las simetrías del polinomio forman lo que él llama, por primera vez en la historia, *le groupe*. Las propiedades del grupo reflejan las soluciones de la ecuación polinómica: la ecuación es soluble por radicales si el grupo (en la terminología actual) es soluble.

Este resultado significa el término de la teoría centrada en resolver ecuaciones y el comienzo de una nueva etapa en que predominan las estructuras.

Desde un punto de vista cognitivo, el acceso a este nuevo estado de cosas presenta, en principio un salto de proporciones: en 1870, Camille Jordan publicó su *Traité des substitutions et d’équations algébriques* (Jordan 1870), que comenta in extenso las memorias de Galois; ese año, coincidieron en París los grandes matemáticos Sophus Lie (de los grupos y las álgebras de Lie) y Felix Klein (del Erlangen Programme, que unificó las geometrías); ellos leyeron juntos el texto de Jordan y encontraron que era “un libro con siete sellos”.

El álgebra abstracta

La irrupción de los grupos es también el comienzo de la etapa intra del álgebra abstracta: pronto aparecerán, anillos, ideales, espacios vectoriales… cada uno estudiado por su cuenta. La definición de grupo abstracto que dará Arthur Cayley en 1854; es este concepto abstracto el que permitió, por ejemplo, que Felix Klein los utilice posteriormente en la Geometría. La definición de Cayley acentúa el cambio de énfasis que había habido, al centrarse no en los objetos sino en su manipulación, y con ello abre el camino para la proliferación de estructuras que le siguieron. El Álgebra se convierte así en lo que hoy conocemos: el estudio de las estructuras algebraicas.

Hay aun otras dos direcciones que señalar en esta evolución. Por una parte, Nicolas Bourbaki (1939-1998) llevará la propia noción de estructura a un ámbito más amplio, y dirá que toda la Matemática consiste en el estudio de las estructuras algebraicas, topológicas (geométricas sensu lato) y de orden. En un sentido similar, la teoría de categorías unificará todas esas estructuras en una sola mirada global, y que parece completar un amplio ciclo: en esa mirada, no son los objetos los importantes, sino las flechas entre ellos. (Cf. Mac Lane, 1972).

Las palomas

Una manera adicional interesante de aproximarse a la evolución del álgebra es a partir de la resolución de un problema. Consideremos el siguiente:

Cierto gavilán atacó un palomar. Las palomas eran valientes y lo rechazaron. Maltrecho su orgullo, al huir, él dice: adiós cien palomas, implicando con ello que sólo en su número radicaba su fuerza. Pero una paloma le contesta: “Nosotras, más nosotras, más la mitad de nosotras, más la cuarta parte de nosotras, más usted señor gavilán, sí somos cien”. (Se pregunta cuántas son las palomas).

En los albores de la Historia de la Matemática (y, digamos, en el jardín de infantes), el problema no puede ni siquiera plantearse; pues no hay suficiente abstracción, no hay lenguaje apropiado. En efecto, para la estructura del problema es irrelevante que se trate de palomas, gavilanes o hipopótamos. No bastaría tampoco con disponer de una palomar grande para experimentar.

En una segunda etapa, (y en la enseñanza básica), se trataría el problema como una cuestión de números (naturales); la solución se busca por tanteo, postulando alguno y examinando si satisface las condiciones del problema. Naturalmente, los primeros experimentos indican que se debe trabajar con múltiplos de cuatro, menores que cuarenta, mayores que veinte... Se persiste hasta encontrar la solución, o bien hasta agotar todos los casos posibles para demostrar que no la hay. Esto corresponde a la llamada Aritmética Elemental.

En un tercer estadio (y también en la enseñanza media), se dispone ya del Álgebra Elemental. Así como los números podían representar palomas, así también las letras reemplazan a los números. La ecuación $\varepsilon(x)$: $x + x +(x /2)+(x /4)+1=100$ contiene todo lo necesario; una vez escrita, la solución se obtiene de un modo mecánico que no requiere de mayor reflexión.

Estudiar Lógica y Conjuntos (cuarta etapa) representa una mayor abstracción, un grado más alto de generalidad. El problema inicial está aún más lejano (¿alguien recuerda que tenía que ver con palomas?). Ahora es la ecuación misma la que puede pensarse como un caso particular de los objetos en estudio: $\varepsilon(x)$ es, en realidad, una *función proposicional*, que determina un subconjunto (eventualmente vacío) del conjunto **N** de los números naturales (nuestro conjunto de referencia en este caso). Este subconjunto se llama la solución de la función proposicional (en **N**). Conectivos lógicos, intersecciones, dominios de funciones, cuantificadores y, muy relevante, la distinción entre implicación y equivalencia (que permite distinguir, vía el axioma de especificación, si acaso la solución de la ecuación inicial se ha convertido en un conjunto que contiene elementos adicionales a los que debería) son un lenguaje apropiado y necesario en esta etapa. Esto también puede (y debe) expresarse como acciones de grupos (en el caso del ejemplo, el grupo aditivo de **R**, el grupo multiplicativo de **R**; en otros, ciertos grupos de matrices y/o de aplicaciones lineales).

Conclusiones

Las grandes etapas históricas de la historia del álgebra etapas históricas de la historia del álgebra que hemos señalado en nuestra exposición no necesariamente coinciden con la que interesan en el aula. En efecto, en esta intervienen de manera determinante las concepciones del profesor y por ende el tipo de tareas que propone a los aprendices.

En particular, al comienzo de la enseñanza básica se puede aislar una etapa en la cual se aprende los rudimentos del (agrupar y del) contar.

Ahora bien, así como se suele considerar (en un ámbito limitado) la exponenciación como una clase particular de multiplicación, y esta como un tipo especial de suma, así también sumar se puede pensar como un tipo especial de conteo. De tal manera y dada la complejidad que supone la numeración en un sistema posicional y la abstracción que supone el concepto mismo de número, ese primer paso de contar presenta ya una dificultad considerable, ostensible en la historia de la humanidad.

En cualquier caso, las etapas que señalamos presentan características análogas –aun cuando no iguales– a las que definen a los paradigmas y espacios de trabajo geométrico: hay aspectos epistemológicos, paradigmáticos y cognitivos definidos, y el tránsito de una a otra comporta cambios en todos esos ámbitos (más o menos pronunciados, según el caso). De tal manera, esas etapas constituyen elementos de interés para la elaboración eventual de una teoría de Paradigmas y “espacios de trabajo” algebraico.

Referencias y bibliografías

Barker, P., Andersen, H. & Chen, X. (2006). *The Cognitive Structure of Scientific Revolutions.* Okford: Cambridge.

Beiling, H. (1992). Piget’s enduring contribution

Bell, E. T. (1945). *PThe Development of Mathematics*. New York: McGraw Hill.

Bourbaki, N. (1939-1998). *Éléments de mathématique*, 10 vols. (Algèbre, 1973). Paris: Hermann.

Galois, E. (1962). *Écrits et mémoires mathématiques d'Évariste Galois*. Robert Bourgne y J.-P. Azr, (Éds.). Paris: Gauthier-Vilars.

Houdement, C. & Kuzniak, A. (2006). Paradigmes Géométriques et Enseignement de la Géométrie. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives,*11, 175-193.

Jordan, C. (1870). *Traité des substitutions et des équations algébriques*. Paris: Gauthier-Vilars.

Kitchener, R. (1986). Piaget’s Theory of Knowledge. New Haven: Yale University Press.

Kuhn, T. (1962). *The structure of Scientific Revolutions*. Chicago: University of Chicago Press.

Kuzniak, A. (2003). *Paradigmes et espaces de travail géométriques*, Notes d’habilitation, IREM Université de Paris VII, Paris.

Kuzniak, A. (2006). Paradigmes et espaces de travail géométriques. Éléments d’un cadre théorique pour l’enseignement et la formation des enseignants en géométrie. *Cana-dian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 6.2, 167-187.

Lakatos, I. & Musgrave, A. (1970). *Criticism and the Growth of Knolwedge*. Cambridge: Cambridge University Press.

Mac Lane, S. (1972). *Categories for the working Mathematician*. New York: Springer Verlag.

Mena-Lorca, A. (2010). *Estudio epistemológico del teorema del isomorfismo*. Tesis doctoral, no publicada. Centro de Investigación Avanzada y de Tecnología Aplicada, Instituto Politécnico Nacional, México.

Newton, I. (1718). *Opticks, or, A treatise of the reflections, refractions, inflections and colours of light.* The second edition, with additions. London : W. and J. Innys. http://www.fordham.edu/halsall/mod/newton-optics.html.

Piaget, J. & García, R. (1989). *Psychogenesis and the history of Science*. New York: Columbia University Press.

Popper, K. (1999). *The Logic of Scientific Discovery.* Padstow, Cornwall: J International Ltd.

Smith, L. (1992). *Jean Piaget: critical assessments*. 4 vols. London: Routledge.

Smith, L. (1996). *Critical readings on Piaget.* London: Routledge.