



Um primeiro livro didático sobre geometria não-euclidiana, em 1874 – o papel do ensino na história da matemática

Gert Schubring

Universidade Federal do Rio de Janeiro

Brasil

gert.schubring@limc.ufri.br

Resumo

Na discussão metodológica recente sobre a historiografia da matemática, o ensino coloca-se em um papel cada vez mais importante. Contrariamente às abordagens tradicionais que entenderam os conceitos da matemática escolar como exclusivamente decorrentes da matemática científica, estas novas abordagens tematizam, por um lado, o papel independente do desenvolvimento do saber escolar no ensino e, por outro, a estreita ligação entre invenção e ensino. Tais abordagens são utilizadas aqui para apresentar um caso desconhecido de contribuição produtiva do ensino: enquanto filósofos e teólogos ainda recusavam uma matemática e uma epistemologia que permitia várias “verdades”, um professor do ensino médio na Alemanha, em 1874, já publicava um livro didático introduzindo as noções de Bolyai como base do ensino da geometria.

Palavras chave: historia da geometria não-euclidiana, epistemologia, livros didáticos, Riemann, invenção e ensino.

Introdução

Na historiografia da matemática, o papel atribuído ao ensino da matemática e à educação matemática em geral é secundário – o prioritário diz respeito às pesquisas dos grandes matemáticos e aos teoremas por eles demonstrados. Somente em épocas remotas, quando poucos são os conhecimentos sobre tais grandes personalidades, os relatos são obrigados a focar a dimensão do ensino. Implicitamente, tal foco já significa a importância chave do ensino para se constituir uma cultura de pesquisa. Reflexões sobre este papel nas primeiras épocas de prática da matemática, no entanto, não encontram-se na literatura.

No entanto, uma reflexão inovadora quanto à historiografia e epistemologia da matemática encontra-se em um debate entre dois historiadores, entre Bruno Belhoste e mim, em duas notas publicadas na revista francesa *Revue d'Histoire des Mathématiques*, de 1998 e de 2001, e republicadas em 2002 na revista da PUC de São Paulo, *Educação, Matemática, Pesquisa*.

Embora com o intuito de valorizar o papel do ensino em relação à história da matemática, Belhoste conceitualizou tal relação em termos dicotômicos. Por um lado, ele afirmou que a esfera de produção não pode existir de uma maneira autônoma:

“em geral, não existe uma esfera de produção teórica que seja completamente autônoma, mas na verdade as atividades intelectuais ficam empenhadas em contextos específicos que determinam as condições do seu desenvolvimento” (Belhoste, 1998, p. 289).¹

Ainda, ele expôs a concepção aparentemente forte de que as instituições de ensino irão determinar as atividades matemáticas:

“as instituições e as representações estruturantes da área disciplinar com efeito determinam as práticas, quer dizer os modos de trabalho que modelam a atividade matemática” (Belhoste, 1998, p. 298).²

Por outro lado, Belhoste, embora denunciando uma dicotomização entre produção e reprodução na historiografia, aceita ele mesmo, ao utilizar os termos produção e reprodução, sua separação em dois pólos separados, sendo estes produção e reprodução:

“a idéia falsa de que a produção matemática pode ser separada a priori pelo historiador das condições de sua reprodução” (Belhoste, 1998, p. 289).³

Em minha resposta, eu critiquei o uso desta terminologia como distanciando mais, em vez de aproximar os dois pólos (Schubring, 2001, pp. 296-207). Eu coloquei até mesmo que a concepção aparentemente forte de determinação da atividade não há de convencer, pelos exemplos dados, um “internalista” sobre um papel determinante de um contexto de ensino, uma vez que tal historiador sempre há de admitir uma certa interferência de um contexto (2001, p. 296). Nesta mesma nota, chamei a atenção para uma abordagem que evita qualquer maneira de separar produção e reprodução, desenvolvendo aí, baseado em particular em concepções da sociologia sobre comunicação, uma noção mais ampla de ‘produção’:

“para a historiografia da matemática, o desafio essencial consiste em entender a produção matemática em toda sua complexidade. Já uma primeira abordagem fenomenológica mostra que o ensino e a invenção não podem ser separadas quanto à produção e que eles interagem de um modo que depende da situação sócio-cultural” (Schubring, 2001, p. 297).⁴

¹ „de manière générale, il n'existe pas de sphère de la production théorique qui serait entièrement autonome, mais plutôt des activités intellectuelles engagées dans des contextes spécifiques qui déterminent les conditions de leur développement“ (Belhoste, 1998, p. 289).

² „les institutions et représentations structurant le champ disciplinaire déterminent en effet des pratiques, c'est-à-dire des modes de travail, qui modèlent l'activité mathématique“ (1998, p. 298).

³ „l'idée fausse que la production mathématique peut être séparée *a priori* par l'historien des conditions de sa reproduction.“ (1998, p. 289).

⁴ “le défi essentiel pour l'historiographie des mathématiques est de comprendre la production mathématique dans toute sa complexité. Une première approche phénoménologique montre déjà qu'enseignement et invention ne peuvent être séparés quant à la production et qu'ils interagissent d'une manière qui dépend de la situation socio-culturelle.“ (2001, p. 297).

Como exemplos, foram colocados os casos de vários matemáticos como testemunhas de que, ao lecionar cálculo, sentiram-se obrigados a retomar os fundamentos dos conceitos e a desenvolver novos conceitos mais rigorosos (2001, p. 298).

Em uma publicação anterior, eu já expus uma outra dimensão de relação produtiva entre invenção e ensino. Foi um exemplo sobre a teoria dos conjuntos, considerado o paradigma como teoria científica, que entrou – na segunda metade do século XX - por “cima”, sustentado por matemáticos mais dedicados a representar as estruturas matemáticas no currículo das escolas do que a refletir sobre as exigências e possibilidades do ensino. Na verdade, o livro didático exposto naquele artigo, o *Elemente der Arithmetik und der Algebra* (Elementos de Aritmética e de Álgebra) de 1885, foi a primeira exposição da nova teoria dos conjuntos, utilizada para re-estruturar o ensino da aritmética e da álgebra, mesmo antes de uma publicação completa da teoria dos conjuntos por Georg Cantor (1845-1918): Friedrich Meyer (1842-1898), o autor do livro didático e professor de matemática no *Gymnasium* de Halle, foi um amigo de Cantor, que por sua vez era professor de matemática na universidade da mesma cidade. Em minha análise, Meyer conseguiu estabelecer uma concepção inovadora do conceito de número, integrando as abordagens de Cantor às concepções de conjuntos já disseminadas na Alemanha (Schubring, 1998, pp. 27-30).

Adotando tais abordagens e metodologias, vou apresentar aqui um outro caso da relação produtiva do ensino para a pesquisa, referente à geometria não-euclidiana.

A recepção das pesquisas sobre a geometria não-euclidiana

Como é bem conhecido, as pesquisas sobre geometrias não-euclidianas começaram como tentativas de alcançar o último rigor na geometria euclidiana, demonstrando o chamado axioma das paralelas. Estas tentativas multiplicaram-se a partir do último terço do século XVIII, em particular na Alemanha; sem dúvida instigados pela primeira avaliação sistemática de 28 tentativas de demonstração, empreendidas desde a Antiguidade. Este feito deve-se a Georg Simon Klügel (1739-1812), em sua tese de doutoramento datada de 1763, sob a orientação do professor Abraham Kästner (1719-1800), muito interessado nos fundamentos da matemática.

Paulatinamente, vários autores ousaram afirmar que não seria possível conseguir a demonstração requerida. Um primeiro matemático, que anunciou esta impossibilidade em uma publicação e que fez entender mais desenvolvimentos deste argumento, foi Gauß, em uma resenha de 1816 sobre mais uma tentativa de demonstração. Sempre se refere na historiografia ao seu medo quanto ao “Geschrei der Bötter” (gritaria dos bárbaros) que a publicação de uma geometria diferente haveria de provocar. No entanto, a reação à sua resenha foi moderada e não legitimou seu medo; mas após tal publicação ele praticamente calou-se publicamente e conservou seus desenvolvimentos na gaveta da sua escrivaninha. Já as descobertas de Wolfgang Bolyai (1775-1856) eram praticamente desconhecidas, escondidas num apêndice de um livro de seu pai, e sem o apoio que ele esperava de Gauß. Por outro lado, os trabalhos de Lobatchevski (1792-1856) foram ridicularizados por seus colegas, nas universidades russas.

Mesmo depois da geometria não-euclidiana ter sido aceita na comunidade dos matemáticos, resistências contra esta teoria e às suas implicações epistemológicas permaneceram por muito tempo (Gray, 1994).

Um caso notório de tal resistência foi o do filósofo alemão Gottlob Frege (1848-1925). O historiador Imre Toth tem o mérito de ter revelado as dimensões abrangentes de sua recusa à teoria, devido à identificação que ele fazia das questões da geometria com o mundo físico (Toth, 1984). Menos conhecido foi que houve, na segunda metade do século XIX, na Grã Bretanha, controvérsias veementes sobre a admissibilidade de uma geometria não euclidiana. Estas foram gestadas em um contexto católico, em particular na Irlanda, e em um contexto teológico anglicano conservador, em decorrência de temores sobre o que o aceitar uma pluralidade de verdades significaria para os dogmas (Toth, 1982). Estas controvérsias na Inglaterra victoriana foram também estudadas posteriormente por Joan Richards (Richards, 1988).

Cientes de tal extensão de resistência e de recusas, é um fato surpreendente a existência de um livro didático, destinado ao ensino da geometria em escolas secundarias alemãs, em que as descobertas de Janos Bolyai (1802-1860) servem como a base para a exposição da geometria.

O conceito do livro: *Lehrbuch der Ebenen Geometrie. Nach Grundsätzen Bolyais*⁵

Na historiografia, atribui-se o efeito decisivo do aceite da geometria não-euclidiana por uma parte maior da comunidade matemática ao trabalho de 1868 do matemático italiano Eugenio Beltrami (1835-1900). Nele, o autor apresentava em uma construção geométrica as idéias de Lobachevski, estabelecendo uma descrição dos pontos no interior de um disco (Gray, 1994, p. 881). O livro didático aqui apresentado, e até então não conhecido e considerado na historiografia, revela, porém, um outro acesso aos novos desenvolvimentos da geometria. O autor, Hermann Wagner, doutor em matemática e professor de matemática numa escola secundária em Hamburg, referencia-se de fato não em Beltrami, mas principalmente em Bolyai e Riemann, mencionando Lobachevski brevemente. A obra que ele cita como referencia central para a sua abordagem é a famosa obra fundamental de Riemann, publicada em 1867:

*Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen.*⁶

Wagner representa, analogamente a Friedrich Meyer, o professor neo-humanista prussiano com um perfil socialmente reconhecido como o de um sábio, e com uma atuação profissional que assume estruturar o próprio ensino em harmonia com a coerência e o rigor da sua ciência. O seu livro dirigiu-se a dois públicos distintos: o prefácio foi escrito para seus “Fachgenossen”, os colegas da sua disciplina, e o texto em si para alunos de escolas, de ambos os grupamentos clássicos e modernos⁷. Como na época o ensino da geometria propriamente dita iniciava-se na “Quarta”, correspondente à terceira série da escola secundária, e como este livro didático destinava-se justamente ao ensino normal da geometria, pode-se assumir que foi escrito para alunos com idade a partir de 12 anos.

O livro todo, e em particular o prefácio, evidencia que o autor não tem nenhum problema em aceitar a existência de geometrias diferentes. De fato, o seu intuito é tornar esta descoberta recente na matemática acessível aos alunos. Wagner explica no início do livro que, por um lado,

⁵ Livro texto da geometria, seguindo os Princípios do Bolyai.

⁶ Sobre as hipóteses subjacentes à geometria.

⁷ Na Alemanha houve desde o século XIX, quanto às escolas secundarias, uma separação em grupamentos voltados ao ensino das línguas clássicas e outros com foco na matemática e nas ciências, atribuindo-se a estes últimos o caráter de serem modernos“.

a geometria constitui uma das poucas ciências que tem conseguido um alto grau de perfeição. Porém, são justamente os seus primeiros fundamentos que ainda carecem de clareza e certeza suficiente. Ele menciona em particular a ausência de uma definição de linha reta e a falta da demonstração, já procurada desde séculos, do axioma das paralelas (equivalente ao teorema da soma dos ângulos no triângulo). O autor constata com satisfação que foi provado, enfim, neste seu século, que todas as tentativas de demonstrações de tal axioma deveriam fracassar; atribuindo a Riemann o mérito principal deste resultado. Para Wagner, este novo rumo na geometria representava uma importância epistemológica grande: contrariamente às concepções de Kant, que concebeu a geometria como uma ciência abstrata, de “reiner Anschauung”⁸, Riemann teria mostrado perfeitamente que os fundamentos da planimetria são fundados na experiência e que então a geometria apresenta-se como uma “Erfahrungswissenschaft”, uma ciência empírica. Este conceito epistemológico é de grande importância para o autor porque legitima a introdução dos primeiros conceitos de geometria – contrariamente à prática dominante na sua época – empiricamente (Wagner, 1874, p. iii).

De fato, a existência de outra qualidade de nossa “Raumform”, da forma do espaço, constitui para Wagner uma característica do empírico. No entanto, Wagner afirmou que Bolyai havia demonstrado a possibilidade de uma tal outra geometria de maneira “widerspruchsfrei”, sem contradições, referindo-se então a um método axiomático.

A abordagem específica do seu livro vem em decorrência de um livro publicado em 1872 por Johannes Frischauf (1837-1924), professor de matemática na universidade austríaca de Graz: *geometria absoluta segundo Johann Bolyai*. Embora incorretamente atribuindo os resultados de Wolfgang Bolyai ao seu pai, que publicou a obra do seu filho como apêndice em um próprio livro, Wagner atribui ao livro de Frischauf o mérito de ter tornado acessível ao público geral “o verdadeiro ser da geometria”. O autor se propôs então, como tarefa, tornar os novos conceitos acessíveis aos iniciantes, aos alunos na escola secundária. Visto que o sentido do ensino tradicional da geometria foi o de apresentar um sistema de conhecimentos lógico- e estritamente relacionados e dedutíveis, a falta da clareza nos primeiros fundamentos sempre apresentou um dilema para os professores da matemática (1874, p. iv). Como tarefa do seu livro didático, o autor se propôs partir das mais simples condições na planimetria, de demonstrar no livro somente o que se pode verdadeiramente demonstrar, explicando que o que não se pode demonstrar deve ser legitimado pela experiência.

No resto do prefácio, o autor explicou aos seus colegas como ele entende e ensina os conceitos básicos: ponto, linha, plano e espaço – fazendo uma das escolhas tradicionais para tal introdução: partindo do ponto como elemento infinitamente pequeno do espaço e a linha como movimento de um ponto, etc.

De importância particular foi sua conceitualização da noção de direção, para a investigação de paralelas em particular, levando ao conceito de curvatura no caso de esferas e ao de grau de curvatura. Wagner apressou-se em afirmar aos seus colegas que ele não pretende ensinar o conceito de curvatura aos alunos daquela idade, mas que ele só o explicou no prefácio para não ser acusado de falta de entendimento. Wagner mencionou também que a noção de ângulo apresenta problemas ainda não resolvidos em sua definição.

⁸ Como se sabe, o sentido de “reine Anschauung” com Kant não dá bem para ser traduzido.

Os conteúdos do livro

A estrutura do livro é muito interessante e nunca encontrei uma análoga até agora - o livro tem duas partes:

- Geometria absoluta, com três seções, e
- Geometria euclidiana, com 5 seções.

As seções da geometria absoluta tratam da linha reta, do triângulo composto de linhas retas, e da soma dos ângulos no triângulo e as paralelas. As seções “euclidianas” tratam do quadrângulo, do círculo, dos polígonos (inscritos e circunscritos), da proporcionalidade, do cálculo do conteúdo das figuras planas. De certa maneira, esta estrutura corresponde mesmo à dos Elementos de Euclides, uma vez que Euclides não utiliza o axioma das paralelas no começo do primeiro livro; somente a partir da sua metade o axioma passa a ser utilizado.

Já na parte introdutória do livro encontra-se uma aplicação da abordagem empírica: visto o papel chave dos conceitos de congruência e de igualdade, ele os introduz como “Erfahrungssatz” – proposição legitimada pela experiência:

“todas as quantidades espaciais são independentes do lugar onde eles estão” (1874, p. 2).

Aqui Wagner desenvolve ainda uma definição da linha reta que se revela suficiente para a definição de direção, de ângulo e enfim de paralelas na geometria absoluta e na geometria euclidiana (1874, pp. 3-4 e passim).

A terceira seção é claramente aqui a de maior interesse. Nela, Wagner, expõe e demonstra todos os resultados obtidos desde o século XVIII quanto à soma dos ângulos num triângulo, incluindo em particular os resultados de Legendre. Ele adapta também o uso do infinitamente pequeno de Legendre, em “aplainando” um triângulo à uma reta – então em degenerando um triângulo em uma reta (ver a figura 1).

* § 73.

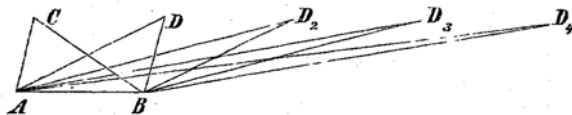
Lehrsatz: Jedes Dreieck läßt sich allmählich in ein anderes von gleicher Winkelsumme verwandeln, in welchem die Summe zweier Winkel beliebig klein ist.

Beweis: Um dies einzusehen, verwandle man (Fig. 35) $\triangle ACB$ zunächst in $\triangle ADB$, in welchem nach § 72:

$$\angle CAB = \angle DAB + \angle ADB.$$

Das so erhaltene Dreieck ADB behandle man wieder wie vorhin das Dreieck ACB . Man erhält alsdann ein Dreieck D_2AB (Fig. 36), in welchem $\angle D_2AB + \angle AD_2B$ nur noch so groß ist, wie $\angle DAB$.

Fig. 36.



Mit dem Dreieck D_2AB kann man wieder ebenso verfahren und erhält, wenn man dies Verfahren beliebig oft wiederholt, eine Reihe von Dreiecken, in denen die Summe zweier Winkel beständig kleiner und kleiner wird. Nichts hindert, dies Verfahren bis ins Unbegrenzte fortgesetzt zu denken. So gelangt man schließlich zu Dreiecken, in welchen die Summe zweier Winkel kleiner ist, als jede noch so kleine Größe, so daß der dritte Winkel mit beliebiger Annäherung die ganze Winkelsumme des Dreiecks darstellt.

Figura 1. Transformando um triângulo em um outro com a mesma soma dos ângulos, mas em que a soma de dois ângulos fica “tão pequeno quanto quiser”.

Mais importante são os teoremas que enunciam que a soma dos ângulos de um triângulo não pode exceder a dois ângulos retos; que da soma de dois ângulos retos em *um* triângulo segue que a soma seria a mesma em *cada* triângulo; que a soma de cada triângulo é ou igual à dois retos ou a um valor menor (ver figura 2).

* § 75.

Zusatz: Die Summe der drei Winkel eines Dreiecks ist entweder gleich zwei Rechten oder kleiner als zwei Rechte.

Figura 2. Resumindo as proposições sobre a soma dos ângulos num triângulo.

Segue uma discussão bem argumentada e apresentada sobre as características das paralelas e os diferentes casos de existências de somente uma paralela por um ponto numa linha vertical à uma linha reta ou de várias paralelas.

As definições e as explicações e os teoremas são bem explícitos e discutidos, considerando o nível dos alunos. Na apresentação oral vamos mostrar o tipo do texto e as figuras que motivam e explicam o texto. Vou colocar em discussão sua adaptação para alunos da época e de hoje (e para os professores).

Conclusão

Há vários elementos e questões que precisam ser mais investigados. Este artigo deixa, assim, várias questões de pesquisa em aberto. Precisamos saber mais sobre a própria prática de ensino do professor Wagner. Ele conseguiu ensinar esta geometria “modernizada” utilizando o seu livro didático? Ele foi capaz convencer seus colegas de o utilizar também? Qual foi a repercussão, se houve alguma, de sua iniciativa na comunidade de matemáticos? Wagner não podia responder com o seu manual ao programa de Erlangen de Felix Klein: nos primeiros anos após 1872, o conceito unificador deste programa, baseado no conceito dos grupos, para todas as geometrias foi pouco conhecido. Mas vale saber se Wagner entrou em contato com o novo nível de conceitualização da geometria defendido por Klein, e como ele reagiu.

Bibliografia e referências

- Belhoste, B. (1998). Pour une réévaluation du rôle de l'enseignement dans l'histoire des mathématiques, *Revue d'histoire des mathématiques*, 4: 289-304.
- Frischauf, Johannes (1872). *Absolute Geometrie nach Johann Bolyai*. Leipzig: Teubner.
- Gauß, C. F. (1816 [1873]). [Resenha de:] Vollständige Theorie der Parallellinien. Nebst einem Anhang in welchem der erste Grundsatz zur Technik der geraden Linie angegeben wird. Herausgegeben von Matthias Metternich, Doctor der Philosophie, Professor der Mathematik, [...] Mainz 1815. In: *Göttingische gelehrte Anzeigen*, 1816, 364-368. Reimpressão em: Gauß, Werke, Band IV.
- Gray, J. (1994). Euclidean and non-euclidean geometry. In Grattan-Guinness, I. (Org.), *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences*, Volume 2, pp. 877-886. London and New York: Routledge.
- Richards, J. (1988). *Mathematical visions. The pursuit of geometry in Victorian England*. Boston:

Academic Press.

- Schubring, G. (1998). "Desenvolvimento histórico do conceito e do processo de aprendizagem, a partir de recentes concepções matemático-didáticas (erro, obstáculos, transposição)", *Zetetiké*, 6, no. 10, 9-34. [Original alemão publicado em ZDM, 1988]
- Schubring, G. (2001). "Production Mathématique, Enseignement et Communication. Remarques sur la note de Bruno Belhoste, "Pour une réévaluation du rôle de l'enseignement dans l'histoire des mathématiques" parue dans la RHM 4(1998), p. 289-304", *Revue d'histoire des mathématiques*, 7: 295-305.
- Toth, I. (1982). Gott und Geometrie. Eine viktorianische Kontroverse. In Henrich, D. (Org.), *Evolutionstheorie und ihre Evolution* (pp. 141-204). Regensburg: Universität Regensburg.
- Toth, I. (1984). Three errors in the Grundlagen of 1884: Gottlob Frege and Non-Euclidian Geometry. *Proceedings of the 2nd Frege Conference* September 1984, Schwerin.
- Wagner, Hermann (1874). *Lehrbuch der Ebenen Geometrie. Nach Grundsätzen Bolyais für Gymnasien und Realschulen bearbeitet*. Hamburg: Lucas Gräfe.