



Comprensión del concepto de elipse como lugar geométrico

Zaida Margot **Santa** Ramírez

Facultad de Educación, Universidad de Antioquia

Colombia

zsanta@ayura.udea.edu.co

Carlos Mario **Jaramillo** López

Departamento de Matemáticas, Universidad de Antioquia

Colombia

cama@matematicas.udea.edu.co

Resumen

El presente artículo es el producto de una investigación, en la que se analizó, mediante un estudio de casos cualitativo, el proceso de comprensión del concepto de elipse como lugar geométrico, de cinco estudiantes del grado décimo de una Institución Educativa de la ciudad de Medellín. El estudio se enmarcó en el modelo educativo de Van Hiele y el mecanismo utilizado, fue la geometría del doblado de papel. Por lo tanto, la propuesta articula el modelo teórico, la temática (concepto de elipse) y el doblado, contribuyendo con el progreso del nivel de razonamiento de los estudiantes y con la superación de ciertas crisis existentes en los procesos educativos en el campo de las matemáticas.

Palabras clave: comprensión, concepto de elipse, lugar geométrico, modelo de Van Hiele, geometría del doblado de papel.

1. Dificultades en la comprensión del concepto de elipse como lugar geométrico.

Desde nuestra experiencia docente a nivel universitario, observamos que algunos estudiantes de los primeros semestres tienen habilidades algorítmicas para determinar las ecuaciones algebraicas de las secciones cónicas, pero no razonan sobre el concepto como lugar geométrico, propio de cada una de estas. Incluso, otros estudiantes ni siquiera reconocen las

ecuaciones ni los conceptos correspondientes. Al respecto, Cruz y Mariño (1999) afirman que: “dentro del estudio de la geometría analítica, se han presentado dificultades en la comprensión de los contenidos relativos a las secciones cónicas” (p. 15). Y argumentan, además, que:

“en los trabajos sobre educación matemática para los alumnos que ingresan a la educación superior, se ha constatado que los conocimientos de los estudiantes se limitan al aprendizaje de memoria de las ecuaciones que caracterizan a cada una de las cónicas, a la identificación de sus elementos y a su búsqueda algorítmica empleando fórmulas, sin demostrar haber interiorizado la relación existente entre los diferentes parámetros que intervienen en las ecuaciones de las cónicas y su representación gráfica ni el por qué de su definición como lugar geométrico, lo cual limita la comprensión del alcance de las posibilidades de que disponen” (p. 15).

De acuerdo con las ideas anteriores, una de las grandes dificultades que se presenta en el aprendizaje de las matemáticas y en particular de la geometría, es la desarticulación entre conceptos y procedimientos, como se detectó en el caso de las secciones cónicas. En este sentido, muchos estudiantes, de la interfase bachillerato – universidad, tienen dificultades para comprender los conceptos de las secciones cónicas como lugares geométricos, mientras que se les facilita la búsqueda algorítmica de sus ecuaciones. Además, no abundan trabajos que den cuenta de la comprensión de los estudiantes de dicha temática a partir del doblado de papel. Luego, nuestro trabajo de investigación pretendió responder a la pregunta de investigación ¿cómo comprenden los estudiantes el concepto de elipse como lugar geométrico mediante la geometría del doblado de papel, en el contexto del modelo educativo de Van Hiele? Por esta razón, nuestro objeto de estudio es, precisamente, la comprensión del concepto de elipse mediante el doblado de papel, e incluso, la comprensión de los conceptos estrechamente relacionados con este para poder lograr nuestro propósito.

Conforme a la pregunta y al objeto, nuestra investigación, mediante un estudio de casos cualitativo, se ocupó de analizar la comprensión del concepto de elipse como lugar geométrico, en estudiantes de los últimos grados de secundaria, con la geometría del doblado de papel, en el marco del modelo educativo de Van Hiele.

Basados en la experiencia docente y en la articulación entre el modelo teórico y la temática particular (concepto de elipse), surgieron unos descriptores hipotéticos de los niveles de razonamiento de Van Hiele; a su vez, en correspondencia con estos descriptores, se construyó un guión de entrevista hipotético de carácter socrático con preguntas basadas en la visualización de construcciones elaboradas mediante el doblado de papel. La entrevista con cada uno de los estudiantes, se hizo con el fin de analizar su nivel de razonamiento y refinar tanto el guión entrevista como los descriptores. Por lo tanto, de las interacciones con las participantes, las cuales se reflejaron en sus comentarios, intereses, necesidades, preguntas, escritos, entre otros, se establecieron como tal los descriptores de nivel y el guión de entrevista correspondiente, que permitió finalmente, caracterizar el nivel en el que está razonando un estudiante determinado. Este guión de entrevista refinado y estructurado, de carácter socrático, el cual es una propuesta metodológica de aprendizaje, se constituyó a su vez en una experiencia de aprendizaje para el estudiante, permitiéndole avanzar en su nivel de razonamiento en la conceptualización objeto de estudio.

2. El Modelo de Van Hiele

Generalidades del modelo.

El Modelo de Van Hiele es un modelo de enseñanza de la geometría euclidiana. Fue creado en Holanda por los esposos Dina Van Hiele-Geldof y Pierre Marie Van Hiele, profesores de matemática, quienes se encontraron con el problema de que muchos de sus estudiantes no poseían el nivel de razonamiento adecuado a la hora de abordar un problema geométrico con sus correspondientes conceptos.

De acuerdo con Jaime & Gutiérrez (1990) el modelo, tal como se conoce actualmente, puede enunciarse de la siguiente manera:

- “(1) Se pueden encontrar varios niveles diferentes de perfección en el razonamiento de los estudiantes de matemáticas;
- (2) Un estudiante sólo podrá comprender realmente aquellas partes de las matemáticas que el profesor le presente de manera adecuada a su nivel de razonamiento;
- (3) Si una relación matemática no puede ser expresada en el nivel actual de razonamiento, será necesario esperar a que éstos alcancen un nivel de razonamiento superior para presentársela;
- (4) No se puede enseñar a una persona a razonar de una determinada forma. Pero sí se le puede ayudar, mediante una enseñanza adecuada de las matemáticas, a que llegue lo antes posible a razonar de esta forma” (p. 305).

El modelo no sólo brinda una descripción del proceso de enseñanza y aprendizaje de la Geometría, sino que muestra una relación entre ambos procesos. Por eso, este modelo está compuesto por tres aspectos fundamentales: la percepción o *Insight*, los niveles de razonamiento y las fases de aprendizaje.

Autores como Jaramillo, Monsalve y Esteban (2005), sustentan que:

“La percepción se logra cuando una persona es capaz de actuar en una situación no familiar; ejecuta de forma competente (correcta y adecuadamente) las acciones requeridas por la situación y emplea intencional (deliberada y conscientemente) un método que resuelve la situación. Se logra la percepción cuando los estudiantes comprenden lo que hacen, por qué lo hacen y cuándo lo hacen; además, pueden aplicar su conocimiento a la resolución de nuevos problemas no rutinarios”. (p. 2)

El segundo aspecto del modelo, los niveles de razonamiento, es de tipo descriptivo, puesto que identifica una estratificación del razonamiento humano en niveles jerarquizados, a través de los cuales “progresan la capacidad de razonamiento matemático de los individuos desde que inician su aprendizaje hasta que llegan a su máximo grado de desarrollo intelectual en este campo” (Jaime & Gutiérrez, 1990, p. 305).

El tercer aspecto del modelo, las fases de aprendizaje, es de tipo prescriptivo, porque brinda una serie de directrices a los profesores para que puedan ayudarle a sus estudiantes a pasar de un nivel de razonamiento al inmediatamente siguiente.

Niveles de razonamiento.

Como nuestro trabajo de investigación se centró en la caracterización de los niveles de razonamiento de Van Hiele para el concepto de elipse como lugar geométrico, a continuación se presenta una breve descripción de los niveles de Van Hiele.

Nivel I: De reconocimiento visual.

- El estudiante reconoce las figuras por su apariencia general, es decir, describe los objetos en su forma física: el color, la forma, el tamaño.
- Reconoce la figuras geométricas como un todo. Se le dificulta encontrar partes constitutivas de los objetos o encontrar propiedades matemáticas que los caracterizan.
- Percibe que las figuras son “objetos individuales” (Jurado & Londoño, 2005, p. 9) y se le dificulta abstraer propiedades para relacionarlas con las propiedades de figuras del mismo tipo.
- El estudiante hace descripciones basadas en semejanzas con otros objetos que le son cotidianos.

Nivel II: De análisis.

- El estudiante es capaz de determinar las partes constitutivas de las figuras.
- Es capaz de encontrar algunas propiedades matemáticas de las figuras, pero todavía no cuenta con las capacidades suficientes para relacionar unas propiedades con otras, o hacer clasificaciones correctas.
- Puede extraer otras propiedades por la observación de las partes constitutivas, e incluso puede hacer algunas generalizaciones de propiedades a figuras de la misma clase.
- La deducción de las propiedades y la generalización, se hace de manera informal con base en la experiencia y la manipulación.

Nivel III: De Clasificación.

- El estudiante es capaz de relacionar unas propiedades con otras; de hecho puede establecer que unas propiedades se deducen de otras y es capaz de hacer clasificaciones lógicas correctas.
- En este nivel, el estudiante empieza a comprender la estructura axiomática de las matemáticas, es capaz de seguir demostraciones, pero todavía se le dificulta hacerlas sin una correspondiente ayuda. Aún no tiene la necesidad del rigor y sus argumentaciones se basan en la experiencia.
- Es capaz de establecer la definición de un concepto geométrico de manera formal.

Nivel IV: De deducción formal.

- El estudiante en este nivel, logra comprender la estructura axiomática de las matemáticas.
- Es capaz de realizar demostraciones formales sin ninguna ayuda.
- Conoce y aplica las propiedades de un sistema deductivo como la consistencia, la independencia y la completitud (Jaramillo, 2000).
- Puede llegar a las mismas conclusiones partiendo de diferentes premisas.
- Utiliza un vocabulario especializado, propio del rigor matemático.

Pertinencia del modelo en el trabajo de investigación.

La comprensión del concepto de elipse como lugar geométrico, se puede lograr con base en el modelo educativo de Van Hiele, no sólo porque es un modelo diseñado inicialmente para la

geometría, sino por su carácter visual geométrico que facilita la comprensión de definiciones formales a partir del reconocimiento visual, el análisis y la clasificación. Además,

“el doblado de papel le da sentido a expresiones matemáticas como las identidades algebraicas; hace más entendible el significado matemático a partir de la manipulación de objetos concretos; es una estrategia de visualización geométrica que enriquece el Nivel 0 de razonamiento. En este nivel, el alumno juzga el mosaico por su apariencia y no alcanza a detectar las propiedades matemáticas de las figuras geométricas, porque carece de la experiencia necesaria para describir las construcciones e implicaciones geométricas inherentes a las figuras” (Jaramillo, Monsalve & Esteban, 2005, p. 3).

Incluso, el doblado de papel es una herramienta útil y funcional que brinda la posibilidad al sujeto de interactuar con una hoja de papel para visualizar conceptos y facilitar así el aprendizaje de la geometría. Se relaciona con el modelo porque es una estrategia de visualización geométrica que enriquece el nivel I de razonamiento y al mismo tiempo contribuye con una componente de tipo experimental (Jaramillo y Esteban, 2006). De hecho, autores como Jaramillo, Monsalve y Esteban (2005) afirman que:

“el doblado de papel puede transformar las estructuras geométricas que el alumno posee, en otras nuevas y más complejas que le posibilitan avanzar en su Nivel de razonamiento. Estas estructuras se representan como una “red de relaciones”; según Van Hiele, el paso de un nivel a otro se produce mediante la creación de una nueva red de relaciones obtenida al incorporar a la anterior, nuevos conceptos y nuevas relaciones. La importancia del doblado radica en suministrarle al alumno nuevos métodos y herramientas de razonamiento, mientras estudia los elementos de la geometría presentes en el mosaico de pliegues y así puede extender su estructura visual geométrica, a partir de la comprensión de un patrón básico”. (Jaramillo, Monsalve & Esteban, sf, p. 3)

3. El estudio

Esta investigación estuvo orientada bajo una metodología de corte cualitativo. Las actividades que surgieron de esta, fueron relativas y dependieron del contexto del cual se extrajeron los datos, pues el guión de entrevista final y los descriptores finales de los niveles de razonamiento surgieron de observaciones, de los materiales de los estudiantes y de las entrevistas individuales y grupales con ellos. Las entrevistas individuales, en particular, sirvieron para analizar su proceso de comprensión de acuerdo con los descriptores de los niveles de razonamiento de Van Hiele, en relación con el concepto de elipse como lugar geométrico, utilizando la geometría del doblado de papel.

En este sentido, se consideró fundamental el aspecto subjetivo de la realidad de los estudiantes. Por lo tanto, la información que se recolectó fue en forma de textos (encuestas), imágenes (material de los estudiantes), observaciones, entrevistas, análisis documentales (material de los estudiantes), entre otros.

De acuerdo al paradigma cualitativo, el tipo de estudio que abordó esta investigación era un “estudio de casos” múltiple (Hernández, Fernández y Baptista, 2006) de estudiantes de cierta Institución Educativa de la ciudad de Medellín, que estaban próximos a abordar la temática relacionada con las secciones cónicas.

Las razones por las cuales se optó por un estudio de casos, son las siguientes:

Según Chetty (1996, citado por Martínez, 2006), permite estudiar un tema determinado (el concepto de elipse como lugar geométrico) donde la teoría existente (Modelo de Van Hiele) no

aplica todavía. Además, permite estudiar el fenómeno desde muchas perspectivas (razonamiento en la comprensión del concepto de elipse como lugar geométrico) y no desde una sola variable.

Según Yin (1989, citado por Martínez, 2006), se utilizan varias fuentes de datos como las observaciones, las entrevistas, las encuestas y el análisis de textos bibliográficos. De hecho, según este autor, se puede estudiar tanto un caso único como múltiples casos. En esta investigación se estudiaron cinco casos.

Con base en Eisenhardt (1989, citado por Martínez, 2006), los participantes se eligen de una manera teórica, esto es, “el objetivo de la muestra teórica es elegir casos que probablemente pueden replicar o extender la teoría emergente...” (p. 19). En este sentido, se eligieron cinco estudiantes, cuyos seudónimos fueron: Rosi, Leti, Laura, Jhon y Carlos, del grado décimo de una Institución Educativa de la ciudad de Medellín, que estuvieran próximos a estudiar el tema de secciones cónicas y que manifestaran gusto por el doblado de papel y tuvieran algunos conceptos previos sobre geometría euclidiana.

Además de tratar de encontrar patrones entre los diferentes casos, también se pretendió profundizar en el plano individual, al analizar el proceso de comprensión del concepto de elipse como lugar geométrico de cada estudiante. (Hernández, Fernández y Baptista, 2006)

Al analizar varios casos, los primeros van a funcionar como “casos pilotos” para refinar las actividades propuestas y los descriptores hipotéticos de nivel. Es decir, el proceso de confrontación en el trabajo de campo, permite refinar las actividades del guión de entrevista de carácter socrático.

Por lo tanto, nuestra investigación se centró en el análisis del proceso de comprensión de cinco estudiantes, del concepto específico de elipse como lugar geométrico. Estos estudiantes, que fueron invitados para hacer parte de la investigación, se seleccionaron porque demostraron habilidades especiales para el doblado de papel. El análisis individual de la comprensión se hizo triangulando tres fuentes principales de información: encuesta, entrevista y material del estudiante. Nuestras primeras entrevistas nos permitieron refinar el guión de entrevista y a su vez, los descriptores de nivel. Posteriormente, se hizo una triangulación del análisis de los cinco casos, con el marco teórico y las observaciones del investigador, para tratar de encontrar patrones en los diferentes casos.

Estrategias para analizar la información.

El análisis de la información, se hizo de la siguiente manera:

- Transcripción, lectura y análisis de la observación de la actividad inicial que se realizó con el grupo décimo y que tenía como único objetivo elegir a los estudiantes del estudio de casos.
- Revisión del material de los estudiantes que surgió de las dos entrevistas grupales que se realizaron para garantizar algunos conceptos básicos indispensables para la comprensión del concepto de elipse como lugar geométrico.
- Transcripción, lectura, análisis e interpretación de las entrevistas individuales de manera independiente y a la par con la recolección de la información. Cada caso es analizado antes de tomar otro, con el fin de refinar las actividades y de contrastar los descriptores hipotéticos con el proceso de razonamiento del estudiante. Las categorías que emergen de dicho proceso de razonamiento son comparadas con los descriptores hipotéticos

establecidos antes de la recolección de información. Al finalizar, se lograron dos productos de gran importancia para la investigación: un guión de entrevista de carácter socrático con preguntas basadas en la visualización de algunas construcciones hechas mediante el doblado de papel y los descriptores de cada uno de los niveles de razonamiento.

En particular, el guión de entrevista pasó por un exhaustivo proceso de refinamiento. Se hicieron varios pilotajes de la misma y se pidió asesoría a varios profesores expertos en el tema. Incluso, el desarrollo de algunos talleres con maestros y/o estudiantes en el marco de encuentros regionales y nacionales (X Encuentro de Enseñanza de las Ciencias y las Matemáticas, Medellín, 2010; II Congreso Internacional de Formación y Modelación en Ciencias Básicas, Medellín, 2010; ASOCOLME, Pasto, 2009) nos permitió modificar el guión y al mismo tiempo, los descriptores de nivel.

El proceso de transcripción de las entrevistas individuales fue arduo, dado que cada una de estas tuvo una duración de 50 minutos aproximadamente. Sin embargo, era necesario realizarlo para poder analizar la comprensión del concepto de elipse, de cada uno de los estudiantes.

- Análisis de casos de manera conjunta para extraer conclusiones generales y poder establecer cómo comprenden los estudiantes el concepto de elipse como lugar geométrico, mediante la geometría del doblado de papel, en el contexto del modelo educativo de Van Hiele.

4. Comprensión del concepto de elipse de acuerdo con el modelo de Van Hiele.

El aspecto socrático del guión y su articulación con los descriptores de nivel, permitieron caracterizar el razonamiento de los estudiantes. La estructura de las preguntas inquisidoras está articulada a la red de relaciones que un estudiante debe lograr al final de la entrevista, alrededor del concepto de elipse como lugar geométrico, con base en la visualización de construcciones hechas mediante el doblado de papel.

El mecanismo utilizado en la entrevista para que el estudiante llegue a la comprensión del concepto elipse como lugar geométrico, es a través de la comprensión primero de la mediatriz y, segundo, de la circunferencia como lugares geométricos. Es importante resaltar la red de relaciones que se construye alrededor, con conceptos como mediatriz, lugar geométrico, equidistancia, circunferencia, entre otros.

A continuación presentamos los descriptores de nivel que surgieron de todo el trabajo de campo desarrollado y, los cuales, nos permitieron caracterizar de manera adecuada cada uno de los niveles de razonamiento sobre la comprensión del concepto de elipse como lugar geométrico.

Nivel 0: Predescriptivo

- 0.1 Reconoce el axioma básico de la geometría euclidiana: “Por dos puntos pasa una única recta”.
- 0.2 Reconoce algunas nociones básicas de geometría euclidiana, tales como: punto, recta, segmento, distancia, perpendicular, entre otras.
- 0.3 El estudiante relaciona un doblado con un segmento de línea recta. Utilizando la geometría del doblado, el estudiante:

- 0.4 Reconoce la congruencia de segmentos.
- 0.5 Construye rectas perpendiculares.
- 0.6 Visualiza la suma de segmentos.

Descriptor de separación:

Se le dificulta construir la mediatriz de un segmento mediante la geometría del doblado.

Nivel I: Reconocimiento visual

En este nivel el estudiante utiliza la geometría del doblado de papel para construir la mediatriz, la circunferencia y la elipse.

Mediante la geometría del doblado, el estudiante:

- 1.1 Realiza la construcción de la mediatriz de un segmento.
- 1.2 Realiza la construcción de una circunferencia.
- 1.3 Realiza la construcción de una elipse.
- 1.4 Reconoce que el lugar geométrico construido mediante el doblado de papel es la elipse, sin mencionar las propiedades que la caracterizan.
- 1.5 Describe la figura construida en la hoja de papel como un todo, pero se le dificulta señalar las partes constitutivas fundamentales tales como: una mediatriz, una tangente, dos puntos fijos, entre otros.

Descriptores de separación:

Al estudiante se le dificulta establecer las condiciones que debe cumplir un conjunto de puntos para pertenecer a la mediatriz o a la circunferencia.

Finalizado el proceso de construcción de la elipse, el estudiante se le dificulta percibir los elementos fundamentales propios que la caracterizan.

Nivel II: De análisis.

En este nivel, el estudiante reconoce la mediatriz y la circunferencia como lugares geométricos y, con base en estos, identifica los elementos propios de la elipse.

- 2.1 Afirma que siempre que se lleve un punto sobre otro punto en una hoja de papel, se está construyendo la mediatriz del segmento determinado por dichos puntos.
- 2.2 Establece que cualquier punto que pertenece a la mediatriz de un segmento, equidista de sus extremos.
- 2.3 Afirma que los puntos de una circunferencia equidistan de un punto fijo llamado centro.
- 2.4 Establece que siempre que se hagan dobleces que surgen de llevar puntos de una circunferencia sobre su centro, se genera un conjunto de mediatrices las cuales envuelven a su vez otra circunferencia interior (concéntrica).
- 2.5 Asevera con seguridad que tanto la mediatriz como la circunferencia son lugares geométricos.
- 2.6 Determina que la elipse está formada por el conjunto de mediatrices construido y por dos puntos interiores fijos, uno de los cuales es el centro de la circunferencia.
- 2.7 Afirma que siempre que se hagan dobleces que surgen de llevar puntos de una circunferencia sobre un punto interior de esta (distinto del centro) se genera una elipse.

Descriptor de separación:

Se le dificulta emplear el hecho de la mediatriz como lugar geométrico, para establecer que la suma de dos segmentos determinados es el radio de la circunferencia inicial.

Nivel III: De clasificación.

En este nivel, el estudiante determina la condición que debe cumplir un conjunto de puntos para pertenecer a la elipse, además, es capaz de llegar a una definición de la misma como lugar geométrico.

3.1 En la construcción de la elipse, utiliza el hecho de la mediatriz como lugar geométrico, para establecer que la suma de dos segmentos determinados es el radio de la circunferencia.

3.2 Establece, mediante el hecho de la mediatriz, que un punto pertenece a la elipse si la suma de sus distancias a los dos puntos fijos es el radio de la circunferencia inicial.

3.3 Manifiesta la necesidad de definir de manera formal la elipse como lugar geométrico: la elipse es el conjunto de puntos tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos, es una constante.

Es importante aclarar que nuestro trabajo no pretendió enunciar los descriptores del nivel IV de razonamiento, pues el mismo Van Hiele establece que es difícil de detectar y que se considera de carácter teórico.

5. Discusión y conclusiones.

Se diseñó, se evaluó y se refinó un guión de entrevista de carácter socrático con preguntas inquisitivas que se basaban en la visualización de construcciones hechas mediante el doblado de papel. El paso del estudiante por la entrevista, se convirtió en una experiencia de aprendizaje, pues corroboramos que todos los estudiantes pudieron avanzar en su nivel de razonamiento. Además, el guión nos permitió caracterizar y analizar el proceso de comprensión de cada uno de nuestros estudiantes del estudio de casos. Cuatro de ellos quedaron en el nivel III y uno, en el nivel II.

En el proceso que llevamos a cabo para dar consecución al objetivo general, diseñamos, evaluamos y refinamos unos descriptores de los niveles de razonamiento de Van Hiele para la comprensión del concepto de elipse como lugar geométrico, mediante el doblado de papel. Estos descriptores se plantearon inicialmente como hipotéticos, pero se fueron refinando a medida que se desarrollaba el trabajo de campo. Finalmente, pudimos corroborar que con estos descriptores sí se caracterizó el proceso de comprensión del concepto objeto de estudio, de los cinco estudiantes, porque se refinaron en el contexto particular gracias a la interacción entre estudiante y entrevistador.

De acuerdo con Van Hiele, se tuvo presente la forma cómo se expresaban los estudiantes, sus gestos, su lenguaje, su vocabulario, en las respuestas de la encuesta, en sus materiales y en la entrevista individual de carácter socrático. Esto nos ayudó notablemente a analizar su comprensión. La idea siempre fue, que por medio de preguntas y diálogos inquisitivos, exhibieran su proceso de comprensión y nos permitieran, de acuerdo con nuestros descriptores, caracterizar dichos procesos de manera individual.

Las situaciones que les planteamos a los estudiantes en el guión de entrevista, fueron basadas en la visualización de construcciones hechas mediante el doblado de papel, es decir, el razonamiento de los estudiantes se basaba en la componente visual – geométrica que brinda la geometría del doblado de papel. Estas situaciones fueron nuevas para los estudiantes y con base

en ciertos aportes de información, lograron llegar a conclusiones realmente sorprendentes (como llegar al hecho de que tanto la mediatriz como la circunferencia eran lugares geométricos), que finalmente les permitieron comprender el concepto de elipse como lugar geométrico.

Aportes a la Educación Matemática.

El concepto de elipse es de gran importancia para la física y la matemática, pues en el caso de la primera, los planetas giran en órbitas elípticas, alrededor de un sol ubicado en uno de los focos, y en el caso de la segunda, por sus aplicaciones en el cálculo y la geometría. Por eso, nuestro trabajo enfatizó en la comprensión del concepto de elipse como lugar geométrico, mediante la geometría del doblado de papel. Sin embargo, es importante tener en cuenta que para la mayoría de estudiantes, suele ser muy fácil comprender el concepto de elipse a través del dibujo de su contorno con un lápiz, utilizando una cuerda amarrada con dos clavos. Teniendo en cuenta lo anterior, nuestro trabajo es novedoso, porque no sólo se logra la comprensión del concepto de elipse como lugar geométrico, sino que se logra también la comprensión de conceptos como mediatriz y circunferencia como lugares geométricos, el mismo concepto de lugar geométrico se aborda en nuestra entrevista y el concepto de equidistancia.

Son muchos los conceptos, propiedades y relaciones de la geometría euclidiana que se logran mediante la geometría del doblado de papel y que están inmersos en nuestra entrevista: por un punto pasan infinitas rectas e infinitos dobles; por dos puntos pasa una sola recta o un solo doblez; relación doblez segmento de recta; segmentos congruentes mediante el doblado; construcción de rectas perpendiculares mediante el doblado; la visualización de suma de segmentos también mediante el doblado; las construcciones de la mediatriz, la circunferencia y la elipse mediante el doblado. De hecho, abordar las construcciones de la circunferencia o de la elipse, mediante el doblado de papel, como envolventes de mediatrices, es el primer paso para hablar de haz de tangentes y de cálculo infinitesimal. Por lo tanto, esta forma de abordar la elipse, trae muchos beneficios académicos para el estudiante.

Nuestro guión de entrevista de carácter socrático, es un aporte a la Educación Matemática, porque no sólo le permitió al estudiante avanzar en su nivel de razonamiento frente al concepto de elipse como lugar geométrico, sino que a nosotros como investigadores, nos permitió descubrir el nivel en el que estaba razonando.

En este estudio, hemos comprobado que los estudiantes logran la comprensión de muchos conceptos geométricos, mediante las construcciones que se pueden hacer de manera fácil y divertida, mediante el doblado de papel. Incluso, nuestro aporte a la Educación Matemática en este sentido, se centra en el establecimiento de los conceptos primitivos de la geometría del doblado de papel, la reformulación de su axiomática y su aplicación a las secciones cónicas, que logramos en el artículo “Aplicaciones de la geometría del doblado de papel a las secciones cónicas” (Santa & Jaramillo, 2010).

En otras palabras, pudimos comprobar, que el doblado de papel enriquece el modelo educativo de Van Hiele, a causa de la componente visual – geométrica de sus construcciones, que permite en un primer momento, el reconocimiento visual, y en un segundo momento, el establecimiento de propiedades y la asociación de las mismas. Además, le aporta una componente de tipo experimental, pues el estudiante puede realizar y visualizar sus propias construcciones, y con base en ellas, llegar a la comprensión de un concepto.

6. Bibliografía

- Cruz, L., & Mariño, M. (1999). Sistema computarizado para la enseñanza de las secciones cónicas. *Revista Educación*, 97, 14 – 21.
- Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2006). Metodología de la Investigación. México: McGraw Hill.
- Jaime, A & Gutiérrez, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la Geometría: El Modelo de Van Hiele. En: S, Llenares, M.V. Sánchez (eds), *Teoría y Práctica en Educación Matemática*. España: Alfar, p. 295 – 384.
- Jaramillo, C. (2000). La noción de serie convergente desde la óptica de los niveles de Van Hiele. Tesis doctoral. España: Universidad Politécnica de Valencia.
- Jaramillo, C., & Esteban, P. (2006). Enseñanza y aprendizaje de las estructuras matemáticas a partir del modelo de Van Hiele. *Revista Educación y Pedagogía*, vol XVIII, 109 - 118.
- Jaramillo, C., Monsalve, O., & Esteban, P. (2005) “El Modelo de Van Hiele y el Doblado de Papel”. Documento sin editar.
- Jurado, F. & Londoño, R. (2005). “Diseño de una entrevista socrática para el concepto de suma de una serie vía áreas de figuras planas”. Trabajo de investigación para optar al título de Magíster de Docencia de las Matemáticas. Universidad de Antioquia, Medellín.
- Martínez, P. (2006). El método de estudio de caso. Estrategia metodológica de la investigación científica. En: *Pensamiento y Gestión* # 20. Universidad del Norte. p. 165 – 193.
- Santa Ramírez, Z. M. & Jaramillo López, C. M. (2010, septiembre-diciembre). Aplicaciones de la geometría del doblado de papel a las secciones cónicas. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, (31). Recuperado de: http://revistavirtual.ucn.edu.co/index.php?option=com_content&task=view&id=169&Itemid=1