



## Aprendizagem de conceitos da álgebra linear

Ana Luísa Carvalho **Furtado**

Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca

Brasil

[analuisacf@gmail.com](mailto:analuisacf@gmail.com)

Marco Aurélio Palumbo **Cabral**

Universidade Federal do Rio de Janeiro

Brasil

[mcabral@labma.ufrj.br](mailto:mcabral@labma.ufrj.br)

### Resumo

Neste trabalho, investigamos como os alunos no segundo período de Faculdade compreendem os conceitos abstratos abordados na disciplina Álgebra Linear II, focando no tópico Transformação Linear. Estes conceitos serão estudados a partir da teoria de proceito, fundamentada por Gray e Tall, em seus trabalhos publicados em 1991 e 1994, refletindo sobre a flexibilidade entre conceito, processo e procedimento. Aplicamos um questionário para um grupo de alunos da Engenharia da UFRJ selecionados por nota em Matemática no Vestibular e em Cálculo. Observamos que este grupo, embora tenha obtido altas notas tanto no vestibular quanto em cálculo, possui sérias deficiências na formação de conceitos básicos da álgebra linear tais como espaço vetorial e transformação linear.

*Palavras chave:* ensino de matemática, álgebra linear, transformação linear, LACSG, proceito.

### Introdução

Observando os resultados negativos dos cursos de Álgebra Linear na Universidade Federal do Rio de Janeiro, da qual um dos autores é professor, e da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, da qual outro autor foi professor substituto em 2008, surgiu um grande interesse em investigar de que forma conceitos abstratos básicos da Álgebra Linear, como Transformação Linear e Espaços Vetoriais, eram assimilados pelos alunos.

Robert, Robinet e Rogalski destacam a importância da disciplina e de suas dificuldades intrínsecas:

(...) é fato que a Álgebra Linear constitui uma parte importante no conteúdo matemático que é usado no início da universidade, sendo vista como uma disciplina fundamental por quase todos os matemáticos e por muitos cientistas que a utilizam como ferramenta. Além disto, as dificuldades dos estudantes em Álgebra Linear parecem tão importantes e visíveis, quanto em análise. (Robert e Robinet(1989) e Rogalski(1990), apud Dorier (1998), p.193.)

Os alunos na UFRJ costumam cursar a disciplina Álgebra Linear II no segundo período, sendo que a maioria não pertence à faculdade de Matemática e sim, de Engenharia. Durante a vida escolar destes alunos, a matemática sempre lhes foi apresentada a partir de definições bem diretas (seno de um ângulo é a razão entre o tamanho do cateto oposto a este ângulo e a hipotenusa, binômio de Newton,...) e algoritmos (escalonamento, cálculo de MDC, MMC...). No curso de Álgebra Linear irão se deparar com definições enunciadas a partir de propriedades do próprio objeto em questão, o que gera possíveis obstáculos no aprendizado. Mas, isto não ocorre apenas com os alunos da Engenharia; os alunos da Licenciatura e do Bacharelado em Matemática passam pelo mesmo processo, sendo que ambos têm antes apenas uma disciplina que cause semelhante efeito, que é a própria Álgebra.

Hiebert e Carpenter (1992, apud Niss, 1999, p. 15) alertam para o risco de o aluno ficar focado em domínio de procedimentos e algoritmos e apreender somente alguns aspectos dos conceitos, aqueles ligados diretamente aos procedimentos.

Para investigar se e como certos conceitos abstratos da Álgebra Linear são assimilados pelos alunos, utilizaremos a noção de proceito apresentada por Gray e Tall, em seus trabalhos publicados em 1991 e 1994. Refletiremos brevemente sobre trabalhos americanos e franceses que também se preocupam especificamente com o ensino da Álgebra Linear.

A metodologia de pesquisa consistiu de um estudo empírico qualitativo feito em duas etapas: um questionário piloto, aplicado em 8 alunos e um questionário final, aplicado em 14 alunos, seguido de entrevistas semi-estruturadas. Os alunos do questionário piloto foram selecionados, de um universo de cerca de mil alunos que ingressaram no primeiro semestre de 2009 na Engenharia da UFRJ, a partir de suas notas de matemática no vestibular e em Cálculo I, que deveriam ser superiores a seis e oito, respectivamente. Os alunos do questionário final foram selecionados com o critério de terem obtido nota superior a 7 em Cálculo I. Optamos por utilizar a nota de Cálculo I, pois as provas são as mesmas para todos os alunos. Para se ter uma ideia do grau de seletividade deste critério, dos 472 alunos de Álgebra Linear II da Engenharia do segundo semestre de 2009, somente 43 possuíam nota maior que 6,0 em Cálculo. Destes, 14 foram responderam o questionário e foram entrevistados.

A análise do questionário mostra que há evidências de que há uma grande dificuldade por parte dos alunos de melhor desempenho em abstrair o proceito que lhe é ensinado. Tal fato nos sugere uma fraqueza no ensino da Álgebra Linear, não querendo dizer com isto que o ensino é ruim, mas que não é eficiente quanto à compreensão dos proceitos abstratos.

Mesmo este grupo selecionado de alunos não foi capaz de transitar livremente entre conceito-processo-procedimento, o que é caracterizado por Gray e Tall como flexibilidade.

Alguns exemplos de dificuldade é que apenas metade dos alunos citou a propriedade da linearidade ao definir Transformação linear, e a maioria não citou que seu domínio e contra-domínio são espaços vetoriais.

A maioria dos alunos achou, de forma equivocada, que a função real do 1º grau  $f(x) = 2x+3$  é uma transformação linear.

Nas entrevistas, dos 14 alunos, 9 apontaram explicitamente a abstração presente no curso de Álgebra Linear como a maior dificuldade da disciplina. Outros 4 alunos citaram a falta de aplicação como um dificultador. Apenas 4 alunos preferiram o curso de Álgebra Linear ao de Cálculo I. Estes 4 alunos preferiram o curso de Álgebra Linear justamente porque gostaram do curso mais abstrato e teórico.

Dubinsky afirma que

não há, porém, um grupo de pesquisa que forneça evidências que convençam a um cético da escassez de sucesso nos cursos de Álgebra Linear. Ao contrário de Cálculo e outros tópicos, nós não temos dados sobre uma relação de fracasso ou desgaste, análises de questões e resultado de exames, ou documentação de reclamações vindas da faculdade de quem leciona para os cursos em que Álgebra Linear é pré-requisito. (Dubinsky, 1997, p. 86)

Esperamos com este trabalho acrescentar evidências das dificuldades no ensino de conceitos básicos da Álgebra Linear.

### Ensino da Álgebra Linear

Os trabalhos de maior destaque no estudo do ensino da Álgebra Linear se encontram na França e nos Estados Unidos e começaram a ser produzidos nos anos 80. Na França, um grupo de pesquisadores escreveu diversos artigos, que se tornaram um livro: *L'Enseignement de L'Algèbre Linéaire en Question*, coordenado por Dorier. Já nos estados Unidos, houve um grande movimento de revisão do currículo de Álgebra Linear, o LACSG, liderado por David Carlson. O trabalho do LACSG sofreu críticas de Dubinsky.

Em 1990, por iniciativa da MAA (Mathematical Association of America), começou-se a formação do *Linear Algebra Curriculum Study Group* (LACSG), que como o nome sugere, pretendia repensar e reformular o currículo norte-americano nas Universidades de Álgebra Linear. O trabalho deste grupo envolveu muitos pesquisadores americanos, tanto em Matemática quanto em Educação Matemática. As principais questões levantadas pelo LACSG são: a grande dificuldade que os alunos têm com a Álgebra Linear e suas causas, e a recomendação que o curso seja orientado a partir de aplicações e operações com matrizes.

O LACSG conclui um primeiro curso de Álgebra Linear deve responder às necessidades dos alunos da engenharia, que quantitativamente representam a maioria dos alunos que cursam a disciplina. Este primeiro curso deve ser matriz-orientado e deve ser utilizar tecnologia (por exemplo, MATLAB ou software similar) neste primeiro curso. Ao menos um "segundo curso" em teoria matricial/álgebra linear deveria ser uma grande prioridade para todo currículo matemático.

Outra recomendação é se limitar ao  $\mathbb{R}^n$ . (Celestino, 2000, p. 42)

Dubinsky (1997) apresenta questionamentos e críticas ao LACSG. Ele mesmo afirma que seu objetivo não é substituir o LACSG, mas de "florir mais flores". Uma de suas críticas diz respeito à suposta imaturidade dos alunos em lidarem com conceitos abstratos logo no primeiro

(...) se os alunos são tão imaturos e o curso deveria ser dado depois, é apenas uma questão de esperar? Nós estamos preparados para afirmar que outro ano de curso irá significativamente desenvolver a sofisticação matemática dos graduandos? Os relatórios que nós estamos recebendo dos estudos nacionais sugerem o contrário. (Dubinsky, 1997, p.88)

Dubinsky afirma que é muito diferente a dificuldade com matriz da dificuldade com dependência linear, bases ou subespaço.

O livro *L'Enseignement de L'Algèbre Linéaire en Question* (1997) reúne diversos trabalhos de autores diferentes, tendo sido editado por Dorier. O trabalho destes autores começou no fim dos anos 80. Estudam como a Álgebra Linear é introduzida no primeiro ano de estudo na Universidade francesa, quando os alunos costumam ter entre 18 e 20 anos.

Na França, também é senso-comum entre os professores que lecionam Álgebra Linear que de fato há um obstáculo no aprendizado de assuntos como espaços vetoriais, base, transformação linear, autovalores e autovetores, enquanto que há muito mais facilidade em assimilar matriz e sistema de equações lineares, que são conteúdos mais operacionais.

Neste livro é apontado o paradoxo da Álgebra Linear, explicando que apesar da disciplina parecer a mais simples de todas as teorias da matemática, os problemas encontrados para ensiná-la são fora de proporção com suas dificuldades intrínsecas.

Uma causa disso é que as situações-problema existentes exigem conhecimento mais profundo de outras disciplinas, ou da própria Álgebra Linear, ou são muito elementares e podem ser resolvidos com a Geometria Analítica, por exemplo. Tal constatação contradiz a ideia de que sempre é possível facilitar o aprendizado de algum tema a partir do uso de suas aplicações.

Na França, o ensino da Álgebra Linear foi totalmente remodelado com a Reforma da Matemática Moderna na década de 60 e a teoria axiomática de espaço vetorial de dimensão finita era dada no primeiro ano da escola secundária (quando os alunos tinham cerca de 15 anos de idade). No livro de Dorier, este formalismo é considerado como sendo um genuíno obstáculo ao aprendizado da Álgebra Linear para sucessivas gerações, e os próprios alunos reconhecem isto. Os professores também estão sempre cientes disto, sendo que o diferencial desta pesquisa é que especifica a natureza das dificuldades encontradas.

A conclusão do trabalho de Dorier (1990) foi a de que as dificuldades dos alunos com os aspectos formais da teoria de Espaço Vetorial não é apenas um problema com o formalismo, mas provavelmente uma dificuldade em entender o específico uso do formalismo na teoria de Espaço Vetorial, e a interpretação dos conceitos formais em relação aos contextos mais intuitivos como geometria ou sistema de equação linear, em que eles historicamente emergiram.

Foi feito um estudo no fim de 1987 para determinar o conhecimento e as ideias dos alunos em Álgebra Linear depois de terem tido o curso, em que estudaram espaço e subespaço vetorial, transformação linear, sistema de equação linear, matriz e determinante. Nesta pesquisa 379 alunos de programas de ciências (matemática e física) de três universidades (Paris 7, Lille e Paris 6) responderam a um questionário no 2º ano de Universidade, isso antes que comesçassem qualquer nova instrução em Álgebra Linear. De um modo geral, o resultado do questionário não é muito animador. Aproveitamos duas questões em nosso trabalho empírico.

Os pontos mais citados pelos alunos franceses como dificuldades no Ensino de Álgebra Linear foram: Abstração (40%), dificuldades numa noção particular, muitas novas definições e teoremas para entender e aprender, cálculos e dificuldades atribuídas aos professores.

Algumas conclusões desta pesquisa foram que menos de 40% dos alunos sabem como manipular noções de imagem e núcleo das Transformações Lineares e menos de  $\frac{1}{3}$  dos alunos cita  $\mathbb{R}^n$  como um exemplo de espaço vetorial, se fixando em  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$ . Para a maioria dos alunos (franceses), Álgebra Linear não passa de um catálogo de muitas noções abstratas que eles representam com grande dificuldade. Por hábito, eles são submergidos por uma avalanche de novas palavras, novos símbolos, novas definições e novos teoremas. (Dorier, 1997, p.95)

No Brasil, a pesquisa sobre o ensino da Álgebra Linear é extremamente recente, tendo timidamente começado nos anos 90. Alguns trabalhos que encontramos são:

- Amarildo Menchiades da Silva (1997): Dissertação da Universidade Santa Úrsula do rio de Janeiro com o título "Uma Análise da Produção de Significados para a Noção de Base em Álgebra Linear". Fundamentação teórica: Modelo teórico dos campos semânticos de Rômulo Lins.
- Rute Henrique da Silva (1999): Dissertação de Mestrado da Unesp de Rio Claro com o título "Álgebra Linear como Curso de Serviço para a Computação". Fundamentação teórica: Assimilação solidária de Baldino e Pensamento Matemático Avançado de Tall.
- Marlene Alves Dias (1993): Mémoire de DEA da Université de Paris 7 (equivalente a dissertação) com o título "Contribution à l'analyse d'un enseignement expérimental d'algèbre linéaire en DEUG A première année". Fundamentação teórica: Didática da Matemática Francesa.
- Marlene Alves Dias (1995): Artigo do 19º PME com o título "Articulation Problems between different systems of symbolic representations in Linear Algebra". Fundamentação teórica: Jogo de quadros de Régine Douady e Registros de representação de Raymond Duval, e flexibilidade não-hierárquica.

### **Fundamentação Teórica: Proceito e Álgebra Linear**

Em 1989, Sfard já questionava 'como pode algo ser um processo e um objeto ao mesmo tempo?'. Tal questionamento, que Sfard estudou a partir do conceito da encapsulação, Gray e Tall (1991) abordaram em seus trabalhos sugerindo que a resposta está no modo com que os profissionais de matemática superam este problema.

Para melhor estudar objetos matemáticos, os autores utilizaram o termo "proceito". A partir do estudo do proceito desejavam compreender o que levava a alguns alunos serem bem sucedidos em matemática e outros não, como é que estes alunos bem sucedidos lidavam com os objetos matemáticos.

De forma geral, no currículo de uma disciplina qualquer, se faz distinção entre habilidades ou procedimentos que um indivíduo precisa adquirir, a fim de que eles consigam fazer as coisas, e os conceitos ou fatos básicos que se espera que eles saibam com os quais eles operam com suas habilidades. Isso sugere uma dicotomia fundamental entre procedimentos e conceitos, entre coisas para fazer e coisas para se saber. (Gray e Tall, 1994, p.2). Tendo em mente estes

conceitos, Gray e Tall definem (em 1994) o proceito como uma mistura de processo e conceito, em que processo e produto são representados pelo mesmo simbolismo. Assim, o símbolo para um proceito pode evocar um processo e um conceito. (Gray e Tall, 1991, p.2)

Os aspectos procedimentais da matemática focam na rotineira manipulação de objetos que são representados por material concreto, palavras faladas, símbolos escritos ou imagens mentais. É relativamente fácil de ver se procedimentos são conduzidos adequadamente e o desempenho em tarefas similares são muitas vezes tido como medida da execução dessas habilidades. (Gray e Tall, 1994, p.2)

Os procedimentos são fundamentais para a construção da matemática, assim como os conceitos. Gray e Tall (1994), inclusive chegam a afirmar que os procedimentos ajudam na compreensão de conceitos:

Conhecimento conceitual é mais difícil de se acessar (do que o conhecimento procedimental). Isso porque este conhecimento (conceitual) é rico em relações. O pensamento flexível usando um conhecimento conceitual é provavelmente muito diferente do pensamento baseado em procedimentos inflexíveis. Procedimentos ainda formam uma parte básica da matemática desenvolvida. Na verdade, há claras evidências de que procedimentos podem exercer uma sutil função na formação do conceito, em que a interiorização de procedimentos pelos alunos pode conduzir para sua cristalização como objeto mental, que pode constituir o foco de um pensamento conceitual elevado. (Gray e Tall, 1994, p.2)

Gray e Tall (1994) também defendem que a razão que torna a matemática uma área do saber simples para uma minoria de alunos, enquanto que a grande maioria fracassa, é que esta minoria está fazendo uma matemática qualitativamente diferente dos demais. Para eles, o que evidencia esta diferença qualitativa é a existência de uma flexibilidade entre conceito-processo-procedimento.

Eis aqui a questão central do estudo do proceito: a flexibilidade! Em todos os trabalhos de Tall sobre proceito tal flexibilidade entre conceito-procedimento-processo é destacada, mas a partir de seus trabalhos mais recentes, fica mais claro ainda tal fato. Tanto que inicia uma nova teoria: a dos três mundos da matemática.

Da mesma forma que os números, vetores também podem ser encarados como proceitos, pois podem ser vistos como um elemento do espaço vetorial; um ente matemático com módulo, direção e sentido; algo que pode ser estático ou dinâmico; resultado de operação entre outros vetores (soma, homotetia...).

Uma transformação linear também é um proceito, porém seu entendimento é complexo. Segundo Tall, uma função é um proceito, porque podemos pensar na conta que é feita para achar a imagem de um determinado elemento do domínio, mas também é um conceito que vale para qualquer variável.

Parte da definição da Transformação Linear diz respeito a ela ser uma função. Logo, a transformação linear é operacional por levar um elemento do domínio em um elemento do contra-domínio e também é um conceito que vale para qual variável. Mas, a questão é que a função é um conceito da transformação linear, e a função em si é um proceito. Logo, a função é um proceito e um elemento conceitual de outro proceito, o da transformação linear. Traçando um paralelo com a matemática, um conjunto pode ser elemento de outro conjunto, como por

exemplo um elemento do conjunto das partes é um (sub)conjunto.

De modo semelhante, o domínio e contra-domínio da transformação linear são espaços vetoriais, o que é um aspecto conceitual, mas o espaço vetorial em si é um proceito.

Além disso, na própria definição de Transformação Linear, existem procedimentos, que costumam ser averiguados pelos alunos, que são se  $T(u+v) = T(u) + T(v)$  e  $T(\lambda u) = \lambda T(u)$ , onde  $u, v$  pertencem ao domínio da Transformação Linear e  $\lambda$  é um escalar qualquer. Porém, pelo referencial teórico de Gray e Tall não é possível caracterizar a linearidade como conceitual ou procedimental com exatidão.

Refletindo sobre a Transformação Linear, que é o tema de nossa pesquisa, podemos enxergá-la como um proceito, estando ciente das dificuldades em se formar um proceito. Ou seja, entender transformação linear como proceito é compreendê-la em sua totalidade, tendo flexibilidade entre seu conceito e os procedimentos que o cercam. Esta percepção torna mais fácil compreendermos as dificuldades que os alunos sentem ao lidar com o nosso objeto matemático.

### Metodologia

A metodologia de pesquisa consistiu de um estudo empírico qualitativo feito em duas etapas: um questionário piloto e um questionário final, aplicado a diferentes grupos de alunos, seguido de entrevistas semi-estruturadas. Primeiramente, aplicamos um questionário (mais tarde nomeado de questionário piloto) a oito alunos da Universidade Federal do Rio de Janeiro e depois os entrevistei. Estes alunos eram de diferentes cursos da Engenharia (Civil, Ciclo Básico, Produção...). Selecionamos alunos que tinham acabado de cursar a disciplina Álgebra Linear II no segundo semestre de 2009, sendo que cursaram a matéria pela primeira vez (não eram repetentes). Este questionário piloto foi aplicado em dezembro de 2009 e janeiro de 2010.

Na primeira etapa da pesquisa (questionário piloto), os alunos foram selecionados de um universo 808 alunos a partir de suas notas de matemática no vestibular e em Cálculo I, que deveriam ser superiores a seis e oito, respectivamente. De acordo com estes critérios de nota, 59 alunos foram previamente escolhidos e destes, 8 foram localizados e participaram da primeira etapa da pesquisa. O objetivo desta seleção foi o de conseguir alunos que fossem bem sucedidos, ao menos, na ênfase procedimental da matemática. Desta forma, atingimos alunos estudiosos, embora isto não possa ser garantido pelo método de seleção.

Aplicado o questionário piloto, percebemos que algumas questões poderiam ser melhor trabalhadas e que poderíamos abranger um número maior de alunos, fazendo um novo estudo empírico. Elaboramos um novo questionário, bastante semelhante ao anterior, que chamamos de questionário final. Este questionário final foi aplicado no final de junho e durante as duas primeiras semanas de julho de 2010, tendo como público alvo os alunos que estavam terminando de cursar Álgebra Linear II naquele momento (2010/01).

Estes alunos foram selecionados por nota, mas com critérios menos exigentes, pois se tratava de um grupo de alunos que tinham em sua maioria ingressado na Universidade em 2009/02 com notas inferiores aos da primeira seleção, exceto os alunos da Engenharia de Produção, que ingressaram em 2009/01, mas cursam a disciplina no terceiro período. Nesta

segunda seleção, encontramos 163 alunos com nota superior a sete em Cálculo I (em 2009/02) de um universo de 472 alunos, porém destes, 120 não se encontravam em pauta alguma de Álgebra Linear II ou haviam cursado a disciplina em 2009. Logo, restaram apenas 43 alunos com nota superior a sete em Cálculo I. Destes 43 alunos, apenas 9 alunos tinham nota superior a seis em Matemática no vestibular, 4 tinham nota superior a cinco e inferior a seis, e 3 alunos tinham nota superior a quatro e inferior a cinco, e o restante (27 alunos) tinham nota inferior a 4,0. Deste modo, optamos por ignorar a nota do vestibular em Matemática como fator de seleção, embora vamos trazê-la à tona ao longo da pesquisa, e exigimos apenas que o aluno tivesse nota superior a sete em Cálculo I. Por fim, dos 43 alunos com nota superior a sete em Cálculo I, apenas 13 foram encontrados ou responderam ao e-mail aceitando colaborar com a pesquisa. Além disto, mais um aluno que não havia sido selecionado, voluntariou-se a participar por iniciativa própria. Totalizamos assim, 14 alunos na segunda etapa da pesquisa.

Como os alunos foram selecionados por nota e não são da mesma turma (tiveram professores diferentes), a pesquisa não estará levando em consideração que cada aluno pode ter visto abordagens distintas de uma mesma matéria, já que cada professor imprime em suas aulas um pouco de suas crenças e concepções de ensino e do próprio saber científico.

É importante ressaltar que os dois questionários (o piloto e final) deveriam ser respondidos exatamente na ordem em que estão configurados e que imediatamente após o término do preenchimento do questionário, foi dada a oportunidade para que o aluno alterasse suas respostas, justificando o porquê. O motivo de o questionário ter que ser respondido na ordem é que ele foi elaborado de modo que a questão seguinte pudesse auxiliar na resposta da anterior. Por isso o aluno poderia mudar alguma (ou todas) as respostas no final. Porém, nenhum aluno alterou sua resposta ao fim de responder o questionário. Destacamos agora o desinteresse em alterar qualquer resposta por parte dos alunos.

Vamos destacar aqui alguns aspectos desta pesquisa quanto ao questionário final aplicado. Os detalhes são apresentados em Furtado, Ana (2010).

O questionário tinha uma parte de perguntas pessoais, como: Você se considera um bom aluno em Matemática? Você gosta de matemática? O que achou do curso de Álgebra Linear II? Você gostou mais do curso de Cálculo I ou Álgebra Linear II? Qual é, em sua opinião, a dificuldade do curso de Álgebra Linear II?, e perguntas sobre Álgebra Linear.

Pedimos aos alunos que justificassem todas as respostas, a fim de os conhecermos melhor.

Na parte de Álgebra Linear, vamos destacar neste trabalho as seguintes questões:

1. (a) Dê três exemplos de espaços vetoriais.  
(b) Um polinômio pode ser um elemento de um espaço vetorial? E uma matriz?
2. Explique o que é uma transformação linear.
3. Considere a função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = 2x + 3$ .  
(a) A função  $f$  é uma transformação linear? Justifique.  
(b) Você pode justificar a letra (a) de uma segunda forma?



4. Considere a matriz  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ , que representa uma rotação de  $90^\circ$  (sentido anti-horário) em  $\mathbb{R}^2$ . Por exemplo, se aplicarmos  $A$  no vetor  $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ , obtemos que

$$A \cdot v = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Ilustramos o efeito de  $A$  em  $v$  na figura abaixo:

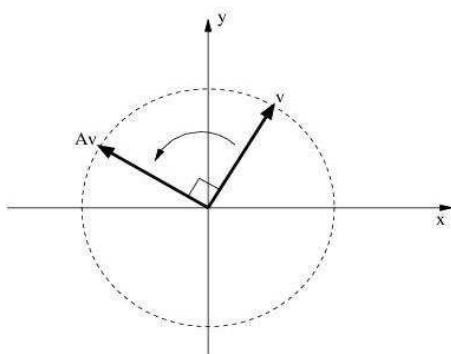


Figura 1. Gráfico que ilustra o efeito da rotação de  $90^\circ$  no vetor dado.

### Resultados

Na questão “Dê três exemplos de espaços vetoriais.”, 8 alunos deram os 3 exemplos corretos, 3 alunos somente dois exemplos, e 2 alunos somente 1 exemplo correto. O exemplo mais citado foi o  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$  (11 vezes), polinômios (6 vezes) e o  $\mathbb{R}^n$  (2 vezes). O fato do  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$  serem tão citados enfatiza o quanto no curso de Álgebra Linear predomina uma visão simplificada de espaço vetorial, trabalhando-se mais com estes conjuntos, em detrimento de trabalhar com o conjunto das matrizes, por exemplo, que não foi citado por nenhum aluno.

Para a questão “Explique o que é uma transformação linear”, eles se concentraram nas propriedades de linearidade (7 alunos) e ser função (8 alunos), enquanto somente 4 alunos observaram que o domínio e contradomínio têm que ser espaço vetorial. Os dois aspectos mais citados (linearidade e função) pelos alunos revelam uma visão procedimental do conceito de transformação linear.

Para a questão de determinar se  $f(x) = 2x + 3$  é uma transformação linear, 6 alunos acertaram e 8 erraram. Os que acertaram, justificaram as respostas de forma procedimental. Dos que erraram, 5 cometeram erro conceitual, seja por afirmar que se o domínio e contra-domínio de uma função são espaços vetoriais, então a função é transformação linear ou por considerar que toda função do 1º grau é uma transformação linear.

É importante notar que apenas teve êxito nesta questão quem utilizou argumento procedimental. Todos os que tentaram usar base conceitual, lançaram mão de argumentos

conceituais falsos, que os conduziram ao erro. Nenhum aluno observou neste item que a função dada não passava pela origem (logo, não seria transformação linear), o que seria um argumento conceitual correto.

Na questão procedimental “Crie uma função que leve elementos de  $\mathbb{R}^2$  em elementos de  $\mathbb{R}^3$ ”, 10 alunos acertaram, o que esperávamos, já que os alunos provavelmente estão acostumados a trabalhar com funções deste tipo, tanto que nenhum aluno deixou-a em branco.

O mais surpreendente é que neste grupo seletivo de alunos, 4 não souberam responder.

Finalmente, na questão em que apresentamos uma matriz de rotação de 90 graus, e pedimos para calcular  $A^4$ , 10 alunos acertaram. Notemos que todos os alunos que se utilizaram de uma visão geométrica, em que a matriz transformação dada era a matriz rotação, responderam com êxito a questão, que vista sob este prisma pode ser considerada uma questão bem simples e conceitual.

No entanto, os alunos que optaram por uma ênfase procedimental se dividiram em acertos e erros. Dois alunos erraram ao multiplicar seguidamente matrizes e um aluno utilizou descriteriosamente a decomposição espectral, partindo de contas com matrizes erradas e sem justificá-las.

Era esperado por nós que neste item um número considerável de alunos realizasse multiplicação de matrizes e de fato oito de catorze alunos o fizeram.

### **Discussões dos Resultados**

A partir da breve exibição de resultados temos evidências de que há uma grande dificuldade por parte dos alunos em abstrair o conceito que lhe é ensinado. Os alunos não foram capazes de transitar livremente entre conceito-processo-procedimento, o que é caracterizado por Gray e Tall como flexibilidade.

Mais especificamente, os alunos não souberam reconhecer uma Transformação Linear. Apenas metade dos alunos citou a propriedade da linearidade ao definir Transformação linear na questão 2, e a maioria não citou que seu domínio e contra-domínio são espaços vetoriais. A maioria dos alunos considerou que a função real do 1º grau  $f(x) = 2x+3$  é equivocadamente uma transformação linear (6 acertos). Os alunos conseguiram, em sua maioria, gerar uma função de  $\mathbb{R}^2$  em  $\mathbb{R}^3$  (10 acertos), mas não tiveram o mesmo êxito ao gerar função de espaço de polinômios em espaço de matrizes (5 acertos). A maioria não observa com cuidado o domínio e contra-domínio de uma função para caracterizá-la com transformação linear ou não (apenas 4 o fizeram).

Grande parte dos alunos tentou resolver as questões a partir de visões procedimentais, e muitas das vezes em que investiam em uma resposta conceitual, usavam conceitos equivocados, revelando despreparo frente ao tópico transformação linear.

Ressaltamos que este é um estudo qualitativo, que abrangeu um grupo seletivo dos alunos bem sucedidos em matemática da UFRJ. Trabalhamos com catorze alunos, porém apenas foram encontrados quarenta e três alunos cursando Álgebra Linear II em 2010/01 que satisfaziam nosso critério. Logo, catorze de quarenta e três é representativo (33% dos selecionados), e apesar do número de alunos ser pequeno é expressivo. E esta constatação nos leva a questionar o ensino de

Álgebra Linear, mesmo tendo consultado poucos alunos.

Dos catorze alunos, nove apontaram explicitamente a abstração presente no curso de Álgebra Linear como a maior dificuldade da disciplina. Outros quatro alunos citaram a falta de aplicação como um dificultador. Apenas quatro alunos preferiram o curso de Álgebra Linear ao de Cálculo I. Estes quatro alunos preferiram o curso de Álgebra Linear justamente porque gostaram do curso mais abstrato e teórico.

### **Conclusões**

É preciso uma reflexão sobre que tipo de alunos queremos formar. Com a resposta em mente, uma reforma curricular poderia ser realizada, a fim de tornar nosso ensino mais pragmático e computacional (formando profissionais bons e pragmáticos, que foi o esforço americano a partir do LACSG) ou um ensino que dialogue mais com o aluno sobre conceitos delicados e que tanto custou à humanidade desenvolver (formando profissionais com maior embasamento teórico capaz de atuar no desenvolvimento da ciência). Cremos que a sociedade necessite de todo tipo de profissional. Logo, não se pode abrir mão de pessoas qualificadas para atuarem como agentes do crescimento tecnológico.

O grupo do LACSG propôs que houvesse um primeiro curso matriz-orientado para só depois ser introduzida a teoria da Álgebra Linear para espaços vetoriais quaisquer (e nem todos os alunos fariam obrigatoriamente este segundo curso). Nós julgamos esta proposta positivamente e pensamos que pode ser uma boa solução, embora ainda não se tenha provas de que o resultado de seu uso foi proveitoso ou não. Dubinsky (1997) afirma que apenas este semestre a mais para o amadurecimento da abstração matemática do aluno não é garantidamente suficiente.

O trabalho do grupo francês coordenado por Dorier (1997) aponta para outro problema: a inexistência de situação problema que os alunos possam utilizar em um primeiro curso de Álgebra Linear que dê origem ao desenvolvimento de suas principais questões. Logo, este fato continuaria afetando o segundo curso proposto pelo LACSG e é inegavelmente um grande obstáculo no ensino da Álgebra Linear.

É necessário repensar a ideia do potencial de aplicações de conceitos matemáticos no ensino e aprofundar um estudo histórico que suporte uma reflexão epistemológica para sermos mais compreensivos e sensíveis com as dificuldades que os nossos alunos encontram ao estudar Álgebra Linear.

Pensamos que este trabalho suporta muitos desdobramentos, visto que ainda há muito a ser pesquisado nesta área, que é nova dentro do Ensino da Matemática. Os dados e constatações aqui obtidos mostram que mesmo os "melhores" alunos têm dificuldades em assimilar conceitos em Álgebra Linear. Então naturalmente algumas perguntas surgem, podendo desencadear futuras pesquisas, como: relacionar as dificuldades dos alunos em Álgebra Linear com o ensino que tiveram anteriormente (no Ensino Médio), estudo de novas metodologias de ensino, estudo do próprio currículo brasileiro de Álgebra Linear e investigação de possíveis (e prováveis) dificuldades em outros tópicos.

**Bibliográficas e referências**

- Celestino, M. R. (2000) *Ensino-aprendizagem da Álgebra Linear: as pesquisas brasileiras na década de 90*. PUC – São Paulo.
- Dorier, J. L. (1997). *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question*. França: La Pensée Sauvage éditions, p. 291-297.
- Dorier, J.-L. (1998). *État de l'art de la recherche en didactique*. A propos de l'enseignement de l'algèbre linéaire. França: Recherches en Didactique des Mathématiques, 2, v. 18, p. 191 – 230.
- Dorier, J.-L. et al. (2000). On the teaching of Linear Algebra. Grenoble, France: Kluwer Academic Publishers, p. 151-175.
- Dubinsky E. (1997). *Some thoughts on a first course in linear algebra at the college level*, in D. Carlson, C.R. Johnson, D.C. Lay, A. Duane Porter, A. Watkins and W. Watkins (eds.). Resources for Teaching Linear Algebra, Mathematical Association of America, MAA Notes, 42, p. 85-105.
- Furtado, Ana Luísa C. (2010). *Dificuldades na aprendizagem de conceitos abstratos da Álgebra Linear*. Dissertação, UFRJ, Rio de Janeiro.
- Gray, E. e Tall, D. (1991). *Duality, ambiguity e flexibility in successful mathematical thinking*. PME 15, Assisi, 2, p. 72-79.
- Gray, E. e Tall, D. (1994). *Duality, ambiguity e flexibility in successful mathematical thinking*. The journal for research in mathematics education, 26(2), 115-141, 1994.
- Niss, M. (1999). *Aspects of the nature and state of research in Mathematics Education*. Educational Studies in Mathematics, 40, pp. 1 -24.
- Tall, D. (1992) . *The Transition to Advanced Mathematical Thinking: Functions, Limits, Infinity, and Proof*. Handbook of Research in Mathematics Teaching and Learning. Ed. D. Grouws, Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, p. 495-511.
- Tall, D. Vinner, S. (1981) Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity. Educational Studies in Mathematics. 12, p. 151-157.