Modelación Matemática en la Historia de las Matemáticas. Una mirada al concepto de Función Cuadrática

Yadira Marcela **Mesa**
Facultad de Educación, Universidad de Antioquia
Colombia
yadiramarcela@gmail.com
Jhony Alexander **Villa-Ochoa**
Departamento de Ciencias Básicas, Universidad de Medellín
Colombia
javo@une.net.co

Resumen

Este artículo presenta como los procesos o actividades de Modelación Matemática estuvieron presentes en la Historia de las Matemáticas, a partir de una mirada al trabajo de Mesa y Villa (2008) en el que se hace un análisis de la construcción histórica y epistemológica del concepto de función cuadrática. Identificando, de manera retrospectiva, procesos propios de la modelación matemática y que fueron desarrollados por Galileo en el trabajo con situaciones de variación cuadrática y que son relevantes en el momento de pensar en la Modelación como una vía para la construcción de conocimiento matemático escolar.

Palabras clave: Historia de las Matemáticas, Modelación Matemática, Función Cuadrática, Modelo Matemático, actividad científica.

Introducción

El hombre, ha estado siempre inquieto por conocer el entorno en el que vive; así lo ha mostrado la historia de la humanidad; y en la actualidad, sigue siendo un objeto de estudio entre nosotros. Conocer la naturaleza, el universo, las dinámicas sociales, las herramientas e incluso conocer al otro y a sí mismo; esta actividad de *cognoscer* ha sido caracterizada en los diferentes periodos históricos, porque en dicha actividad intervienen los factores: sociales, culturales, políticos, económicos, religiosos, entre otros; que condicionan, de alguna manera, nuestra mirada frente al entorno, considerando entorno como todo aquello que convive con el hombre que lo habita.

Por otro lado, gracias a las numerosas investigaciones y publicaciones realizadas en el campo de la Historia de las Matemáticas en la Educación Matemática, defendiendo y promoviendo su vínculo, es posible afirmar que una mirada a la Historia de un objeto matemático, genera elementos relevantes para la comprensión de dicho objeto, tanto a nivel epistemológico, como por la transposición didáctica que pueda hacerse de este saber. Ya que es sabido que las creencias de los maestros influyen en gran medida en la didáctica de los mismos. Mesa y Villa-Ochoa (2008) plantearon una construcción histórica y epistemológica del concepto de función cuadrática, con el fin de generar herramientas que sirvan al maestro de análisis al momento de re-significar este concepto.

De esta manera, y reconociendo que el concepto de función en general, ha estado ligado a la modelación de procesos de variación y que por tal razón investigadores como Carlson, et al. (2003), Dolores & Cuevas (2007), Posada & Villa-Ochoa (2006) y Sierpinska (1992) han centrado su atención en la forma en que la variación puede convertirse en un eje fundamental para una didáctica de este concepto. La función cuadrática no escapa a esta concepción y por lo tanto, su presencia permanente en el entorno cotidiano hace posible una indagación por parte de los sujetos que desean comprender algunos fenómenos que dejan modelarse mediante una función cuadrática o al menos, el lograr establecer algunas relaciones cuadráticas de tales fenómenos.

Dando una mirada general a la Historia de las ciencias y el aporte de la investigación de Mesa y Villa-Ochoa (2008), se puede afirmar que uno de los periodos más fecundos de las matemáticas se ubica los siglos XVI y XVII, periodo en el que las relaciones entre las matemáticas y el entorno están en correspondencia, de tal manera que las matemáticas traducen la naturaleza y la naturaleza obedece a leyes matemáticas. Es así como una mirada al conocimiento matemático producido en esa época, implica a su vez, un análisis del contexto en el que se dieron los desarrollos de interés, porque tales circunstancias condicionaron o permearon la actividad del científico en relación con algunos objetos matemáticos, entre ellos, el concepto de función cuadrática, que como conocimiento heredado ha sufrido transformaciones históricas y conceptuales para llegar a nuestras aulas de clase, para ser aprehendidas por los estudiantes; en este caso, estudiantes de la educación media y superior. Así que preguntarse por la génesis de estos conceptos o procedimientos, posibilita la exploración de la epistemología de tales saberes escolares y de esa manera, identificar procesos relevantes en la didáctica de los mismos, tanto por la comprensión de los maestros frente a esos saberes, como por las condiciones que se generan para facilitar los procesos de aprendizaje de los mismos.

1. Los Siglos XVI y XVII y la Matematización de las ciencias.

En este periodo histórico emergieron aspectos trascendentales para las matemáticas en general, y en particular para el concepto de función cuadrática. Por lo tanto, una mirada a la actividad científica de esta época, en tanto hallazgos y producciones, estuvieron vinculados a la relación de los científicos con su cosmovisión. Y dada la importancia de estos eventos, ya que algunos procesos que fueron relevantes para el desarrollo de los objetos matemáticos, hoy tienen presencia en las matemáticas escolares; se hace necesaria una mirada particular de dichos procesos, en la medida en se puede dar cuenta de lo que motivó a estos científicos a producir este tipo de saber. Al respecto, algunos historiadores de la ciencia, en particular de las matemáticas, entre ellos, Kline (1992), afirma que:

> Los matemáticos y los científicos recibieron alguna inspiración de los prejuicios teológicos de la Edad Media, que habían inculcado que la visión de que todos los fenómenos de la naturaleza están no sólo interconectados, sino que se producen de acuerdo con un plan global: todas las acciones de la naturaleza siguen el plan establecido por una única causa primera (p. 295).

Reconociendo que dicha causa primera es Dios como creador del Universo, es así como la afirmación de Galileo Galilei en palabras de Kline (1992, p. 434) dice:

> La filosofía [naturaleza] está escrita en ese gran libro que siempre está delante de nuestros ojos –quiero significar el universo- pero que no podemos entender si no aprendemos primero el lenguaje, y comprendemos los símbolos, en los que está escrito. El libro está escrito en lenguaje matemático, y los símbolos son triángulos, circunferencias y otras figuras geométricas, sin cuya ayuda es imposible comprender ni una palabra de él, sin lo cual se deambula en vano a través de un oscuro laberinto.

Esta cosmovisión permea la actividad científica de la época, que se caracterizó por el cambio de paradigma en la manera de realizar ciencia, generando una revolución científica, en palabras de Koyré (1977) una revolución galileo-cartesiana, por lo que se hace interesante identificar las nociones y saberes, así como los procesos que llevaron a cabo estos personajes para generar los desarrollos científicos que les correspondieron y que fueron vitales para el desarrollo de las Matemáticas. Ese sentido de matematización o geometrización, tanto en Galileo como en Descartes, obedece a un proceso meramente de investigación científica, es decir, que el fin no fue matematizar, éste resultó como herramienta indispensable para la producción de saber, por esto es posible realizar un vínculo entre los procesos de construcción matemática con los procesos científicos, como de observar, experimentar, conjeturar, sistematizar, validar, entre otros. Se podría decir que la recurrencia las matemáticas, establecía una necesidad por obtener un modelo, en palabras actuales, como algo que diera cuenta de los fenómenos que intentaba explicar. Al respecto, más adelante se conceptualiza el modelo, en particular el modelo matemático, intentando determinar si de manera retrospectiva, podía leerse en estos científicos una idea de modelo, desde su acepción actual.

Continuando con estos dos personajes, Kline (1972, p. 430) cuenta que Descartes y Galileo redefinieron los objetivos de la actividad científica y alteraron el método de la ciencia, de tal manera que "*Su reformulación no sólo suministró una potencia inesperada y sin precedentes a la ciencia, sino que la ligó indisolublemente a las matemáticas*" y señala, además, que para entender el espíritu de las matemáticas a partir del siglo XVII hasta el siglo XIX es necesario examinar primero las ideas de Descartes y Galileo. Al respecto, este mismo autor dice que Descartes explicitó su idea y convicción de que la esencia de la ciencia eran las matemáticas, porque con ella podían explicarse todos los fenómenos de la naturaleza, ofreciendo demostraciones de ello. Por su lado, Galileo aunque creía lo mismo, realizó un gran énfasis en la experimentación con el fin de generar expresiones matemáticas que dieran cuenta de sus experiencias, porque "*la parte matemática, deductiva, de la empresa científica tenía una importancia mayor a la experimental*" Kline (1972, p. 438).

Al respecto Newman dice que la esencia de la revolución científica de los siglos XVI y XVII es más bien un cambio en las perspectivas mentales que un florecimiento de la invención y Galileo, más que ningún otro pensador particular, fue responsable de ese cambio. Siendo Galileo muy enfático en descubrir *cómo* actúan las cosas en vez de preguntarse por qué; y de esto no hay duda al leer su obra y analizar un poco sus experimentos para validar algunas hipótesis que planteaba, en los cuales se evidencia un trabajo cuantitativo de las magnitudes que intervenían en los fenómenos estudiados. Veamos ahora uno de sus procesos registrados en la tercera jornada de Diálogos sobre dos nuevas ciencias, en los que explica a Sagredo y Simplicio el resultado de sus estudios, representado en el personaje de Salviati:

TEOREMA II PROPOSICIÓN II

Si un móvil con movimiento uniformemente acelerado desciende desde el reposo, los espacios recorridos por él en tiempos cualesquiera, están entre sí como la razón al cuadrado de los mismos tiempos, es decir como los cuadrados de esos tiempos.

Supongamos que el fluir del tiempo desde un primer distante A, está representado por la extensión AB, en la cual se toman dos tiempos cualesquiera AD, AE; y sea HI la línea por la que el móvil desde el punto H, como primer principio del movimiento, desciende con movimiento uniformemente acelerado; y sea el espacio HL recorrido en el primer tiempo AD, y sea HM el espacio por el que se descendió el tiempo AE. Digo, que el espacio MH está, respecto a HL, en una razón que es la segunda potencia de la que tiene el tiempo AE respecto al tiempo AD; es decir, que los espacios MH, HL tienen la misma razón que tienen los cuadrados de AE y AD.

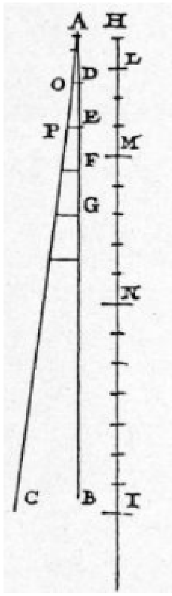

Ilustración 1

Pongamos la línea AC formando un ángulo cualquiera con la AB; y desde los puntos D, E, trácense las paralelas DO, EP; de las cuales DO representará el máximo grado de velocidad, adquirida en el instante D del tiempo AD; y PE el máximo grado de velocidad adquirida en el instante E del tiempo AE. Y puesto que hemos demostrado arriba, en lo referente a los espacios recorridos, que son iguales entre sí aquellos de los cuales uno es recorrido por el móvil con movimiento uniformemente acelerado a partir del reposo, y el otro es recorrido durante el mismo tiempo por el móvil que marcha con movimiento uniforme, cuya velocidad es subdupla (media) de la máxima velocidad adquirida en el movimiento acelerado; es evidente que los espacios HM, HL son los mismos que, con movimientos uniformes cuyas velocidades fueran como las mitades de PE, OD, serían recorridos en los tiempos, EA y DA. Por consiguiente, si se demostrare que estos espacios HM, HL están en una razón que es la segunda potencia de la razón de los tiempos EA, DA, tendríamos demostrado lo que pretendíamos.

Pero en la cuarta proposición del libro primero se ha demostrado que los espacios, recorridos por móviles que marchan con el movimiento uniforme tienen entre sí una razón producto de la razón de las velocidades y de la razón de los tiempos; mas aquí la razón de las velocidades es idéntica con la razón de los tiempos (pues la misma razón que tiene la mitad de PE en relación con la mitad e OD, o toda la PE en relación a todas las OD, la tiene también la AE respecto a la AD: luego la razón de los espacios recorridos es como el cuadrado de la razón de los tiempos: que es lo que había que demostrar.

De lo anterior se deduce que la misma razón de los espacios es el cuadrado de la razón de los máximos grados de velocidad [final], es decir, de la línea PE, OD, siendo PE a OD como EA es DA. Galileo (1636 p.236)

En este planteamiento, se observa rigor formal frente a un hecho que se explica para ser comprendido, de esta manera se puede identificar la necesidad de la representación geométrica como recursos de validación, en tanto por esta vía los razonamientos matemáticos eran válidos, además de no contar con otro procedimientos para explicarlo que éste. Sin embargo, se observa en este ejercicio que la representación es de magnitudes variables y la forma en que estas son abordadas, las relaciones que establece entre ellas, la identificación de sus características, y la explicitación de sus ideas mediante el lenguaje verbal-escrito. Se puede decir también que esta representación es un acercamiento más al sistema de coordenadas cartesianas para relacionar las variables y desde allí analizar el comportamiento de dichas variables y tratar de cuantificarlas, lo que lleva a Galileo formular el primer corolario de este teorema y que es de gran importancia para concebir la función cuadrática desde una mirada variacional comprenderla a partir de su razón de cambio:

> Se sigue claramente de aquí que, si desde el primer instante o inicio del movimiento hubiéramos tomado sucesivamente un número cualquiera de tiempos iguales, como, por ejemplo, AD, DE, EF, FG, en los cuales se recorran los espacios HL, LM, MN, NI, estos espacios estarán entre sí como los números impares *ab unitate*; es decir, como 1, 3, 5, 7: es ésta, efectivamente, la proporción entre los excesos de los cuadrados de las líneas que se sobrepasan igualmente y cuyo sobrante es igual a la más pequeña de ellas; es decir, entre los números cuadrados consecutivos *ab unitate*. Por lo tanto, cuando los grados de velocidad aumentan, en tiempos iguales, según la serie de los números naturales, los espacios recorridos, en los mismos tiempos, adquieren incrementos según la serie de los números impares *ab unitate*. Galileo (1636, p. 237)

De lo anterior, se identifica la función cuadrática, como lo presentó Villa-Ochoa (2008, p. 248) "*Se llama función cuadrática a la relación entre dos cantidades de magnitud cuya razón de cambio varía linealmente*" dado que Galileo establece que la diferencia entre los incrementos de las cantidades que explican el movimiento acelerado obedece a la sucesión de los números impares, lo cual conlleva a identificar en Galileo una aproximación a la tasa de variación, noción que está en las bases del concepto de derivada, en sentido retrospectivo. Al identificar procesos de este tipo, se evidencia cómo éstos no son artificiales al concepto mismo, es decir, al estar interesado por indagar por un fenómeno de variación es natural que se recurra a algunos procedimientos que los sostienen y que hoy se piensan por En este sentido, vale la pena dar una mirada a la forma en que Galileo llegó a estas conjeturas, propias de un proceso de investigación y que al reconocer su entorno como objeto de estudio, recurriendo a las matemáticas no sólo para reconocerlo sino también explicarlo generando un modelo para ello, se puede decir que Galileo desarrolló algunos procesos propios de Modelación Matemática como se verá en el siguiente apartado.

2. Modelación Matemática

Para reconocer el vínculo entre algunos procesos relevantes en la Historia de las Matemáticas y la Educación Matemática es se hace referencia   Biembengut y Hein (2007, p. 12) quienes conciben la Modelación Matemática como: un proceso que se implica en la obtención de un modelo; adicionalmente, Bassanezi (2002) afirma que dicho proceso tiene un carácter dinámico y que no sólo se usa para la obtención del modelo sino para su validación; al respecto dice también que la Modelación *"É uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previção de tendencias. A modelagem consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual*" (p. 24). La manera de este autor concebir la Modelación como una abstracción de la realidad, permitiendo generalizar, predecir y validar los saberes sobre ella misma por medio de situaciones reales, es lo que en Galileo se evidenció. En este sentido, un acercamiento a la forma en que Galileo narra la forma en que realizó sus experimentos, se muestra un sentido de sistematicidad con el fin de validar, de considerar las variables y la forma de abordarlas, construcción e identificación de los instrumentos a utilizar y la generalización de tales aspectos.

Los Diálogos deja ver que la información allí defendida, no es sólo una abstracción por sí sola, está respaldada en las observaciones, sistematizaciones y generalizaciones realizados en la experiencia afirmando que *"con el fin de dejar bien probado que la aceleración de los graves que caen de modo natural se da en la proporción antes desarrollada, me he visto muchas veces en su compañía, a fin de probarlo"* lo cual es interesante analizar la forma en que se realizaron tales experimentos y lo cual narra de la siguiente manera:

> En un listón o, lo que es lo mismo, en un tablón de una longitud aproximada de doce codos, de medio codo de anchura, más o menos y un espesor de tres dedos, hicimos una cavidad o pequeño canal a lo largo de la cara menor, de una anchura de poco más de un dedo. Este canal, tallado lo más recto posible, se había hecho enormemente suave y liso colocando dentro un papel de pergamino lustrado al máximo. Después, hacíamos descender por él una bola de bronce, dura, bien redonda y pulida.
>
> Habiendo colocado dicho listón de forma inclinada, se elevaba sobre la horizontal una de sus extremidades, hasta la altura de uno o dos codos, según pareciera, y se dejaba caer (como he dicho), la bola por dicho canal, tomando nota como en seguida he de decir del tiempo que tardaba en recorrerlo todo. <u>Repetimos el mismo experimento muchas veces para asegurarnos bien de la cantidad de tiempo y pudimos constatar que no se hallaba nunca una diferencia ni siquiera de la décima parte de una pulsación</u>. Establecida exactamente esta operación, hicimos que esa misma bola descendiese solamente por una cuarta parte de la longitud del canal en cuestión. Medido el tiempo de la caída, resulta ser siempre, del modo más exacto, precisamente la mitad del otro. Haciendo después el experimento con otras partes, bien el tiempo de la longitud completa con el tiempo de la mitad, con el de dos tercios, con el de 3/4 o con cualquier otra fracción, <u>llegábamos a la conclusión, después de repetir tales pruebas una y mil veces, que los espacios recorridos estaban entre sí como los cuadrados de sus tiempos</u>. <u>Esto se podía aplicar a todas las inclinaciones del plano</u>, es decir, del canal a través del cual se hacía descender la bola. Observamos también que los tiempos de las caídas por diversas inclinaciones del plano guardan entre sí de modo riguroso una proporción que es, como veremos después la que les asignó y demostró el autor.
>
> En lo que a la medida del tiempo se refiere, empleamos una vasija grande llena de agua, sostenida a una buena altura, que, a través de un pequeño canal muy fino, iba vertiendo un hilillo de agua, siendo recogido en un vaso pequeño durante todo el tiempo en que la bola descendía, bien por todo el canal o sólo por alguna de sus partes. Se iban pesando después en una balanza muy precisa aquellas partículas de agua recogidas del modo descrito, con lo que las diferencias y proporciones de los pesos nos iban dando las diferencias de los tiempos. Ocurría esto con tal exactitud que, como he indicado, tales

> operaciones, repetidas muchísimas veces, jamás diferían de una manera sensible. Galilei (1636, p.239)

En el subrayado, se puede identificar procesos propios de un proceso de recoger la información, sistematización, validación, entre otros aspectos relevantes y que de acuerdo con Bassanezi y Biembengut (1997), Bassanezi (2002) un proceso de modelación implica:

1. Experimentación, en esta actividad se obtienen los datos, se realizan observaciones, se disponen las herramientas. En este sentido, Galileo realizó experimentos de variación cuadrática, como se mostró en la cita anterior.
2. Abstracción, entendiendo que es el momento que debe llevar a la formulación de los modelos matemáticos, en el que se busca establecer: selección de variables, problematización o formulación de los problemas en lenguaje matemático y con conceptos propios del área en que se está trabajando, en el caso de Galileo, la cinemática; también el establecimiento de hipótesis, simplificación en el sentido de volver más simple el problema, en este sentido, el mismo autor menciona a Galileo como precursor en este sentido.
3. Resolución referido a la transposición del lenguaje natural al modelo matemático.
4. Validación, referido a la aceptación o no de modelo propuesto por las actividades anteriores, en la que se confrontan los datos empíricos, predicciones, valores en relación con los valores en la realidad.
5. Modificación, ya que ningún modelo debe ser considerado definitivo.

El hecho de explicar un evento en sí mismo mediante una expresión matemática, como resultado final, no es modelación o modelización, ya que traducir en lenguaje matemático una "realidad" es una matematización de la misma.

La Modelación Matemática, posibilita espacios propios de actividad científica dentro del aula escolar, como lo afirma Villa-Ochoa et al. (2009) "*El proceso de modelación matemática es considerado como una actividad científica en matemáticas que se involucra en la obtención de modelos propios de las demás ciencias*", por esto su mayor riqueza a nivel didáctico, se da en la medida en que propicia un contexto científico en los estudiantes, en el que puedan indagar, observar, plantear o proponer, cuestionar, validar y comprobar, experimentar, conjeturar, generalizar, discutir, entre otros tantos aspectos que la ciencia genera.

En este sentido, la analogía entre la actividad científica de algunos protagonistas de los siglos XVI y XVII y la actividad modeladora tiene mucho sentido, y máxime cuando se involucran algunos conceptos que fueron productos de la actividad histórica de algunos científicos. De tal manera que una mirada retrospectiva a tales procesos, con una actitud analítica a nivel epistemológico y didáctico puede generar herramientas de reflexión valiosas para ser tenidas en cuenta al momento de pensar en Modelación Matemática como estrategia didáctica. Atendiendo a la consideración que realiza Villa-Ochoa et al (2009, p. 161) citando a Crouch y Haines, de que "*Una buena modelación matemática involucra el establecimiento de relaciones entre mundo real y el mundo matemático y la habilidad para moverse entre cada uno de ellos*". De esta manera, puede encontrarse un punto en común más estrecho entre la analogía realizada anteriormente, el vínculo entre el mundo real, que puede ser también la naturaleza, y las matemáticas.

3. El concepto de Modelo y su presencia en la Historia de las matemáticas

Concebir LA Modelación como el proceso en el que se obtiene un modelo, una referencia a Badiou (1978, p. 15) es interesante al concebir al modelo matemático como un modelo abstracto que "*Se trata, en rigor, de un haz de hipótesis al que suponemos relativamente completo en el campo estudiado y cuya coherencia y cuyo posterior desarrollo deductivo quedan garantizados por una codificación generalmente matemática*", del que también afirma que tales construcciones deductivas ha nacido de una convergencia histórica y define al Modelo en general como "*un cuerpo de enunciados gracias al cual esa convergencia histórica se ha visto integrada en un discurso único*" al cual la cosmología se ha vinculado en cuanto al idealismo del modelo, como vía cercana para su explicación. En el caso formulado de Galileo, se puede evidenciar la forma en que su obra, sus afirmaciones y experiencias encajan dentro de dicha afirmación, sin temor a decir que hoy se puede decir que en la mente de Galileo había una noción de modelo en lo que respecta a su actividad y producción. Adicionalmente, con respecto a la variación cuadrática generó herramientas clave para el desarrollo posterior del concepto de Función cuadrática por medio de este proceso de modelación, superando en algunas ocasiones, obstáculos epistemológicos presentes en la Historia de las Matemáticas que se pueden encontrar en Mesa y Villa (2008).

Ahora, no cualquier modelo en sí mismo es bueno, es decir, hay ciertos criterios para definir al buen modelo, así como Villa-Ochoa et al (2009), acude a una noción de una buena modelación, pues Badiou (1978, p. 20) citando a Levi Strauss definen al mejor Modelo como aquél objeto artificial, que sin dejar de ser el más sencillo, responda a la doble condición de no utilizar otros hechos que los considerados y de informar acerca de todos. No es una tarea fácil la construcción de un buen modelo, en la medida en que esta acepción de modelo está ligada a la veracidad del modelo, de los hechos de los que debe dar cuenta y de la forma en que lo hará. Es lo que en el aparatado anterior hablaba de actividades de modelación, en relación con la simplificación del mismo y nuevamente se retoma la apreciación del autor sobre el aporte de Galileo en este aspecto.

Sin embargo, suele confundirse que el Modelo es la replicación de la realidad con la idea de la actividad científica del Hombre frente con los objetos que han sido creados por él, como las matemáticas, por lo tanto, como ya se había mencionado el modelo es una idealización de esa realidad. Badiou (1978, p 15) afirma también que "*el modelo no es una transformación práctica de lo real, de su real, pertenece al registro de la invención pura y está dotada de una 'irrealidad' formal*" luego dice que "*Para la epistemología de los modelos, la ciencia no es un proceso de transformación práctica de lo real, sino la fabricación de una imagen plausible*" (p. 21) y de esto se generan algunas condiciones sobre los modelos como consecuencia de su definición, entre ellas que se parezcan a la realidad en todos los aspectos relevantes para la investigación que se persigue, de esta manera, su parecido con la realidad es, según él, un requisito para que el funcionamiento del modelo sea significativo. Esto propone una superación de la cosmovisión de los Siglos XVI y XVII, pero dando la lectura a que la actividad científica de entonces puede decirse que el modelo fue la teoría que fue modificándose hasta hoy, con el fin de ofrecer una imagen del entorno, los conceptos van modificándose también, los modelos son dinámicos, las prácticas e intereses de los científicos ahora no son las mismas, por lo tanto estas imágenes cambian, pero no cambian por sí solas, cambian con base en una historia en el que tiene lugar los cambios, las re-estructuraciones de los modelos. Seguramente, los procesos llevados a cabo por Galileo en relación con la variación cuadrática son muy importantes para analizar hoy e identificar posibles abordajes del concepto de función cuadrática en el aula escolar, sin embargo no quiere decir que éstos se repitan en el aula, reconocer la actividad de este hombre, permite evaluar lo que hoy heredamos y como sus transformaciones, en el modelo, obedecen a consideraciones epistemológicas de gran importancia a ser consideradas por la Educación Matemática, en particular por la Modelación Matemática, que no debe desconocer su historia.

4. Consideraciones Finales

Reconocer los procesos constructivos de los objetos matemáticos, generan miradas diferentes de los mismos, identificar obstáculos, procesos, contextos, obras, y que la matemática de hoy es un resultado de muchos siglos de construcción, implica también reconocer que éstas son dinámicas, que cobran relevancia cuando hace parte del interés intrínseco que quien desea construirlas, por ello, los procesos de modelación existen siempre y cuando esta característica exista, ya que está asociado a un espíritu investigativo, de explorar cuanto sea posible para dar significatividad a eso con lo que se está relacionando. Modelación es investigación, por ello resulta importante identificar las formas en que se puede presentarse un objeto matemático, en qué tipo de situaciones, como propiciar ambientes propios de construcción matemática por medio de la investigación, de tal manera en que se realicen experimentos en los que se relacionen magnitudes, se establezcan hipótesis con el fin de predecir, analizar, validar, refutar y todos los procesos propios de la ciencia.

No consiste en matematizar el entorno, precisamente, analizar la obra de Galileo muestra que modelación en la historia no es traducir en términos matemáticos, si no en los procesos que llevó a cabo para lograr algunos desarrollos en matemáticas y en física, con esta mirada, se enriquece la Modelación Matemática al ser considerada como método de investigación, como lo han formulado diversos investigadores entre ellos, los aquí citados. Por lo tanto el concepto de modelo también se re-significa.

REFERENCIAS

Badiou, A (1978). *El concepto de modelo*. Bases para una epistemología materialista de las matemáticas. Ciudad de México: Siglo XXI. Traducción

Bassanezi, R. (2002). *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática*. São Paulo, Brasil: Contexto.

Biembengut, M., & Hein, (2007). *Modelagem Matemática no Ensino*. São Paulo, Brasil: Contexto.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2003). Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: Un marco de referencia y un estudio. *EMA*, 8 (2), 121-156.

Dolores, C., & Cuevas, I. (2007). Lectura e interpretación de gráficas socialmente compartidas. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa* , 10 (001), 69-96.

Galilei, G. (1638/2003). *Diálogos acerca de dos nuevas ciencias*. Buenos Aires: Losada.

Kline, M. (1992). *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días*. (Vol 1): Madrid: Alianza

Koyré, A. (1977). *Estudios de Historia del pensamiento científico*. Ciudad de México: Siglo XXI

Mesa, Y., & Villa, J.A (2008). *El Concepto de Función Cuadrática: Análisis histórico, epistemológico y didáctico.* Monografía no publicada. Medellín: Universidad de Antioquia

Posada, F., & Villa, J. A. (2006). *Propuesta didáctica de aproximación al concepto de función lineal desde una perspectiva variacional. Tesis de Maestría no publicada.* Medellín: Universidad de Antioquia

Sierpinska, A. (1992). Undertanding the notion of funtion. In G. Harel, & E. Dubinsky, *The concept of funtion . Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 25-58). USA: Mathematical Association of American.

Villa, J. A. (2008). El concepto de función. Una mirada desde las matemáticas escolares. *Actas Latinoamericanas de Matemática Educativa. 21*, Buenos Aires: Clame

Villa-Ochoa, J. A., Bustamante, C. A., Berrío, M., Osorio, J. A., & Ocampo, D. A. (2009). Sentido de realidad y modelación matemática. El caso de Alberto. ALEXANDRIA. Revista de *Educação em Ciência e Tecnologia* , 2 (2), 159-180