Descubrimiento de los teoremas de Pitágoras en la educación secundaria

Rodrigo **Cambray** Núñez
Universidad Pedagógica Nacional
México
rcnroc@yahoo.com.mx

Los labios de la sabiduría permanecen cerrados,
excepto para el oído capaz de comprender.

—El Kybalión

Resumen

El propósito principal de este taller es que los maestros de matemáticas de educación secundaria que participen en él, desarrollando actividades del quehacer matemático mediante una trama cuadrada, conozcan un camino hacia el descubrimiento de los teoremas de Pitágoras —el directo y su converso—. Las actividades propuestas corresponden a un nivel de desarrollo de conocimientos; los profesores podrán desarrollarlas con sus estudiantes sin tener que usar definiciones formales, fórmulas o demostraciones rigurosas de los resultados matemáticos implicados.

Abstract

The main purpose of this workshop is that secondary-school mathematics teachers, who take part in it developing mathematical activities by means of a geoboard, get to know a way of discovering the Pythagorean theorem(s)—both, the direct and the converse. The proposed activities correspond to a level of developing knowledge: Teachers will be able to make their students develop the activities without making recourse to formal definitions, formulae or rigorous proves of the mathematical results implied.

Palabras clave: geometría, teoremas de Pitágoras, educación secundaria, formación de profesores, enseñanza de la geometría.

El principal propósito del desarrollo de las actividades que se proponen en este taller dirigido a maestros de matemáticas de educación secundaria (grados 7.º a 9.º) es que descubran relaciones que se dan entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de triángulos obtusángulos, acutángulos y rectángulos. Primero se compara el área del cuadrado de mayor área con las de los cuadrados construidos sobre los otros dos lados en triángulos obtusángulos y acutángulos, y enseguida se plantea la posibilidad de que exista algún tipo de triángulo para el cual la suma de las áreas de estos dos cuadrados sea igual a la del cuadrado de mayor área. La conjetura que se plantee sobre esta situación se validará mediante transformaciones de áreas; la relación especial que así se descubre constituye el teorema de Pitágoras y a la vez su recíproco o converso, que en los *Elementos* Euclides aparecen como PROPOSICIÓN 47 y PROPOSICIÓN 48 del libro I (Euclides, 1991). Durante la preparación de los materiales se ha tenido en mente ejemplificar cómo se puede profundizar en la comprensión de interrelaciones de *las matemáticas que nuestros alumnos deben aprender*. Un punto importante de este taller es que está basado en la línea de investigación denominada "historiopedagogía de las matemáticas" (véase Jones, 1994). Evidencias de beneficios de la puesta en práctica de parte de estas actividades con estudiantes ya se han reportado (véanse: Cedillo *et al.*, 2006; Cambray, Cruz y Vega, 2007).

Cabe señalar que en los 1950 se enunciaron consignas con relación a la enseñanza de la geometría como la siguiente: "Permitan que Arquímedes y no Euclides sea nuestro guía" (Meder, 1958, p. 584). También se hicieron aseveraciones en el sentido de que Euclides había escrito los *Elementos*, una obra sobre geometría y aritmética, para preparar filósofos y no matemáticos (véanse, por ejemplo: Meder, 1958, y Daus, 1960). Vale la pena hacer notar que Arquímedes (*ca.* 287-212 a.n.e.) menciona a Euclides en sus investigaciones; así lo informa Proclo "Arquímedes, quien vivió después de la época del primer Ptolomeo, menciona a Euclides" (Proclus, 1992, p. 56). Varios autores han valorado la importancia histórica de los *Elementos* de Euclides por su influencia en todas las generaciones desde que se escribieron: durante más de dos milenios se ha utilizado esa obra de Euclides para tratar de mostrar cómo usar el poder del razonamiento deductivo en la consecución del conocimiento. Sin embargo, ha recibido descripciones exageradas de su influencia, como la siguiente: "la obra de Euclides [...] durante mucho tiempo fue una fuente de inspiración para los matemáticos y es el fundamento y la guía para algunas partes de las matemáticas más finas incluso hasta la época presente" (Gemignani, 1967, p. 162).

Siguiendo esa tradición milenaria, a partir de 1950 en la educación escolar se dio énfasis al rigor lógico y se hicieron a un lado o se ignoraron las relaciones con las experiencias de los estudiantes —en cuanto al aprendizaje de la geometría en la educación secundaria— en el mundo que los rodea. Esta perspectiva sobre el aprendizaje se basó en la suposición de que para un aprendizaje óptimo las matemáticas se deberían enseñar en una secuencia lógica de acuerdo con su organización formal. Este enfoque —antihistórico, desde la perspectiva de cómo se llegó a descubrir resultados matemáticos que después se organizaron de manera deductiva— no ha tenido éxito.

En años recientes, en la enseñanza de la geometría en la educación secundaria se ha dado menos énfasis al enfoque axiomático. Ahora se intenta que en este nivel educativo las ideas, nociones y conceptos de la geometría se aborden con base en la experiencia de los alumnos, auxiliándose de objetos tangibles como lo puede ser un geoplano (o su "representación en una trama cuadrada o en un "geoplano virtual") o el doblado de papel, además de programas computacionales de geometría dinámica: ya no es una meta central en el aprendizaje de la geometría en la educación secundaria que los alumnos necesariamente desarrollen habilidades en los métodos de demostración.

Desde los 1980 se ha fortalecido la postura de que la investigación educativa puede contribuir al mejoramiento de las prácticas de enseñanza de las *matemáticas escolares* (un *corpus* distinto al de las matemáticas mismas, aunque fuertemente ligado a éstas). Más importante aún ha sido el señalamiento de que la investigación educativa en las matemáticas escolares puede "servir como una herramienta analítica para estudiar las relaciones entre las matemáticas y la sociedad en su conjunto" (Schubring, 1992, p. 49). En la parte final de una conferencia que dio en 1980, Hans Freudenthal (1992, p. 27) señaló la importancia de que la investigación educativa siempre se llevara a cabo *en* el ámbito de la educación y no que se hiciera investigación *de* la educación.

A nivel internacional se ha identificado la siguiente problemática: Simplemente aprendiendo más matemáticas prepararía a los maestros para desempeñarse mejor en una maestría en matemáticas puras, por ejemplo, *pero los alejaría de lo que realmente tienen que ayudar a sus alumnos a aprender* (Beckmann *et al.*, 2004, pp. 151-163). Es claro que los maestros de matemáticas, así como quienes estudian para convertirse en maestros de matemáticas sí requieren de cursos de matemáticas.

Con base en la línea de investigación educativa sobre la preparación matemática de los profesores, se debe reflexionar acerca de que ninguna de las siguientes dos posturas puede ser aceptada (cabe señalar que bajo este planteamiento deben recolectarse más evidencias tanto de la existencia de ambas posturas como de por qué no deben aceptarse): *1)* Hay quienes opinan que ayudando a los maestros de matemáticas de la educación básica a aprender más matemáticas los convertirá en mejores maestros; *2)* Por otra, hay quienes opinan que para dedicarse a la investigación de los procesos de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas se puede prescindir de “aprender más matemáticas”.

Equivalencia de áreas

En el libro I de los *Elementos* de Euclides (*ca.* 300 a.n.e.) la proposición 47 es precisamente la que conocemos como *el teorema de Pitágoras;* la proposición 48 (con la que termina el libro I de los *Elementos* de Euclides) es la que se ha denominado *el converso* (o *el recíproco*) *del teorema de Pitágoras*. Estas dos proposiciones aparecen enunciadas en esta obra de Euclides así:

> PROPOSICIÓN 47. *En los triángulos rectángulos el cuadrado del lado que subtiende el ángulo recto es igual a los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo recto.*
>
> PROPOSICIÓN 48. *Si en un triángulo el cuadrado de uno de los lados es igual a los cuadrados de los dos lados restantes del triángulo, el ángulo comprendido por esos lados restantes del triángulo es recto.*

Las actividades propuestas en este taller para llegar a las verdades contenidas en estas dos proposiciones se basan fuertemente en otros dos antiguos resultados de la geometría (de mayor generalidad) también contenidos en los *Elementos* de Euclides: la proposición 12 y la proposición 13 del libro II (este libro II contiene 14 proposiciones). Se consideró únicamente la primera parte tanto de la proposición II.12 como la de la proposición II.13, que a continuación se separa de la segunda parte correspondiente con puntos suspensivos entre corchetes.

> PROPOSICIÓN 12. *En los triángulos obtusángulos el cuadrado del lado que subtiende al ángulo obtuso es mayor que los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo obtuso*
> […]
> *en dos veces el rectángulo comprendido por un (lado) de los del ángulo obtuso sobre el que cae la perpendicular y la (recta) exterior cortada por la perpendicular, hasta el ángulo obtuso.*

> PROPOSICIÓN 13. *En los triángulos acutángulos, el cuadrado del lado que subtiende al ángulo agudo es menor que los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo agudo* […]
> *en dos veces el rectángulo comprendido por uno de los lados del ángulo agudo sobre el que cae la perpendicular y la (recta) interior cortada por la perpendicular hasta el ángulo agudo.*

Descripción de las sesiones

Este taller se desarrollará en dos sesiones de aproximadamente una hora cada una. En la primera parte de la primera sesión se reflexionará sobre qué es un *cuadrado* (bloque 1) y se iniciará el estudio de un problema de la antigüedad clásica relacionado con el tema principal del taller (boques 1 y 2); esto servirá para ejemplificar cómo se pueden seguir caminos distintos hacia el aprendizaje de las matemáticas, lo cual hace sobresalir los siguientes puntos de vista sobre la historia de las matemáticas:

> La historia de las matemáticas enseña humildad al mostrarnos que hay otras maneras de hacer las cosas, distintas a la nuestra. Si entendemos cómo otras gentes en otras épocas y en otros lugares resolvieron problemas matemáticos, descubriremos que nuestro propio punto de vista «aprendido» no es la única manera de pensar en matemáticas. Una vez que se reconoce esta situación, tal humildad nos convierte en mejores matemáticos abriendo nuestros ojos a posibilidades que con frecuencia nuestra propia formación matemática oculta a la vista. Si pensamos en las matemáticas como una ciencia deductiva, tenemos dificultad en imaginarlas diferentes a la manera en que nosotros y nuestros maestros las deducimos. Si pensamos en las matemáticas como una actividad humana llevada a cabo en una cultura, tenemos la oportunidad de ver a las matemáticas como una empresa creativa igual que la música o la poesía o cualquier otro arte. Este punto de vista no sólo nos ayuda a entender nuestra propia fascinación por las matemáticas, sino que hace más probable que hagamos surgir la inspiración de nuestro entusiasmo en otros. (Jones, 1996)

Enseguida, al final de la primera sesión y al inicio de la segunda, se desarrollarán actividades que conducen al descubrimiento tanto del teorema de Pitágoras como del converso del teorema de Pitágoras (bloque 3); la segunda sesión se terminará con la verificación de ambos teoremas mediante una trama cuadrada.

Se pedirá a los maestros participantes que desarrollen las actividades propuestas en equipo. Al finalizar el conjunto de actividades de cada uno de los tres bloques, se trabajará en sesión plenaria —puesta en común de todo el grupo de participantes— para discutir los resultados a que se llegue y la pertinencia de utilizar actividades análogas con nuestros alumnos. Será en esta puesta en común que se podrán plantear diversas preguntas para que los participantes profundicen en sus reflexiones; el planteamiento de tales preguntas se basará, desde luego, en las característica propias de cómo se desarrolle el taller con el grupo de participantes. Se entregarán fotocopias con tramas cuadradas como la de la figura A, en la que se muestra una representación gráfica de un geoplano de 12×12 pivotes, para que desarrollen el tercer bloque de actividades.

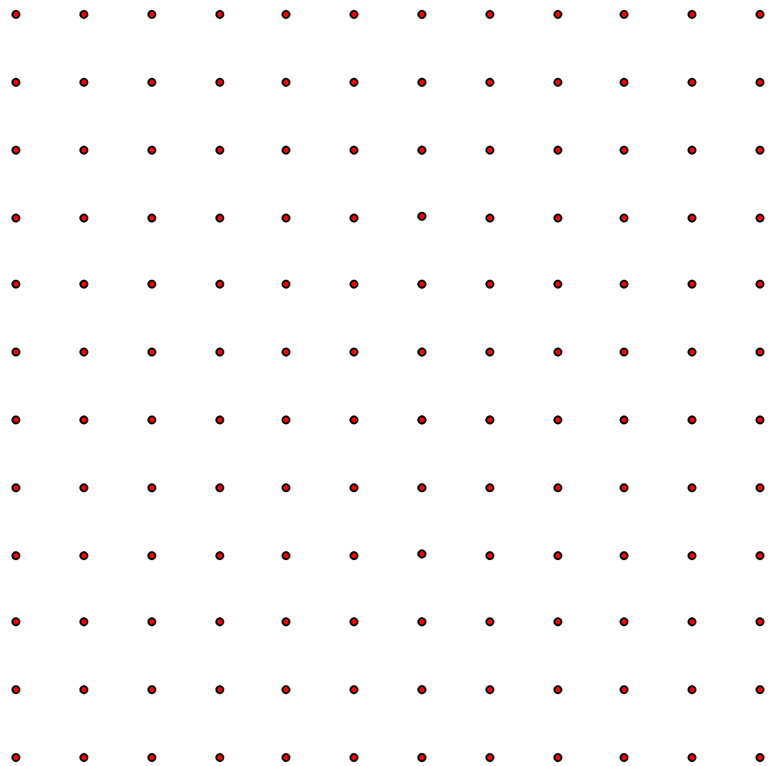

Figura A

Propósitos

Que los profesores de matemáticas:

- Analicen una resolución del problema de la duplicación del cuadrado.
- Analicen la equivalencia de dos definiciones de *cuadrado*.
- Mediante una trama cuadrada calculen y comparen las áreas de cuadrados construidos sobre los lados de distintos tipos de triángulos según sus ángulos.
- Mediante una trama cuadrada verifiquen el teorema de Pitágoras (y su converso).

En seguida se presentan los contenidos de las hojas de trabajo que se entregarán a los participantes en este taller para el logro de los propósitos planteados mediante el desarrollo de las actividades propuestas.

Actividades

Bloque 1: ¿Qué es un cuadrado?

Durante la primera mitad del siglo IV a. n. e., Aristocles (*ca.* 428-347 a.n.e.), notable dramaturgo griego —mejor conocido como Platón—, redactó unos diálogos en los que el personaje central fue Sócrates, su maestro, a quien reivindicó y cuya imagen no permitió que muriera. Se ha comentado que en estos diálogos la historicidad quedó totalmente supeditada al afán de presentar situaciones y personajes ilustrativos de esta «conversión» a una forma de vida presidida por el conocimiento y la virtud (López, 1999, p. 23). Varios de estos diálogos incluyen temas de matemáticas; por ejemplo, en *El Menón* (Platón, 1986, pp. 17-23) se conversa sobre la resolución del problema de la duplicación de un cuadrado: se pone en escena a un esclavo que debe mostrar sobre qué segmento de línea recta debe construirse un cuadrado que tenga el doble de área de un cuadrado dado cuyo lado mide 2 unidades. En determinado momento de este diálogo se muestra el segmento rectilíneo que corresponde a la solución. Es de la mayor importancia hacer notar que no se explicita en el diálogo cuál es el valor numérico de la longitud del lado del segundo cuadrado.

En *El Menón* dice Sócrates: "[…] éste es un espacio de cuatro ángulos […] que tiene iguales todos los lados (γραμμὰς) que son cuatro […] [y] tiene iguales también los lados que lo atraviesan por la mitad […] Si este lado (πλευρὰ) fuera de dos pies […] (Platón, 1986, p. 17). Más adelante anotó: "Esa línea (γραμμὲ) que va de un ángulo a otro […] corta en dos partes a cada uno de los espacios […]" (Platón, 1986, p. 122). En la figura 1 se muestra un espacio *ABCD* de cuatro ángulos ($\angle BAD$, $\angle CBA$, $\angle DCB$ y $\angle ADC$), cuyos cuatro lados iguales son $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DA}$, siendo los dos lados que lo atraviesan por la mitad $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ iguales. En el mismo diálogo *El Menón*, Sócrates informa que los sofistas llaman a cada uno de los lados $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ que atraviesa por la mitad a un cuadrado *ABCD*, que va de un ángulo al opuesto, *diagonal*: "Los sofistas llaman a éste diagonal" (Platón, 1986, p. 23).

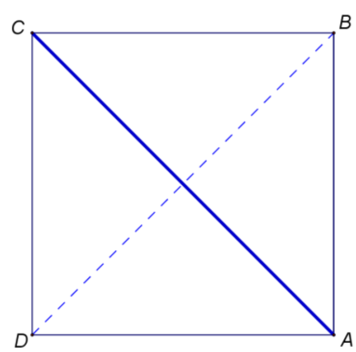

Figura 1

Si un cuadrado *ABCD* tiene 2 unidades de longitud en cada lado, el espacio que encierra es de 2 unidades de longitud por 2 unidades de longitud; esto es, de 4 unidades de área. ¿Puede haber otro cuadrado del doble de área de éste? Si así fuera, el nuevo cuadrado tendría 8 unidades de área.

1) Si el lado de un cuadrado es de 2 unidades, ¿de cuántas unidades es el lado del cuadrado de 8 unidades de área?

2) Si en la figura 1 el lado $\overline{AB}$ del cuadrado mide 2 unidades, ¿de cuántas unidades es su diagonal $\overline{AC}$?

3) Si respondió la pregunta *1)*, compare el resultado con el que dio en su respuesta a la pregunta *2)*.

4) ¿Cuánto mide cada uno de los cuatro ángulos de un cuadrado como el que se muestra en la figura 1? ¿Por qué?

5) Dado un cuadrado, ¿cómo se construye otro cuadrado que tenga el doble de área?

Bloque 2: Duplicación de un cuadrado

Dado un cuadrado *ABCD* de 4 unidades de área (véase la figura 2), se le añaden otros tres espacios iguales *BEFC, FGHC* y *CHID* de modo que se forme un cuadrado *AEGI* que encierre un espacio de 4 veces el original: es decir, de 16 unidades de área. La diagonal $\overline{BD}$ del primer cuadrado lo corta en dos partes iguales. Lo análogo ocurre con cada uno de los tres cuadrados que se añadieron (por ejemplo, el cuadrado *CFGH* queda dividido en dos triángulos iguales, *FGH* y *HCF*, por su diagonal $\overline{FH}$). Por lo tanto, los cuatro segmentos rectilíneos iguales $\overline{BF}$, $\overline{FH}$, $\overline{HD}$ y $\overline{DB}$ encierran un espacio cuadrangular *BFHD* que tiene la mitad de área del cuadrado *AEGI* de 16 unidades de área. Es decir, el espacio encerrado por las cuatro líneas $\overline{BF}$, $\overline{FH}$, $\overline{HD}$ y $\overline{DB}$ tiene 8, la mitad de 16, unidades de área.

Así, es a partir de una diagonal de un cuadrado dado que se origina otro cuadrado del doble de área que la del primero.

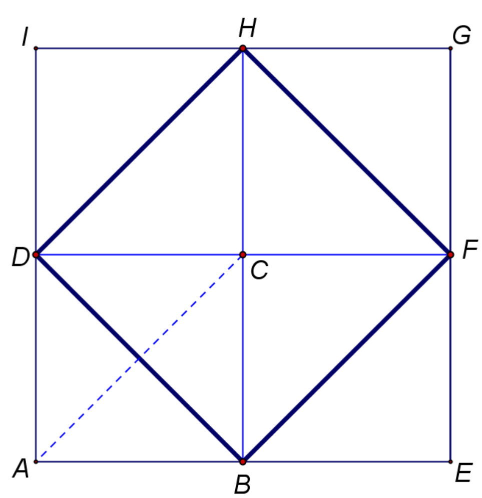

Figura 2

1) ¿Por qué una diagonal de un cuadrado lo divide en dos triángulos iguales? (Por ejemplo, en la figura 2 la diagonal $\overline{FH}$ del cuadrado *CFGH* divide a éste en dos triángulos iguales, ΔFGH y ΔHCF.)

Se tienen las siguientes dos definiciones de *cuadrado*.

DEFINICIÓN 1. Un *cuadrado* es un espacio de cuatro ángulos que tiene iguales todos los lados, que son cuatro, y que tiene iguales también sus diagonales, que son dos.

DEFINICIÓN 2. Un *cuadrado* es un espacio de cuatro ángulos *iguales* que tiene todos sus lados iguales, que son cuatro.

2) ¿Considera que la definición 2 de cuadrado es correcta? ¿Por qué?

3) Además de aseverarse en la definición 2 que los cuatro ángulos de un cuadrado deben ser *iguales*, ¿es necesario agregar en esta definición que dichos ángulos son rectos (de 90º)?

4) Con base en la definición 2, demuestre que las dos diagonales de un cuadrado son iguales.

5) ¿Hay alguna analogía entre los siguientes problemas?

a) Dado un segmento rectilíneo, construir otro segmento rectilíneo que tenga el doble de tamaño (longitud).

b) Dado un cuadrado, construir otro cuadrado que tenga el doble de tamaño (área).

c) Dado un cubo, construir otro cubo que tenga el doble de tamaño (volumen).

Bloque 3: Equivalencia de áreas

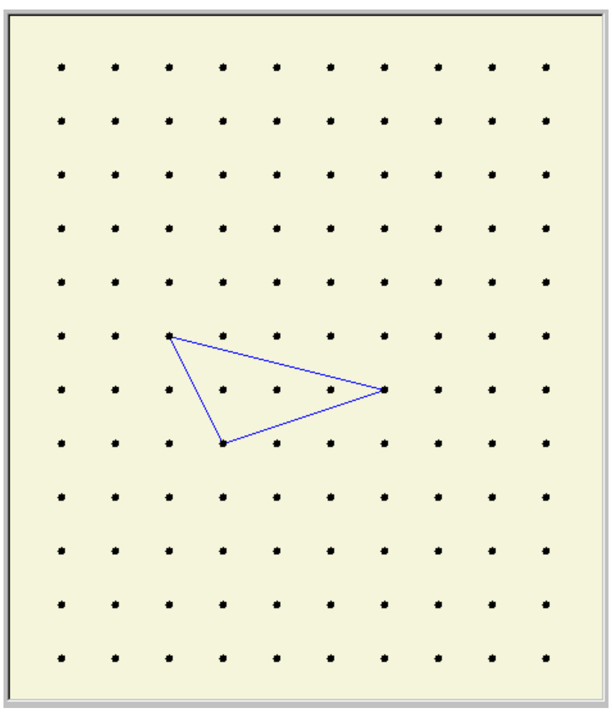

Figura 3

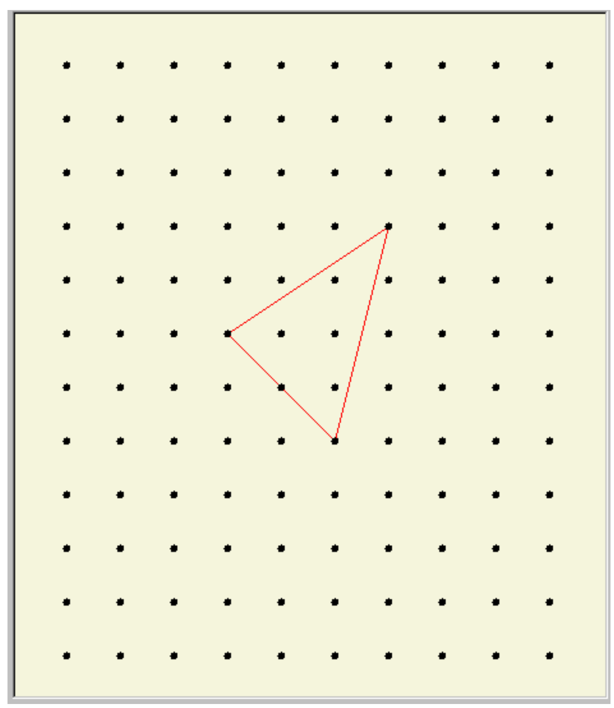

Figura 4

Hagan lo que se indica en cada uno de los siguientes pasos.

1) Construyan un cuadrado sobre cada uno de los lados del triángulo que se muestra en la figura 3.

2) Calculen el área de cada uno de los cuadrados construidos en el paso *1)*.

- ¿Cuánto mide el área del cuadrado más grande?
- Con el área de los dos cuadrados más pequeños, ¿se completa el área del cuadrado más grande? ¿Sobra área de los dos cuadrados más pequeños? ¿Falta?

3) Construyan un cuadrado sobre cada uno de los lados del triángulo que se muestra en la figura 4.

4) Calculen el área de cada uno de los cuadrados construidos en el paso *3)*.

- ¿Cuánto mide el área del cuadrado más grande?
- Con el área de los dos cuadrados más pequeños, ¿se completa el área del cuadrado más grande? ¿Sobra área de los dos cuadrados más pequeños? ¿Falta?

5) ¿Hay algún triángulo en el que el área de los cuadrados construidos sobre los dos lados más cortos sea exactamente igual al área del cuadrado construido sobre su lado más largo?

Referencias

Beckmann, C. E. *et al.*, 2004, Enhancing the mathematical understanding of prospective teachers using standards-based grades K – 12 activities, en: R. N. Rubenstein y G. Bright (eds.), *Perspectives on the teaching of mathematics: Sixty six yearbook*, pp. 151-163, NCTM, Reston, VA.

Cambray-Núñez, R., V. Cruz-Oliva y E. Vega-Ramírez, 2007, Discovering the Pythagorean Theorem(s) with a geoboard: Developmental experiences of eighth- and ninth-grade students, *Proceedings of the Twenty Ninth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, University of Nevada, Reno, NV, pp. 396–397.

Cedillo Á., T. E., V. Cruz O., E. Vega R. y R. Cambray N., 2006, *Enseñanza de las Matemáticas, Geometría: Áreas y teorema de Pitágoras*, SEP/UPN/ILCE/BID, México.

Daus, P. H., 1960, Why and how we should correct the mistakes of Euclid, *Mathematics Teacher 53*, pp. 576-581.

Euclides, 1991, *Elementos* (vol. 1: libros I-IV), Gredos, Madrid. [Trad. al castellano y notas de María Luisa Puertas Castaños, intr. de Luis Vega.]

Freudenthal, H., 1992, Problemas mayores de la educación matemática, en: R. Cambray, E. A. Sánchez y G. Zubieta B. (comps.), *Antología de educación matemática*, Sección de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, México, pp. 7-27.

Gemmignani, M. C., 1967, On the geometry of Euclid, *The Mathematics Teacher 60*, pp. 160-164.

Jones, C. V., 1994, Finding order in history learning: Defining the history and pedagogy of mathematics, *Anais da Reunião do Grupo Internacional de Estudos sobre Relações entre história e pedagogia da matemática*, HPM, Blumenau, pp. 35-45.

Jones, C. V., 1996, *A complex adaptive model for learning* [AERA paper on objects-based learning], 11 p.

López Castellón, E., 1999, Introducción a Platón, *Menón*, Istmo, Madrid, pp. 7-50.

Meder, A. E., Jr., 1958, What is wrong with Euclid? *Mathematics Teacher 51*, pp. 578-584.

Platón, 1986, *Menón*, UNAM, México. [Intr., versión en castellano y notas de U. Schmidt Osmanczic.]

Proclus 1992/1970, *A commentary on the first book of Euclid's Elements / Proclus*, Princeton University Press, Princeton. [Int., notas y trad. al inglés de Glenn R. Morrow; prefacio de Ian Mueller a la ed. de 1992.]

Schubring, G., 1992, Sobre la metodología de análisis de libros de texto históricos: Lacroix como autor de libros de texto, *Mathesis 8*, 3, pp. 273-298. [On the methodology of analysing historical textbooks:

Lacroix as textbook author, *For the Learning of Mathematics 7* (1987), 3, pp. 41-51; versión en castellano de R. Cambray N.]

Información general	
Título del taller	Descubrimiento de los teoremas de Pitágoras en la educación secundaria
Nombre de autores	Rodrigo Cambray Núñez
Instituciones de los autores	Universidad Pedagógica Nacional
País o países de los autores	México
Número de horas más conveniente (2 horas máximo)	2 horas
Nivel educativo al que va dirigido el taller (Preescolar, Primaria, Secundaria, Terciaria, o General)	Secundaria
Número máximo de personas	40 personas
Equipos audiovisuales o informáticos que requeriría (Proyector multimedia, TV grande, laboratorio de computación, conexión a Internet)	Proyector multimedia