



Errores recurrentes en un Modelo de Enseñanza con Geometría Dinámica

Erika **Barquera** Pedraza

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN (Cinvestav)

México Distrito Federal.

erikabarquera@hotmail.com

Eugenio **Fillo**y Yagüe

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN (Cinvestav)

México Distrito Federal. Asesor. Investigador Emérito.

smmeef@aol.com

Vicente **Carrión** Velázquez

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN (Cinvestav)

México Distrito Federal.

vcarrionv@cinvestav.mx

Resumen

En este artículo se muestra un avance de la investigación de doctorado (Modelo de Enseñanza con geometría dinámica para la Proporcionalidad Geométrica. Un estudio experimental). El marco teórico que se utiliza es, el de los Modelos Teóricos Locales (Fillo y 1999). Se diseñó un modelo de enseñanza que consiste, en actividades planteadas con geometría dinámica, es un estudio experimental. Consiste en una escalera de rampa lineal; con la idea principal de usar la noción de pendiente de una recta. Este modelo permite observar, las obstrucciones naturales en el momento de utilizar un Sistema Matemático de Signos, cuando se presenta la noción de variación proporcional geométrica. A lo largo de la realización experimental, se ha observado errores recurrentes, los cuales se están analizando. Entre otros aspectos nos interesa saber si la naturaleza de dichos errores puede ser de tipo cultural (Bishop 1988).

Palabras clave: Modelos Teóricos Locales, Proporcionalidad Geométrica, Obstrucciones naturales, Geometría Dinámica.

Origen y relevancia del problema

No todos los conceptos son igualmente centrales para la comprensión de la Matemática. En nuestra opinión, hay que centrar el esfuerzo docente en los contenidos básicos en la disciplina

que les permita a futuro reconstruir¹ un conocimiento más fuertemente conectado, como es el caso, por ejemplo, de la “proporcionalidad geométrica”. Se trata de una noción que se encuentra presente en todos los currículos para la enseñanza de las matemáticas en los niveles de primaria y secundaria (Secretaría de Educación Pública 1993). Sin embargo, es un concepto complejo que contiene una multiplicidad de registros representativos y genera distintos niveles de abstracción como han reportado las investigaciones. (Filloy y Rojano.1984, 1989).

Las diferentes investigaciones realizadas sobre la enseñanza y aprendizaje de la proporcionalidad geométrica han puesto de manifiesto que, con independencia de la secuencia didáctica implementada, los alumnos comenten unos errores recurrentes cuyo origen merece ser investigado. Entre otros aspectos nos interesa saber si la naturaleza de dichos errores puede ser de tipo cultural (Bishop 1988).

En los años 80 un grupo de Investigadores del Centro de Investigación y Estudios Avanzados Cinvestav, dirigido por el Dr. Eugenio Filloy, diseñó el siguiente experimento. Planificó una secuencia didáctica con el objetivo de controlar el estudio por un periodo de tres años consecutivos, al termino de ellas se clasifico a los alumnos para realizar estudios de caso, por medio de entrevistas vídeo grabadas, con el objetivo de determinar sus dificultades. Dicho experimento les permitió determinar lo que ellos llamaron obstrucciones naturales (Filloy et al. 1996)

Nuestro objetivo es continuar en esta línea de investigación con el uso de software. Para ello hemos reproducido básicamente la misma secuencia didáctica y la hemos adaptado para que sea implementada con geometría dinámica. Posteriormente hemos analizado si se produce las mismas obstrucciones naturales y hemos profundizado en la conceptualización de este constructo. De manera especial intentamos explicar en qué sentido, dichas obstrucciones se pueden considerar naturales.

Objetivos

El principal objetivo de esta investigación es identificar la naturaleza de los errores recurrentes que los alumnos manifiestan después de haber estudiado la proporcionalidad geométrica. Dicho objetivo general lo hemos concretado en los siguientes objetivos más concretos:

- 1) Diseño de un proceso de enseñanza y aprendizaje contextualizado de la proporcionalidad geométrica (básicamente el contexto de la escalera).
- 2) Se realiza dicho proceso de enseñanza y aprendizaje, en dos escuelas, de nivel secundaria, una escuela ubicada en el Distrito Federal y otra ubicada en el estado de Hidalgo con alumnos de la Cultura Otomí (México).
- 3) Detección de los errores de los alumnos después del proceso de instrucción
- 4) Determinación de la naturaleza de dichos errores recurrentes.

¹ Las cosas que se dicen sin tener una buena razón, o las cosas cuya razón no comprendemos, son más difíciles de recordar, sólo se puede reconstruir lo que realmente se ha dicho a partir de la esencia que recordamos (Perner 1994).

Marco Teórico Metodológico

El marco teórico metodológico elegido para analizar y diseñar modelos de observación experimental que nos permita interpretar las relaciones entre los actores de los fenómenos de comunicación en el aula con tecnología, para la enseñanza, es el de los Modelos Teóricos Locales (Filloy, 1990; 1999). Lo permisible del marco teórico metodológico es, que, lo que se elabora tanto para organizar una investigación, así como la organización de los resultados de la misma, es un Modelo Teórico Local (MTL). El carácter local viene dado, por el hecho de que el modelo se elabora para dar cuenta de los fenómenos que se producen en los procesos de enseñanza y aprendizaje de unos contenidos matemáticos concretos, con alumnos concretos, se pretende que el modelo sea adecuado para los fenómenos observados. El carácter de modelo se le da, entre otras cosas, por el hecho de que no se afirma que las cosas son tal y como las caracteriza el modelo, sino que, si las cosas fueran como las caracteriza el modelo, los fenómenos se producirán como se han descrito. Por ello el Modelo tiene un carácter descriptivo, explicativo y predictivo, pero no excluye que los mismos fenómenos puedan describirse, explicarse y predecirse por medio de otro modelo. Puig (2003).

Los Modelos Teórico Locales se elaboraron para dar cuenta de los fenómenos que se produce en situaciones de enseñanza y aprendizaje, pero además se concibe las situaciones de enseñanza y aprendizaje como situaciones de comunicación y de producción de sentido. Filloy (1990).

En todo proceso de enseñanza y aprendizaje de un contenido matemático, hay cuatro elementos esenciales: el sujeto que enseña, el sujeto que aprende (o los sujetos que aprenden), el conocimiento matemático puesto en juego, y la comunicación que establecen los sujetos involucrados. Usaremos el concepto de modelos teóricos locales en los cuales el objeto de estudio (muy determinado; por ello, el término Local) se enfoca a través de cuatro componentes interrelacionadas:

- Modelos de competencia formal
- Modelos de procesos cognitivos
- Modelos de comunicación.
- Modelos de enseñanza

Filloy (1990) les llama “el componente de competencia del modelo teórico local”, en esta investigación nos referiremos a: componente formal, componente de los procesos cognitivos, componente de comunicación y componente de enseñanza.

Componente formal

La necesidad principal de este modelo, es el de poder contar con una descripción de las situaciones observadas por medio de un Sistema Matemático más abstracto que permita comprender todos los textos que se producen en el proceso de enseñanza/aprendizaje con el modelo de Enseñanza, la escalera de rampa lineal (intercambio de mensajes), en el que los actores tienen diversos grados de competencia de uso. Se resalta que el maestro cuente con

competencias de uso de un Sistema Matemático de signos (SMS) más abstracto que englobe todos los utilizados en el aula. Este modelo nos permite comprender todas las situaciones observadas. Es hacer una descomposición de las partes y con ello detectar el nivel de comprensión en el que se encuentran cada uno de los alumnos observados, cuando se ve involucrado el intercambio de mensajes. Se describe las posibles bases para tener un modelo formal sobre los aspectos de la semejanza. Teorema de Tales. (Filloy 1990, 1999). Algunos Teoremas del Libro I de los Elementos de Euclides, proposiciones que van de la 27 a la 31 que se utilizan para generar el trazo de escaleras rectas, y que son utilizadas constantemente a lo largo de todo el Modelo de Enseñanza.

Componente cognitiva

De acuerdo con la investigación realizada, esta componente tiene gran peso, por las preguntas que nos interesan investigar: ¿Cuáles son las obstrucciones que se presentan con el Modelo de Enseñanza diseñado con recurso tecnológico?, ¿el recurso tecnológico y los aspectos ahí involucrados, les facilita o les obstaculiza la comprensión de la proporcionalidad geométrica?, ¿La significación contextual, interviene en la comprensión? ¿Cómo se manifiestan las relaciones entre los cuatro elementos esenciales, el sujeto que enseña, el sujeto que aprende, el conocimiento a ser enseñado y aprendido, mediado por recursos tecnológicos?

Componente de comunicación

Esta componente se ocupa de la transmisión de información desde que el sujeto enfrenta el problema hasta la clasificación de las distintas respuestas por categorías. Es un proceso que pasa por una serie de filtros para descodificar la información, como lo ilustra el siguiente cuadro.

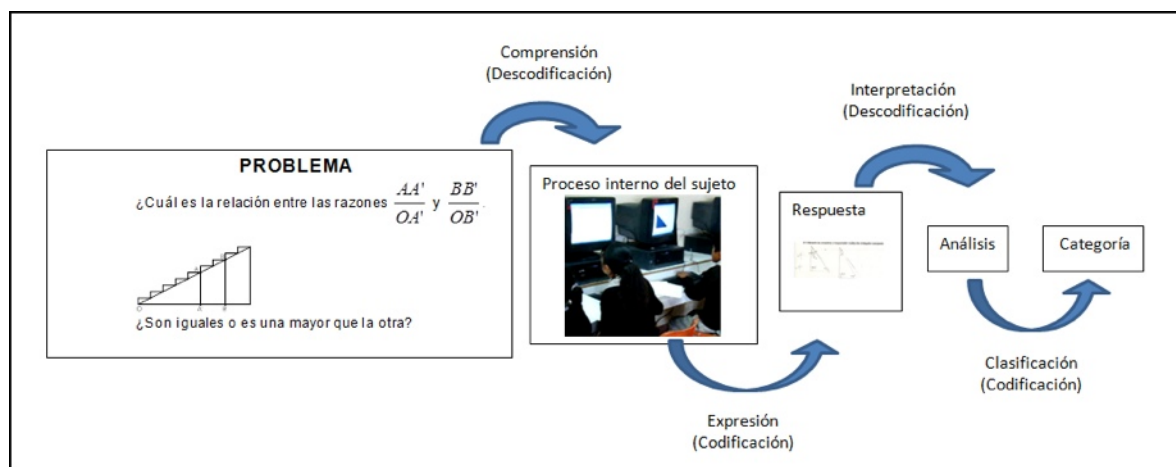


Figura 1. Esquema del proceso de comunicación.

Cuando el alumno, en los dos contextos establecidos, se enfrenta con el problema hay un procedimiento de descodificación, comprende el problema y busca distintas alternativas para llegar a la solución. Cuando expresan la solución a la que llega, usa un procedimiento de codificación lo que le permite producir una respuesta (Filloy 1997). Esta respuesta nos va a permitir interpretarla y clasificarla dentro de categorías, que nuevamente estamos descodificando la información arrojada para establecerla en categorías.

Los procedimientos que nos implica, una descodificación de datos dados a través del discurso con los cuatro elementos puesto en juego (alumno, maestro, el conocimiento, y la computadora), y una codificación al clasificar las respuestas obtenidas y para ello se utiliza la metodología mencionada. Es así como se implican las componentes cognitiva y de comunicación. Cabe mencionar que se pueden presentar obstáculos en la descodificación o codificación, ya sea que se den de manera incompleta o errónea.

Componente de enseñanza

En esta componente, la idea principal es el de poner en marcha el Modelo que se diseñó para la escalera recta, con las 57 lecciones dividido para tres momentos. Un modelo cuyo objetivo es la utilización de la computadora como medio, en donde se observaran las obstrucciones que se presentan. El primer momento, tiene como objetivo el manejo del software por medio de actividades que lo conduzcan a la manipulación y conocimiento de las herramientas que lo componen. Para el segundo momento, estamos hablando para el segundo año de intervención, los alumnos trabajan con el software sin procedimientos exactos como se hacía en las primeras lecciones. Las lecciones son referidas a triángulos semejantes, considerando sus ángulos, y sus lados. Hasta llegar al Modelo de la Escalera, en donde son capaces de realizar la escalera recta con el software. Con preguntas y problemas que conducen a toda esta construcción, como las siguientes:

¿Cuánto mide el peralte de cada escalón?

¿Cuánto mide la huella de cada escalón?

- Se quiere construir una escalera recta con todos los escalones iguales, con una elevación de 3 m y una planta de 4.20m. ¿Qué número de escalones debe tener, si se quiere que la huella mida 35 cm? (se quiere una escalera cómoda).
- Se sabe que la pendiente de una escalera es 2.10, encontrar el peralte de un escalón que tenga 30 cm de huella.
- Hallar la huella de un escalón de una escalera recta con elevación de 3 m y planta de 2.50m y cuyo peralte mide 30 cm.
- En una escalera recta para subir .16m se necesita avanzar .83m, ¿Cuánto se necesita subir para avanzar 2.30m?

Para el tercer año, se selecciona a los alumnos, para el caso del Centro Escolar Hermanos Revueltas, se considera a todos, por la cantidad de alumnos. Se inicia con los estudios de caso, en donde se hace las entrevistas vídeo grabadas, y se realiza las preguntas en cuanto a la pendiente de la recta.

Esquema del desarrollo de experimentación

El siguiente esquema describe el desarrollo de la experimentación.

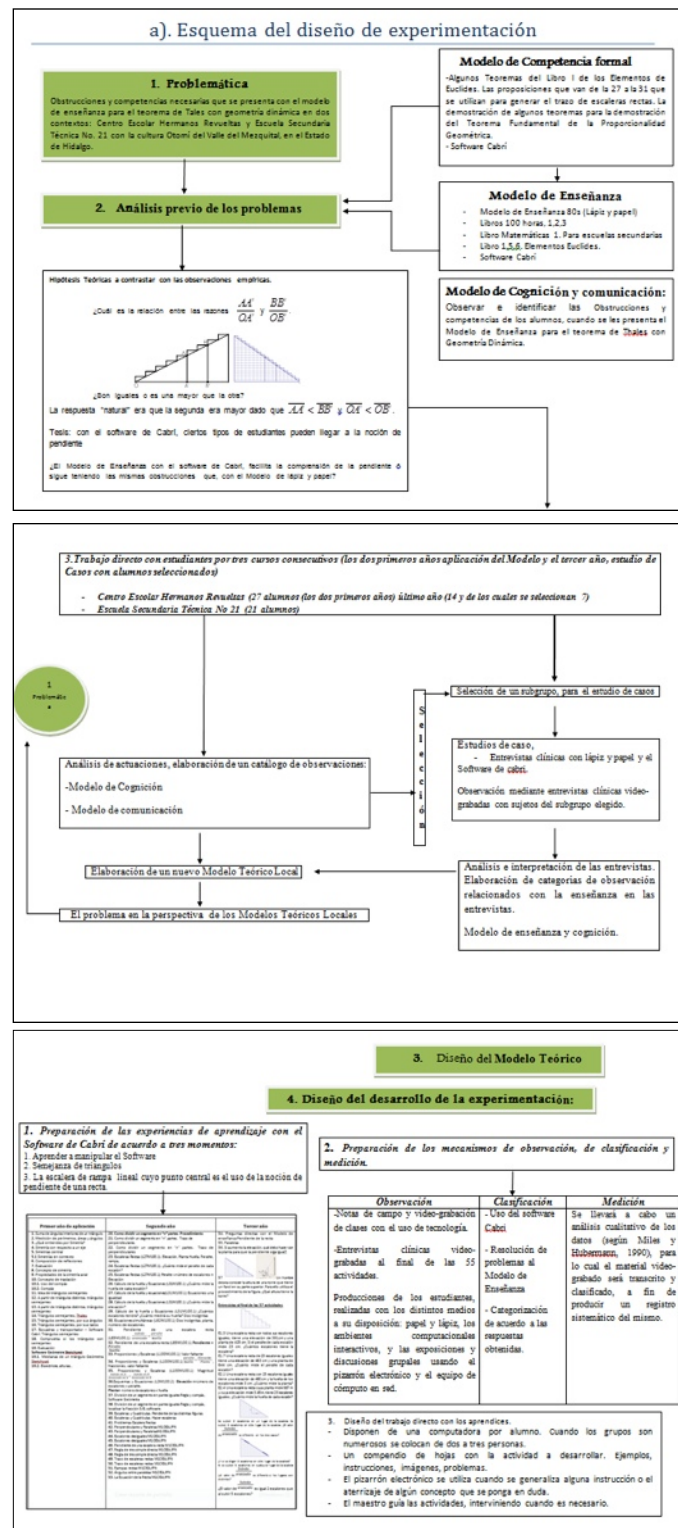


Figura 2. Esquema. Desarrollo de la experimentación.

La problemática es el punto de partida, el diagrama comienza con la elaboración de un Modelo Teórico Local con el uso del recurso tecnológico, que se diseñará en las cinco primeras etapas. Después de haber hecho un estudio experimental, se confronta el Modelo Teórico Local con lo que ocurre en el desarrollo empírico de la experimentación. Se realiza una fase de interpretación y categorización a partir de los resultados.

La problemática inicial se enmarca en la perspectiva de un Modelo Teórico Local, cuyo diseño vuelve a las primeras fases del esquema, y con ello la realización de otro modelo y así sucesivamente, a esto se le llama la recursividad de la investigación (Filloy 1999).

En esta recursividad, puede darse que las tesis teóricas para el Primer Modelo Teórico Local se muestren insuficientes para estudiar e interpretar las observaciones empíricas hechas en el Modelo de Enseñanza con recurso Tecnológico, ó en su caso algunas tesis tal cual han sido elaboradas en el Modelo Teórico Local, deberán ser desechadas o la necesidad de adaptar otras que se adecuen mejor a la interpretación de lo observado, (Filloy 1999 llama a esto lo efímero de ciertas tesis).

Algunos resultados

Cuando se les pregunta acerca del problema geométrico (Modelo de Enseñanza de la escalera con rampa lineal), para comprender este obstáculo, se analiza uno de los estudios de caso aplicado en el proyecto de los 80s. Se elige a TN (Tania) y para el modelo de enseñanza actual se elige a FN (Fernando), ejemplificando las respuestas que se arrojó en el momento de las entrevistas vídeo grabadas, para tener mayor visibilidad de las posibilidades y limitaciones del Modelo de Enseñanza.

La pregunta que se le realiza es la siguiente:

“Compara la razón entre lo subido y lo avanzado en A con la razón entre lo subido y lo avanzado en B”

¿Cuál es la relación entre las razones $\frac{AA'}{OA'}$, $\frac{BB'}{OB'}$?

¿Son iguales o es una mayor que la otra?

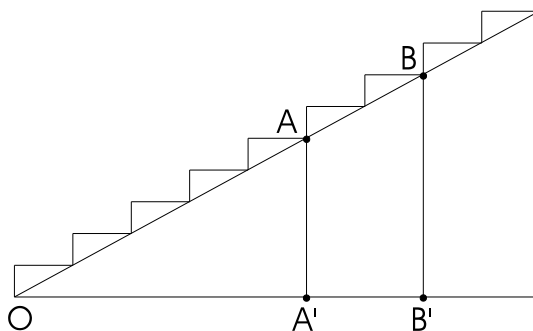


Figura 3. Escalera con pendiente lineal, donde se colocan dos puntos A y B.

Todos los estudiantes cometieron el error de lectura ó error natural (Filloy 1999)

Primer Modelo TN

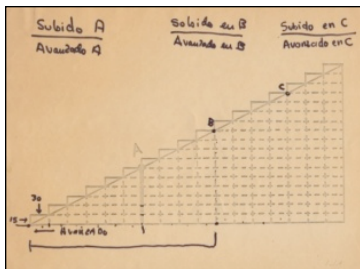


Figura 4. Modelo de la escalera

¿Tú cómo crees que sean estas fracciones? Son iguales, distintas, mayor una que la otra, ¿Cuál es, ó como es...?

TN: son iguales

E: ¿iguales?

TN: bueno, cómo que como son

E: sí, las fracciones entre sí.

TN: Esta es mayor (señalando la que contiene la letra B), porque éste sube más.

E: ¿Mayor? ¿y si ponemos otro punto C? (E coloca otro punto, más arriba que B. en la escalera dada, ver fig. 1.1.1) ¿Cómo serían las fracciones entre sí?

TN: Sí, aparece subido y avanzado.

E: Sí, pero ¿cómo fracción? Como fracción aparece un número aquí y otro aquí (señalando el numerador y el denominador de cada una de las expresiones planteadas para A, B, y C).

TN: Van a ser equivalentes... (Titubea)... Bueno, ésta (señalando la expresión que contiene a C) va a ser mayor.

Segundo Modelo FN

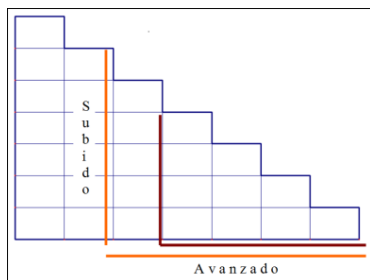


Figura 5. Modelo de Enseñanza con Recurso Tecnológico.

E:.... pero mi pregunta anterior, yo voy a calcular la pendiente en el punto A teniendo lo subido entre lo avanzado, y luego lo calculo entre el punto B, lo subido entre lo avanzado, o sea lo calculo aquí y lo calculo acá, y mi pregunta es, lo que sale es mayor, aquí que aquí, o es menor aquí que acá ¿o como son?

Fn: es mayor

E: es mayor

Fn: porque aquí hay más distancia. por ejemplo si aquí son 23 y aquí son... cuatro escalones, aquí como son cinco va a ver más distancia

E: no pero yo digo, e... lo subido entre lo avanzado

Fn: pues va a ser mayor el A porque...

E: lo subido entre lo avanzado va a ser mayor, el A que el B, haber calculálo, vamos a calcular... este es el tres...

Como se observa en la primera entrevista, la respuesta natural es que “C” es mayor que A y B. De acuerdo con lo reportado en Filloy (1999) todos los estudiantes cometieron este error.

En el segundo Modelo de enseñanza se comete el mismo error, sin embargo, el proceso para llegar a la respuesta es diferente. El argumento que FN tiene es que hay mayor distancia, “porque aquí hay más distancia, por ejemplo si aquí son 23 y aquí son... cuatro escalones, aquí como son cinco va a ver más distancia”, Por el número de escalones que tiene del punto A, A’ (línea anaranjada), que escalones que tiene el punto B, B’ (línea roja) , por lo tanto va a ser

mayor. En el lenguaje de TN, “porque éste sube más” En palabras distintas, es que la vista hace que el que tenga mayor distancia es mayor, es aquí como menciona Filloy (1999) el error de lectura o natural.

Una vez identificada la situación que obstaculiza el proceso, es inducir al alumno a verificar sus respuestas por medio de operaciones hasta llegar a comprobar con los resultados si la respuesta que dio es correcta. Si vemos en la transcripción, FN, insiste mucho en sacar la huella para tener establecidas las medidas, ya que se le comenta que de peralte tiene 23 cm, quiere sacar la huella para obtener la planta, y poder operar.

- Alumnos que rectificaron sus errores con el primer modelo de enseñanza Filloy (1999) fue con la medida del peralte y de la huella, estableciendo las fracciones $\frac{AA'}{OA'}$ y $\frac{BB'}{OB'}$, dividiendo el numerador entre el denominador hasta reducir a un número decimal entonces pudieron darse cuenta de la igualdad.
- Los alumnos que decían que el punto $A > B$, por el número de escalones recorridos, y darse cuenta del error al momento de realizar la operación correspondiente, Filloy (1999) “Tendieron a dar explicaciones geométricas generales, declarando que el escalón es el mismo en cada punto sobre la escalera, porque la rampa es recta”
- A los alumnos que se le aplica la segunda entrevista, después de un año, sabiendo que era constante en la rampa, llamándole la pendiente de la línea, continuaron cometiendo el mismo error. Filloy (1999) “Podemos afirmar por eso, que la familiaridad con las afirmaciones de la proporcionalidad geométrica no es pertinente para el desarrollar la competencia que implica la pregunta P”
- Algunos alumnos del estrato medio (de acuerdo con la clasificación), rectificaron no por la parte geométrica, sino por la parte aritmética.

Estos son algunos de los resultados que hasta el momento se tienen, la aplicación de las actividades en los dos contextos, tienen un proceso desigual. Para el Centro Escolar Hermanos Revueltas se encuentra en el tercer año, con los estudios de caso. Para el estado de Hidalgo, en el segundo momento de aplicación que es el segundo año. Se espera que al término de las aplicaciones se pueda hacer un cruce de información de los tres momentos del modelo de enseñanza, y de los dos contextos. Para dar respuesta a las preguntas que se hacen en torno a la investigación

Referencias y bibliografía

- Bishop, Alan J (1988). *Mathematical Enculturation. A Cultural perspective on Mathematics Education*. Kluwer Academic Publishers.
- Fillooy, Eugenio. (1998). *Didáctica e Historia de la geometría Euclidiana*. Grupo Editorial Iberoamérica S.A. de C. V. México Distrito Federal.
- Fillooy, E; S, Lema.(1996). El Teorema de Thales: significado y sentido en un sistema matemático de signos. En *investigaciones en Matemática Educativa*. México, Grupo Editorial Iberoamericana, pp 55 – 75.
- Fillooy, Eugenio, Rojano, Teresa, *Educational Álgebra A Theoretical and Empirical Approach Series: Mathematics Education Library*, Vol. 43 2007.
- Fillooy, E. (1999) *Aspectos teóricos del álgebra educativa*, México, Grupo Editorial Iberoamérica (Sociedad Mexicana de Matemática Educativa).
- Fillooy, E., y Rojano, T. (1984). La aparición del lenguaje Aritmético-Algebraico. *L'Educazione Matematica* Año 5, No. 3, pp. 278 – 306, Cagliari, Italia, (1984).
- Fillooy, E., y Rojano, T. (1989). Solving equations: The transition from Arithmetic to Algebra, *For the Learning of Mathematics*, Vol. 9, Num. 2, pp. 19 – 25.
- Perner, Josef. (1994). *Comprender la mente representacional*. Editorial Paidós. Barcelona España. P105.
- Plan y Programas de Educación Básica, Primaria. Secretaría de Educación Pública. 1993.
- Puig, L. (1993). Análisis fenomenológico, in Rico, ed. *La educación matemática en la Enseñanza Secundaria*. Barcelona: ICE/ Horsori.