



Integrando la tecnología CAS al aula de matemáticas de secundaria

Lourdes **Guerrero**

Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

México

Lourdes.Guerrero@gmail.com

Francisco **Alarcón**

Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

México

francisco.aahumada18@gmail.com

Resumen

Se presentan los resultados de una investigación cuyo propósito fue estudiar la evolución de las formas representacionales producidas y utilizadas por un grupo de estudiantes de secundaria, cuando trabajan en actividades diseñadas para utilizar la calculadora CAS como herramienta de aprendizaje. Se usan dos marcos conceptuales: la teoría de representaciones semióticas (Duval, 1993) y la teoría de representaciones funcionales (Hitt, 2007). Bajo estos marcos de trabajo, los resultados muestran que los estudiantes desarrollan capacidades de representación a partir del uso de representaciones pragmáticas; éstas les permiten dar sentido a los conceptos y procesos matemáticos expresados en las actividades, jugando la calculadora un papel central para reflexionar y generar discusiones acerca de las representaciones utilizadas para expresar relaciones funcionales y ecuaciones.

Palabras clave: Tecnología y enseñanza de la matemática, Representaciones funcionales, Representaciones institucionales, Regresión lineal.

Introducción

Unos de los retos actuales más importantes en la educación básica, media y superior, es tratar de generar mayores oportunidades de aprendizaje para los estudiantes, que les permitan elevar su nivel de aprovechamiento escolar y desarrollar habilidades y competencias tanto específicas como generales (SEP, 2006). Con las nuevas propuestas de reforma escolar, los modelos de enseñanza hacen énfasis en la resolución de problemas y el desarrollo de competencias como bases teóricas que guían el diseño de los planes y programas de estudio.

Objetivos

Tratando de dar continuidad al nuevo modelo educativo, el proyecto de investigación

“Estudio de representaciones mediadas por la calculadora CAS”¹, en el cual está enmarcado este trabajo, tiene como objetivo estudiar la evolución de las representaciones producidas y utilizadas por los estudiantes durante la resolución de problemas apoyándose de nuevas metodologías de aprendizaje, en la que los estudiantes pueden desarrollar capacidades de comunicación y cooperativismo. Una de dichas metodologías es la denominada ACODESA: Aprendizaje cooperativo, Debate científico y Auto reflexión (por sus siglas en francés), propuesta por Hitt (2007). En particular, en este trabajo se reportan los resultados del análisis de las producciones representacionales de estudiantes de secundaria, tanto verbal como escrita, cuando utilizan la calculadora CAS como herramienta para la solución de problemas.

Cuando un estudiante se enfrenta a un problema es común que use representaciones *funcionales* (Hitt, 2003a) con el fin tratar de entender y dar sentido al problema que se le presenta. Éstas son representaciones que apoyan el desarrollo del entendimiento de la situación; los dibujos, las anotaciones y grafías son casos de representaciones espontáneas que funcionan bajo ciertos esquemas como mediadores del aprendizaje matemático. Son mecanismos espontáneos importantes en las tareas de reflexión y razonamiento que muchas veces están lejos de ser las representaciones esperadas por el profesor (representaciones *institucionales*); por lo que su estudio y análisis nos ayuda a tener un mejor entendimiento del pensamiento y las ideas de los estudiantes.

Este trabajo es el resultado de estudiar las representaciones espontáneas producidas por un grupo de estudiantes de primer año de secundaria cuando trabajan en actividades de resolución de problemas, bajo un ambiente de aprendizaje colaborativo, de debate científico y auto-reflexión.

Marco teórico

Dos marcos conceptuales conforman la base teórica de la investigación. En primer lugar, la teoría de representaciones semióticas propuesta por Duval (1993), utilizada aquí como un marco conceptual para tratar con las representaciones que usualmente se pide a los estudiantes producir y estudiar en la escuela, llamadas representaciones institucionales y, en segundo lugar, la teoría de representación funcionales (Hitt & Morasse, 2007) para analizar las producciones de los estudiantes. Así mismo, se han incorporado también aspectos teóricos relativos a la metodología que fue utilizada durante la investigación.

Si bien, lo que interesa en el aprendizaje son los objetos matemáticos que están siendo representados, y no sus posibles diferentes representaciones (Deledicq & Lassave, 1979), éstos no son directamente asequibles a partir de nuestra percepción o de la experiencia intuitiva inmediata, como sucede con los objetos físicos. Es necesario representarlos y poder manipularlos; es decir, proporcionar representantes y poder actuar con y sobre ellos a través del sistema de representación utilizado. Un ejemplo de la relación que guarda el sistema de representación con el tipo de actuación aplicable al objeto matemático es el cálculo numérico, ya que en éste los algoritmos operativos dependen del sistema de escritura seleccionado.

Por lo anterior, podemos manifestar que las representaciones juegan un papel muy importante en la actividad matemática, tanto en su papel de representantes de objetos matemáticos como en posibilitar formas de actuación específicas para ellos.

¹ Agradecemos a Texas Instruments por el apoyo proporcionado a este proyecto de investigación.

Las representaciones semióticas son producciones que se caracterizan por el empleo de signos pertenecientes a un sistema. Así, éstas son un medio de exteriorización de las representaciones mentales. Para que un sistema semiótico pueda ser un registro de representación debe permitir tres actividades cognitivas fundamentales (Duval, 1993): 1) La formación de una representación que pueda ser identificada como tal; 2) El tratamiento de una representación; y, 3) La conversión de una representación. Duval (1996) señala que de las tres actividades cognitivas anteriores, sólo las dos primeras son tomadas en cuenta en la enseñanza. Se supone implícitamente que la tercera actividad cognitiva, la conversión, es un resultado natural de las otras dos actividades.

Tres tareas que pueden favorecer la fluidez para trabajar con diferentes representaciones (Holton & Thomas, 2003) son tareas de variación comparativa, tareas relacionadas con tratamientos y tareas de producción de representaciones semióticas complejas.

Por su parte, Hitt (2003b), haciendo referencia al trabajo de Duval, señala que éste se centra en las representaciones institucionales; esto es, en las que utilizan los profesores, los libros de texto o las que aparecen en la pantalla de la computadora, pero no toma en consideración, explícitamente, las representaciones que producen los estudiantes en el proceso de dar sentido y tratar de entender una idea, concepto o problema. De lo anterior se desprende que uno de los propósitos de la enseñanza debería ser lograr que las representaciones funcionales evolucionen hacia la formación de representaciones institucionalizadas, ya que estas últimas son las acordadas y compartidas por la comunidad matemática como medio de comunicación y expresión de ideas.

Los aportes teóricos de Duval y Hitt revelan que, para la construcción de conceptos, es fundamental considerar tareas de conversión entre representaciones y situaciones que favorezcan la evolución de las representaciones espontáneas de los estudiantes hacia representaciones institucionalizadas, en los procesos de resolución de problemas. Así mismo, comprender el papel que juegan los sistemas semióticos de representación en la construcción de conceptos matemáticos nos ayudará a entender la forma en que los estudiantes construyen conceptos.

Con respecto a la metodología empleada en la experimentación, utilizamos la propuesta de Hitt (2007), quien considera que el aprendizaje cooperativo, debate científico y autorreflexión son tres aspectos centrales del quehacer matemático que debemos favorecer en el aula. Estos aspectos se enmarcan bajo el nombre de “metodología ACODESA” (Hitt, 2007) (por sus siglas en francés).

Metodología

Sujetos, métodos y procedimientos

En el estudio que se reporta participaron veintitrés estudiantes cursando el tercer año de secundaria del turno vespertino, en la escuela urbana Secundaria Técnica No. 102 de la ciudad de Uruapan, Michoacán. Estas actividades se llevaron a cabo en el aula del grupo, contando con las herramientas necesarias como: hojas de trabajo, calculadoras CAS con las actividades precargadas, proyector de acetatos, video proyector, computadora, pizarrón, etc.

Se conformaron 8 equipos numerados del 1 al 8, el equipo 5 de dos participantes y los otros 7 de 3 participantes. Se trabajaron cinco sesiones, con una duración aproximada de dos horas cada una. Se abordaron diferentes temas relacionados con el uso de múltiples representaciones con las actividades denominadas “Introducción al uso de la calculadora CAS”,

“Regala tiempo aire”, “Ricos chocolates”, y “La escalera”. En particular, en este trabajo se exponen los resultados de la actividad denominada “Regala tiempo aire”, cuyo propósito es que los estudiantes analicen y modelen matemáticamente una situación real usando diferentes representaciones. Se trata de una situación a la que cotidianamente se enfrentan los estudiantes que viven en zonas urbanas: la transferencia de saldo de un teléfono celular a otro.

Las sesiones se realizaron los días del 8 al 12 de marzo de 2010, en horario de 13:30 a 15:30 horas (grupo del turno vespertino), con el profesor como encargado de dirigir las sesiones, dos investigadores de intervención mínima tomando notas de observación y tres cámaras móviles de videograbación para registro de información.

Las fuentes de datos consistieron en: Expresión escrita de los estudiantes en hojas de trabajo, exposición en acetatos y pizarrón; notas de campo de dos investigadores y videograbaciones capturando la expresión verbal de los estudiantes tanto en la etapa de trabajo en equipo, como en la de debate y exposición.

La implementación de la metodología ACODESA durante la investigación que se reporta consistió en:

- Implementación individual de la actividad para que los estudiantes traten de entender El problema que se les plantea, y generen ideas y posibilidades de solución iniciales. El tiempo transcurrido durante esta etapa fue de 15 minutos y en ella cada estudiante contó con una hoja de trabajo y una calculadora CAS.
- Formación de ocho equipos de dos y tres estudiantes con desempeño académico diferente, de acuerdo con el profesor del grupo; distribución de roles en cada equipo y distribución de materiales. Durante esta etapa, que dura aproximadamente 30 minutos, se proporciona a los equipos una nueva hoja de trabajo (una por equipo para evitar individualizar el trabajo), una calculadora, así como todos los materiales que soliciten (lápices, lapiceros, reglas, escuadras, etc.)
- La siguiente etapa, que duró aproximadamente 50 minutos, consistió en el debate científico inducido mediante la elaboración de una exposición para presentar los resultados de equipo al grupo completo. Para dar pie al debate, los investigadores seleccionaron tres equipos que tenían planteadas soluciones parciales o soluciones erróneas, con el fin de que su integrante elegido como expositor, mostrara sus resultados a toda la clase.
- La última etapa registrada consistió en la fase de autoreflexión. Durante esta fase los estudiantes trabajan nuevamente en forma individual resolviendo la misma actividad. Esta etapa permite comparar los resultados iniciales con aquellos que fueron desencadenados en cada individuo por el trabajo colaborativo y el debate.
- Una última etapa de la metodología consiste en la institucionalización de los contenidos matemáticos involucrados en la actividad. Esto es, el profesor organiza las ideas que han desarrollado los estudiantes, revisa los conceptos matemáticos involucrados y los expone utilizando representaciones institucionales ligándolas con las representaciones funcionales utilizadas durante el desarrollo de la actividad. Esta etapa no fue registrada como fuente de información para la investigación; sin embargo, fue realizada por el profesor durante la semana siguiente a la aplicación de las actividades; retomando con ello los contenidos curriculares.

La actividad Regala tiempo aire

En este trabajo se reportan los resultados de la implementación de la actividad “Regala tiempo aire”; actividad desarrollada para ser aplicada por el profesor del grupo sin que éste tenga que invertir tiempo en su diseño, ya que puede cargarse a la calculadora vía una computadora o de una calculadora a otra. Además, el profesor cuenta con una “Guía para el manejo de la actividad”, que le permite familiarizarse con la misma y saber cómo utilizarla en el aula, desde su cargado en las calculadoras.

En la experimentación, la actividad es cargada en todas las calculadoras que se facilitan a los estudiantes; así mismo, se les proporciona en una hoja de trabajo (formato lápiz y papel) que deberán llenar tanto en las etapas de implementación individual como en la de equipo.

La actividad “Regala tiempo aire” es un Problema (Numerado con 1 en la calculadora) que se compone de páginas (numeradas con 1.1, 1.2, etc.) de la calculadora; cada una de ellas está compuesta de una o más de las siguientes aplicaciones: 1: Calculadora, 2: Gráficos y Geometría, 3: Listas y Hojas de Cálculo, 4: Notas, y 5: Datos y Estadística.

La primera página describe de manera muy general la actividad y las áreas de contenido en donde se ubican los conceptos matemáticos involucrados; mientras que la segunda se compone de dos aplicaciones (representaciones) que se despliegan simultáneamente y con las que podemos interactuar: un texto y una hoja de cálculo. En ésta se pide a los estudiantes que respondan a tres preguntas (marcadas como a, b y c), relacionadas con el envío de saldo de un teléfono a otro. Así mismo, se pide a los estudiantes que llenen las celdas vacías en la tabla que se les presenta en la hoja de cálculo.

Continuando esta misma línea, la página 1.3 incluye una explicación verbal de la actividad a realizar en la página subsiguiente (1.4), que despliega una hoja de Datos y Estadística, preparada para representar una regresión lineal (representación gráfica).

La actividad cargada en la calculadora continúa con una serie de cuestionamientos que llevan al estudiante a construir un modelo matemático de la situación cada vez más complejo, incorporando nuevas situaciones que pueden suscitarse en la transferencia de tiempo aire.

Mostramos en la siguiente secuencia de figuras (de la 1 a la 5) el trabajo dirigido hacia la construcción de una función lineal, ya no solo en términos de una relación entre dinero y saldo; sino una función lineal como modelo más abstracto de la situación.

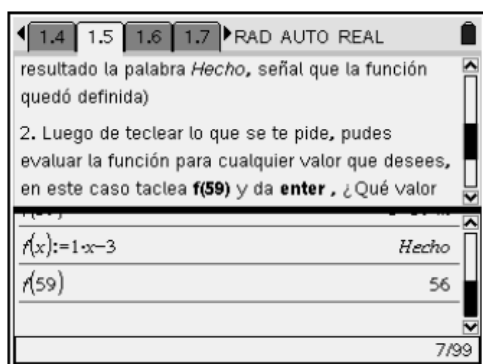


Figura 1. Definición de una función

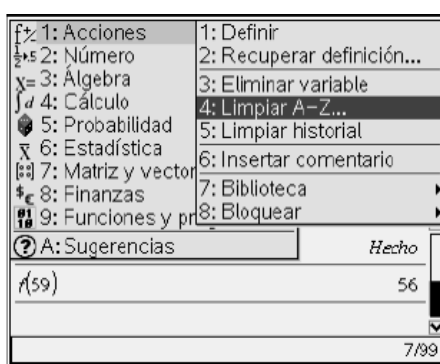


Figura 2. Evaluación de la función

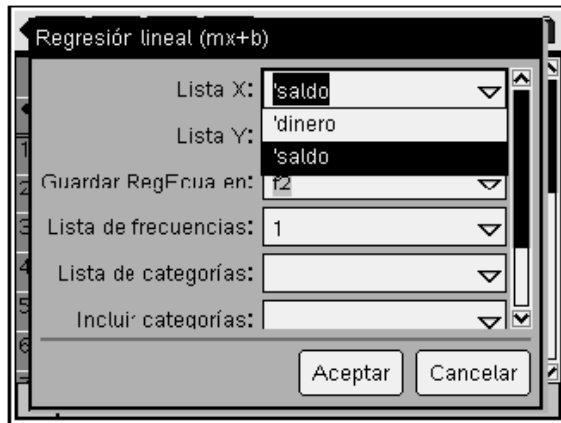


Figura 3. Determinación de las variables

	Título	RegEqn
1	Regresión l...	$m \cdot x + b$
2		1.
3		-3.
4		1.
5		1.

D1 = "Regresión lineal (mx+b)"

Figura 4. Identificación de los parámetros y resultados numéricos de la regresión

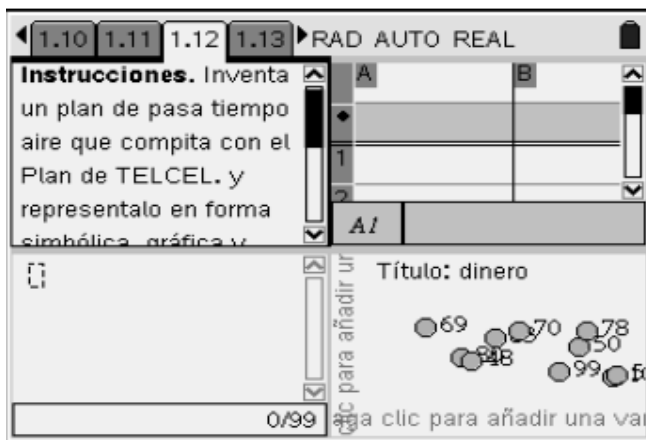


Figura 5. Cuatro representaciones del problema (Verbal, numérico, tabular, gráfico)

Resultados

Primeramente se revisaron las hojas de trabajo, acetatos y todo material adicional que los estudiantes consideraron importante proporcionar al estudio. Las observaciones de campo y esta primera revisión del material escrito, sirvieron como punto de partida para tener una visión global de los datos obtenidos y el tipo de representaciones producidas y utilizadas por los estudiantes. Lo anterior permitió que, en la etapa de análisis de los videos, se pudieran identificar los episodios importantes para la investigación; lo cual se realizó de acuerdo a los siguientes aspectos:

Los videos se dividieron episodios, considerando el tiempo de inicio y tiempo final de una conversación, que fueron ordenados en tablas, de acuerdo con el tiempo en el que se identifica la intervención de los estudiantes; es decir, en el momento en que se da un intercambio de ideas. Así, las tablas de registro de información de los videos contienen: a) un identificador numerando el episodio; b) el intervalo de tiempo (relativo al video) de cada episodio; c) una descripción general de lo que están realizando los estudiantes en ese momento; y, d) se identifica dicha información como importante (o no) para los objetivos del estudio. De esta manera, toda la información de las videograbaciones queda almacenada en un formato que permite manejar y recuperar los datos de manera eficiente, ya el registro del tiempo ayuda a localizar en los videos todos los episodios, en caso de necesitar una nueva revisión de los mismos.

De los registros descritos en el punto anterior, se seleccionaron los episodios útiles para la investigación, extrayéndolos de las tablas y generando con ellos nuevos registros que, además de la información anterior, incluyen la transcripción de todos los diálogos de los estudiantes.

Finalmente se obtuvieron los diálogos que proporcionaban mayor información para los fines de la investigación y se ligaron con la producción escrita de los estudiantes y las notas de observación registradas por los investigadores.

Análisis y Resultados

El análisis realizado es de tipo descriptivo-documental, centrándose en las representaciones funcionales de los estudiantes y su relación con las representaciones institucionalizadas, que los estudiantes pudieron generar y observar en la calculadora.

Como ejemplo enseguida se describe y documenta el trabajo de un estudiante, realizado tanto de manera individual como en equipo. Se proporciona evidencia de cómo cambian las representaciones utilizadas en función de sus razonamientos e interacción con su compañero, y del uso que hace de la calculadora a lo largo de la actividad. En general ese tipo de análisis se realiza para cada estudiante y su equipo correspondiente en cada uno de los episodios de interés; se hacen observaciones a los mismos y se extraen conclusiones particulares.

Nos referiremos en este caso al trabajo de Marcos Adrian, quien participa en el equipo número 5 con su compañero Rigoberto.

Marcos realiza un trabajo individual interesante ya que se destaca su atención hacia el problema y su intento de solución. Al inicio de la actividad, se concentra en la hoja de trabajo y no hace uso de la calculadora. Responde las preguntas, colocando sus respuestas en la tabla que se solicita rellenar. Sus resultados muestran que ha entendido el problema y conoce la regla que le permite calcular los resultados.

Como se observa en la figura 6, Marcos puede responder sin problema a la pregunta inicial; más aún, muestra la operación que le permite dar la respuesta. De ésta inferimos que entiende y conoce la regla para calcular el saldo en pesos, que recibe una persona a la que se le ha pagado el servicio.



Figura 6. Respuesta de Marcos Adrián al primer inciso de la actividad

Sin embargo, comete algunos errores en los cálculos que reporta en la tabla, tratando de contestar a los b) y c) (ver figura 7). Estos errores también se ven reflejados en la gráfica construye después.

b) Si envías, en diferentes ocasiones, las siguientes cantidades, \$10, \$70, \$50, \$99 y \$5. ¿Cuánto le llegará de saldo al otro teléfono para cada uno de los envíos?

c) Si un teléfono recibió, en diferentes ocasiones, los siguientes saldos \$66, \$75, \$80 y \$45. ¿Cuánto dinero le enviaron originalmente, en cada caso?

Dinero_enviado	80	10	70	50	99	5	69	78	83	47
Saldo_recibido	73	7	67	47	97	No	66	75	80	45

Figura 7. Respuesta de Marcos Adrián a los incisos b) y c) de la actividad

Obsérvese que en el caso del valor de 5 para Dinero_enviado, Marcos indica que no es posible obtener el Saldo_recibido. Esto tal vez se deba a que está utilizando su experiencia personal como información para llenar la tabla, ya que posteriormente, en la discusión con su

compañero Rigoberto, le indica que no se puede enviar 5 pesos. Obsérvese también la existencia de algunos errores de cálculo, como en el caso del primer valor calculado, para el valor de Dinero_enviado igual a 80. Así mismo, parece ser que el hecho de que los primeros cuatro valores calculados contienen como una de sus cifras al “7”, esto provoca (tal vez un error de escritura que es inconsciente) un error en el quinto resultado, ya que en lugar de escribir 96, escribe 97.

Con respecto a la figura 8, que se muestra enseguida, al principio Marcos no entiende qué es lo que se le pide hacer, ya que no ha hecho uso de la calculadora y no comprende qué es una “dispersión de puntos”. Después de cuestionar y observar a su compañero de al lado, se da cuenta de que lo que se pide es una gráfica; se olvida de las instrucciones del inciso y realiza la gráfica que se muestra en dicha figura.

Aunque los ejes no han sido etiquetados, podemos observar que Marcos coloca en el eje vertical el Dinero_enviado y en el eje horizontal el Saldo_recibido. Su gráfica es una representación institucional que refleja adecuadamente las parejas de valores de la tabla como puntos del plano coordenado. Si bien se trata de una gráfica linealizada (unión de segmentos), ya que Marcos une los puntos con segmentos, no parece causarle ninguna dificultad, o provocar una reflexión en él sobre la no linealidad de la gráfica, indicando que él no esperaba que su resultado fuese una línea recta, como sería natural si hubiese reflexionado un poco más sobre la situación problema que se le presenta (situación con una tasa de crecimiento constante).

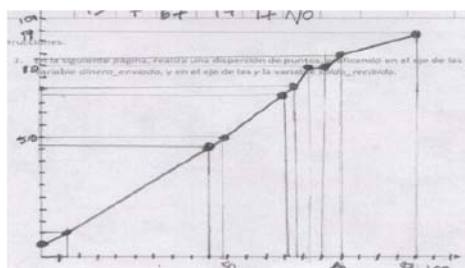


Figura 8. Representación gráfica de Marcos Adrián

La segunda parte de la actividad, es necesario utilizar la calculadora, ya que ésta se refiere a la construcción de una regla simbólica para el conjunto de datos dado, lo que para los estudiantes de secundaria aún no es posible realizar. En esta parte, Marcos Adrián recurre a su calculadora ingresando sus datos en una tabla como la que se muestra en la figura 9. Sigue las instrucciones descritas en los incisos 2 y 3 de la actividad, obteniendo la expresión algebraica que se solicita en el inciso 4, como se muestra en la Figura 9.

4. En tu hoja de trabajo escribe la expresión algebraica que te aparece.

$$y = 0.53x + 32.58$$

Figura 9. Representación simbólica de Marcos Adrián, con ayuda de la calculadora

Finalmente termina la actividad siguiendo las instrucciones proporcionadas en la tercera parte de la actividad, para construir una función con base en su resultado, evaluándola en dos valores distintos (ver figura 14), sin percatarse que uno de ellos coincide con un dato de la tabla construida previamente, cuyo valor le resulta distinto (ver figura 7).

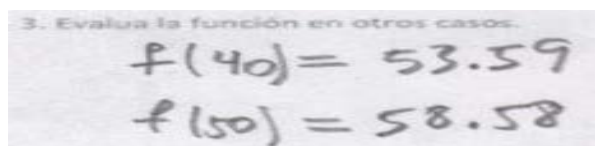


Figura 10. Evaluación de la función obtenida en la calculadora

Durante la etapa de trabajo en equipo, Marcos Adrián y Rigoberto intercambiaron sus soluciones y se dieron cuenta de que sus respuestas eran distintas. Rigoberto solamente pudo responder la primera tarea de la actividad ya que tuvo problemas con su calculadora, lo que no le permitió ingresar los datos y construir el modelo simbólico. Sin embargo, el trabajo que realizaron en equipo les permitió superar estas dificultades. Estos estudiantes responden correctamente la primera parte de la actividad y, como se muestra en la figura 15, comprueban sus respuestas poniendo una marca en cada una de las casillas comprobadas. Estas marcas muestran que en el caso de igual a 5, se les presenta una dificultad (una marca pequeña, de la que inferimos una falta de seguridad en su respuesta) ya que, como vimos en el trabajo de Marcos, él había señalado que no era posible enviar un saldo de \$ 5.00.

Nombre: Rigo Humberto Garbino
Marcos Adrián

Seguramente conoces el servicio que ofrece una compañía de teléfonos celulares, para pasar saldo de un teléfono a otro.

Instrucciones.

Contesta los incisos a, b y c. Así mismo llena la las celdas vacías de la tabla que se te presenta.

a) En este servicio, si envías \$80 de tu teléfono ¿cuál es el saldo real que recibe el otro teléfono? \$77.00

b) Si envías, en diferentes ocasiones, las siguientes cantidades, \$10, \$70, \$50, \$99 y \$5 ¿Cuánto le llegará de saldo al otro teléfono para cada uno de los envíos? \$7, \$67, \$47, \$96 y \$2

c) Si un teléfono recibió, en diferentes ocasiones, los siguientes saldos \$66, \$75, \$80 y \$45. ¿Cuánto dinero le enviaron originalmente, en cada caso? \$69, \$78, \$83, \$48

Dinero enviado	80	10	70	50	99	5	69	78	83	48
Saldo recibido	77	7	67	47	96	2	66	75	80	45

Figura 11. Trabajo del equipo formado por Marcos Adrián y Rigoberto

Como Marcos Adrián había utilizado previamente la calculadora, durante su trabajo individual, advirtió que las instrucciones de la hoja de trabajo le permitían construir la gráfica en la calculadora; por esta razón, antes de proceder a hacer la gráfica en lápiz y papel, acuerdan introducir los datos en la hoja de cálculo de la calculadora. Marcos apoya a Rigoberto en el uso de la misma, permitiéndole que él ingrese los datos y construyendo en ella la gráfica indicándole las instrucciones que se encuentran en la hoja de trabajo (ver figura 16).

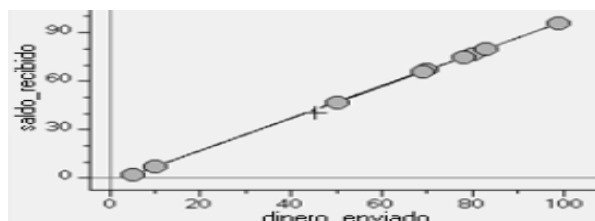


Figura 12. Gráfica en la calculadora, realizada por el equipo

Es hasta el momento de observar la gráfica que Marcos reflexiona sobre las diferencias con su trabajo individual, indicando que ahora “es una sola recta y no varias rectas pegadas”; sin embargo, no se da cuenta del cambio de las variables en los ejes coordenados. Como en la hoja de trabajo se pide una gráfica, Rigoberto se da a la tarea de reproducirla en lápiz y papel. En la figura 13 puede observarse que dicha gráfica no es una copia del resultado de la calculadora, sino una nueva gráfica obtenida a partir de la localización de parejas ordenadas en el plano cartesiano.

Fue una situación general que los estudiantes trazaran los segmentos horizontales y verticales (ver figuras 8, 13 y serie 14, 15, 16) para localizar los puntos en el plano. Cuando a Marcos y Rigoberto se les cuestionó sobre ello, mencionaron que la curva tenía que pasar por el cruce de dichas rectas y que por tanto tenían que estar en la gráfica; es decir, para ellos estas líneas conforman parte de la representación gráfica, y son incluso más necesarias que la gráfica misma que, como puede observarse en la figura 14, no fue trazada; restándole importancia por parte de estos estudiantes.



Figura 13. Gráfica en lápiz y papel realizada por Marcos y Rigoberto

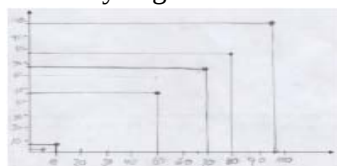


Figura 15. Representación gráfica del equipo 4

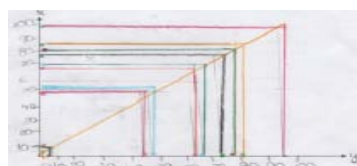


Figura 14. Representación gráfica del equipo 2

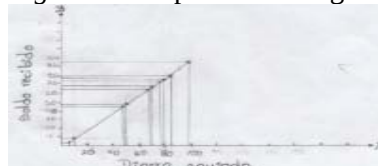


Figura 16. Representación gráfica del equipo 8

En la siguiente etapa de la actividad, los estudiantes no tienen problemas para seguir las instrucciones de la hoja de trabajo, ya que en ese momento ambos sabían cómo manejar los datos en la calculadora. Se presenta una discusión entre ellos cuando obtienen el modelo simbólico de los datos, ya que el resultado que muestra la calculadora les extraña (ver figura 17).

Figura 17. Modelo funcional resultante en la calculadora

Discuten un poco sobre el papel que juega el número 1 como factor de la variable x , y aún cuando saben que la escritura de este factor unidad es opcional en esa situación específica, deciden escribirlo en su hoja de trabajo ya que en ella se pide escribir la expresión algebraica que se despliega en la pantalla; sin embargo, al mismo tiempo olvidan la escritura de otros símbolos, como el signo de asignación ($:=$) y el signo de multiplicación ($\cdot$) que son explícitos en el formato de la calculadora.

Dos situaciones resultan relevantes del trabajo del equipo en la última etapa de la actividad. La primera de ellas es que aún cuando esta etapa tiene un carácter más abstracto, en donde ya no se habla de la situación contextual de la transferencia de tiempo aire, sino de la forma en que podemos evaluar una función lineal utilizando la calculadora, en su trabajo escrito, los estudiantes reflejan que no se han desprendido del contexto, ya que asocian el resultado $f(59) = 56$, obtenido de evaluar la función en 59, a una cantidad en pesos (ver figura 18).

Figura 18. El resultado expresado en pesos

Finalmente, evalúan la función para distintos valores. Dentro de ellos (figura 19) podemos observar el último caso, donde los estudiantes se sorprenden al ver que pueden evaluar la función incluso en valores no numéricos. Este resultado se obtiene por haber cometido un error al introducir los datos (escribir m5 en lugar de 5). Recordemos que, en el contexto del problema, el caso especial de una transferencia de \$5.00 resultó un problema para este equipo y, tratando de obtener el resultado en este caso, es que los estudiantes introducen m5. La sorpresa de haber obtenido un resultado válido, y no un mensaje de error, los hace olvidar su objetivo inicial.

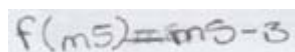
A photograph of a piece of paper with the handwritten equation $f(m5) = m5 - 3$ in blue ink. The paper is slightly wrinkled and has some other faint markings.

Figura 19. Resultados de la evaluación de la función para distintos valores de la variable independiente

Conclusiones

Las representaciones espontáneas son, para muchos estudiantes, una vía de acceso al conocimiento matemático. A través de ellas, los estudiantes reflexionan y se comunican con su profesor y otros compañeros. En la investigación que se llevó a cabo se estudiaron las representaciones producidas por los estudiantes cuando resuelven problemas en un ambiente de aprendizaje colaborativo, de debate científico y autorreflexión, utilizando la calculadora CAS.

Un elemento importante en este estudio fue el tipo de actividades utilizadas; éstas fueron diseñadas específicamente para tratar de promover el uso de la calculadora y las múltiples representaciones que se pueden trabajar en ella, utilizando una metodología de trabajo colaborativo para entender el problema, comunicar ideas y dar posibles resultados. La actividad que se reporta en este trabajo tiene la característica de poder ser utilizada en secundaria o en bachillerato, ya que se trata de una secuencia de tareas que van profundizando en los contenidos matemáticos relacionados con la regresión y ajuste de datos, conforme se avanza en su ejecución, permitiendo establecer etapas intermedias de desarrollo.

Desde la perspectiva de Duval (1993), relativa al papel que juegan las representaciones semióticas para el entendimiento de conceptos y desarrollo del razonamiento matemático, entendemos que el aprendizaje de los estudiantes tiene una componente representacional importante. El análisis de las representaciones generadas y utilizadas por los estudiantes, pone en evidencia la estrecha conexión entre éstas y el aprendizaje que se está construyendo.

A lo largo del presente estudio, observamos que los estudiantes primeramente construyen representaciones propias, aquellas que producen consciente o inconscientemente con el fin de dar sentido a un fenómeno, tratar de entender un concepto matemático o buscar formas de resolver un problema. Para posteriormente darse cuenta que dichas representaciones pueden ponerse en correspondencia con las institucionalizadas en la escuela a través de la enseñanza, de una calculadora o un libro de texto, al extraer las ideas esenciales relacionadas con el fenómeno o concepto bajo estudio. Durante el desarrollo de las actividades, el trabajo realizado por los estudiantes proporcionó evidencia de la forma en que se fueron desarrollando los razonamientos, durante la producción y análisis de diferentes representaciones. Esta información ha sido de gran importancia para lograr los objetivos de la presente investigación.

Así mismo, otra característica importante del estudio fue el contar con diferentes fuentes de datos; ya que éstas nos permitieron describir y documentar los resultados en términos de las producciones de los estudiantes. Particularmente, debido a que se dedicó un tiempo considerable a la etapa de planeación, tanto del estudio como de las actividades a aplicar a los estudiantes, los datos obtenidos fueron claros. Por ejemplo, el hecho de que a lo largo de todas las sesiones se

pusiera atención a que los estudiantes siempre tuvieran a su disposición los recursos necesarios, como: hojas, lápices y lapiceros de colores, acetatos, reglas y escuadras, recursos tecnológicos de proyección y cálculo, etc.

Es importante señalar que en un ambiente de aprendizaje colaborativo y de autoreflexión, como el que se propició durante la implementación del estudio, el profesor tiene un rol muy diferente con respecto a su trabajo tradicional. En este sentido, fue muy importante su preparación preliminar, para que permitiera que los estudiantes se acercaran mediante sus propias ideas, a las soluciones de los problemas; sin intervenir de manera sustancial, aún cuando observara que el trabajo de los estudiantes no fuese el esperado. Durante esta experiencia, observamos que el profesor realizó un gran esfuerzo para desprenderse de su papel autoritario e intervenir solamente para cuestiones aclaratorias, o con el fin de propiciar el debate entre los estudiantes. También es importante mencionar que los estudiantes mostraron buena disposición para participar en el estudio; pero que su trabajo en equipo mostró mejoras con respecto a su trabajo individual. Este tipo de resultados también proporciona evidencia de la contribución de la visualización matemática a los procesos de razonamiento de los estudiantes, ya que les permitió entender mejor el problema y mejorar en el uso de los recursos tecnológicos a su alcance. Por ejemplo, el análisis y documentación de los resultados en la actividad que se reporta, muestran que el trabajo en equipo ayudó sustancialmente a uno de sus integrantes a utilizar la calculadora, lo que le dio una mayor confianza para continuar su trabajo.

Bibliografía y Referencias

- Deledicq, A. y Lassave, C. (1979). *Faire des mathématiques. 4e. Manuel scolaire*, Ed. Cedic., Paris, France.
- Duval, R. (1993) Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En: F. Hitt (Ed.) *Investigaciones en Matemática Educativa II* (pp. 173-201). Grupo Editorial Iberoamérica, México.
- Duval, R. (1996) Quel cognitive retenir en Didactique des Mathématiques? *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 16, No. 3.
- Hitt, F. (2003a) Le caractère fonctionnel des représentations. *Annales de Didactique et de sciences cognitives*. Vol. 8 (pp. 255-271).
- Hitt, F. (2003b) Una reflexión sobre la construcción de conceptos matemáticos en ambientes con tecnología. *Boletín de la Asociación Mexicana Venezolana*, Vol. X, No. 2. Venezuela.
- Hitt, F. (2007) Utilisation de Calculatrices symboliques dans le cadre d'une méthode d'apprentissage collaboratif, de débat scientifique et d'auto-réflexion. En: Baron M., Guin D. & Trouche L. (Eds.) *Environnements informatisés et ressources numériques pour l'apprentissage: conception et usages, regards croisés* (Coll. Systèmes de formation et d'enseignement) (pp. 1-25).
- Hitt, F. y Morasse, Ch. (2009). Développement du concept de covariation et de fonction en 3^{ème} secondaire dans un contexte de modélisation mathématique et de résolution de situations problèmes. *Proceedings CIEAEM 61* – Montréal, Québec, Canada.
- Holton, D. y Thomas, M. (2003) Technology as a Tool for Teaching Undergraduate Mathematics. En: A. Bishop, M. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & F. Leungs (Eds.) *Second International Handbook of Mathematics Education* (pp 351-394). Kluwer Academic Publisher. Great Britain.
- SEP (2006) *Reforma a la educación secundaria. Fundamentación curricular. Matemáticas*. Dirección General de Desarrollo Curricular de la Subsecretaría de Educación Básica de la Secretaría de Educación Pública, México.