XIII CONFERENCIA INTERAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
2011 CIAEM 50 años
26 - 30 Junio, 2011
Recife, Brasil
del Comité Interamericano de Educación Matemática

Métodos y estrategias para calcular volúmenes de ciertas intersecciones de cilindros

Vicente **Carrión** Miranda,
Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV
México
Email: vcarion@cinvestav.mx
Pablo Rafael **Zamudio** Cortés
Facultad de Ciencias UNAM
México
Email: lobo@ciencias.unam.mx

Resumen

Se propone una forma de examinar los contenidos de un tema de cálculo integral para profesores de bachillerato o de licenciatura. Se emplean distintos métodos y estrategias para obtener, con el apoyo de una calculadora graficadora, el volumen del sólido comprendido entre dos tubos cilíndricos idénticos que se intersecan en ángulo recto. El trabajo comprende cinco etapas. Primeramente se utilizan recursos físicos manipulables para analizar el problema y examinar elementos geométricos y relaciones que intervienen en el proceso de resolución. Después se construyen configuraciones que rescatan las propiedades surgidas del análisis de los recursos físicos. Luego se obtiene el volumen del sólido con métodos y estrategias de tres maneras: con recursos geométricos, con el empleo de sumatorias y, finalmente, empleando integrales. Los contenidos propician el diseño y la elaboración en actividades e instrumentos de evaluación para el aprendizaje y la aplicación de los temas tratados. Las actividades, los ejercicios y los problemas que se resuelven en el taller son ejemplos de apoyos que pueden elaborarse a partir de los contenidos tratados.

Palabras clave

Método, estrategia, aproximación, procesos infinitos e integral.

Introducción

El taller está dirigido esencialmente a profesores de los niveles bachillerato y superior interesados en el aprendizaje de procesos que requieren de conceptos geométricos con el uso de recursos de cálculo integral. Se ponen en práctica diversas formas metodológicas de abordar problemas relacionados con el cálculo de volúmenes de sólidos y la búsqueda de estrategias que favorecen la elección y el empleo de métodos, procesos y procedimientos que guían la resolución. El problema que aquí se examina consiste en encontrar el volumen del sólido comprendido en la intersección de dos cilindros de igual radio y con ejes perpendiculares (Figura 1). Tal sólido es el bicilindro (Figura 2). Arquímedes (287 a.n.e.–212 a.n.e.) (Hogendijk, 2002) y Liu Hui (s. III d.n.e.) (Straffin, 1998) calcularon su volumen. El sólido comprendido en la intersección de tres cilindros de un mismo radio, con ejes perpendiculares dos a dos (Figura 3) es un tricilindro (Figura 4). Tanto al bicilindro como al tricilindro se les conoce con el nombre de sólidos de Steinmetz en honor al ingeniero de origen alemán Charles Proteus Steinmetz (1869-1923) (Hogendijk, 2002).

Las actividades que se proponen comprenden las siguientes etapas con acciones específicas en cada una.

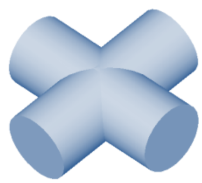


Figura 1


Figura 2

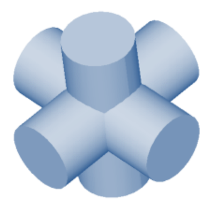


Figura 3


Figura 4

1. En primer lugar, con el uso de ciertos recursos manipulables, se pide a los profesores, organizados en equipos, que obtengan propiedades del sólido. De la visualización, observación, exploración, examen y análisis de las construcciones establecen conjeturas y descubren qué propiedades y qué relaciones de los elementos geométricos entran en juego para delimitar y elegir el método y las estrategias que deben considerarse en la resolución del problema.
2. En segundo lugar se construyen configuraciones geométricas para rescatar, estructurar y escribir las propiedades surgidas del análisis de los materiales manipulables.
3. En la tercera etapa se resuelve el problema por métodos geométricos que incluyen recursos intuitivos, no formales. Esto propicia un acercamiento al descubrimiento de fórmulas para calcular el volumen del sólido. También da pie para avizorar formas generales en las que puedan aplicarse procesos infinitos para el cálculo exacto del volumen del sólido.
4. En esta etapa se expresan algebraicamente los cálculos del volumen del sólido utilizando sumatorias. Esto permite, por una parte, obtener aproximaciones minimizando el error hasta donde se desee y, por otra, determinar, en forma exacta, el volumen por medio de cálculos que involucran procesos infinitos.
5. En la última etapa se indagan y seleccionan diversos métodos y estrategias para encontrar el volumen del sólido empleando conveniente y adecuadamente distintas clases de integrales.

En lo que sigue se presentan ejemplos que ilustran las etapas que se proponen para conducir las actividades. El taller se auxilia con el uso de calculadoras graficadoras.

Etapa 1. Obtención de propiedades geométricas del sólido a partir de materiales manipulables.

La resolución del problema no es tan difícil como lo es el construir materiales manipulables apropiados, o las configuraciones geométricas requeridas para exhibir e ilustrar las propiedades del sólido; sin embargo, a partir del uso de estos recursos se obtienen propiedades geométricas de sus elementos constitutivos. Se muestran algunas representaciones gráficas en las figuras 5, 6, 7 y 8.


Figura 5


Figura 6


Figura 7

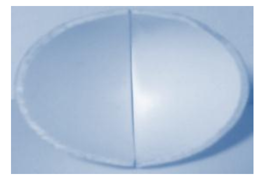


Figura 8

La superficie del bicilindro consta de cuatro gajos cilíndricos separados entre sí por cuatro curvas correspondientes a arcos congruentes de elipses (Figura 5).
Algunas preguntas que fundamentan las actividades, ejercicios y problemas del taller en la primera etapa son las siguientes:
¿Cuáles son los elementos geométricos y las medidas de cada uno de las cuatro caras curvas que definen la superficie del bicilindro? (Figura 5).
¿Cuánto miden los ángulos diedros formados por las caras planas de los gajos que forman el bicilindro? (Figura 5).
¿Qué curvas se obtienen con las intersecciones de los bordes del sólido, cuáles son sus ecuaciones y cuáles son las medidas de los elementos de esas curvas? (Figuras 13 y 14).
¿Qué clase de curvas son las que están sobre la superficie del sólido y sobre el plano que pasa por los dos puntos donde coinciden los cuatro gajos que forman al bicilindro, cuáles son las ecuaciones de estas familias de curvas y cuáles son las fórmulas para encontrar los elementos de esas curvas? (Figuras 6, 7 y 8).
¿Sobre qué clase de curvas están los arcos que se establecen con las intersecciones de las secciones de las figuras 6, 7 y 8 y los planos que giran en torno a una recta que pasa por dos puntos fijos elegidos sobre la superficie de las secciones consideradas? Considerar distintas posibilidades de elección de los puntos fijos; por ejemplo, los dos puntos donde concurren las parejas de vértices de los cuatro gajos que constituyen la superficie del sólido (Figura 5).

Etapa 2. Construcción de configuraciones geométricas para extraer propiedades incluidas en los recursos físicos.

Imaginemos dos tubos cilíndricos del mismo radio, idénticos, que se intersecan en ángulos rectos, dispuestos en forma horizontal que sus ejes se encuentran en un mismo plano. Si se hacen cortes horizontales en el sólido cada sección es de forma cuadrada (Figura 9). El lado del cuadrado de mayores dimensiones, el de la parte central, tiene la misma medida del diámetro de los cilindros.
En esta parte se construyen figuras que ilustran las posiciones relativas del sólido de Steinmetz con un plano y las de un plano con dos cilindros de igual radio que se intersecan perpendicularmente. Son ejemplos las figuras 9, 10 y 11.

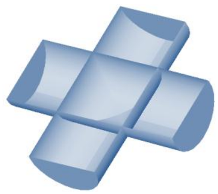


Figura 9

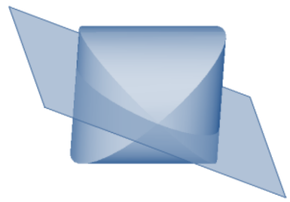


Figura 10

Figura 11

Las actividades, ejercicios y problemas que se proponen en la segunda etapa se relacionan con lo siguiente:

Analizar la simetría del sólido (Figura 10).

Describir la forma en que varían los cuadrados formados por la intersección de los cilindros (Figura 9).

Determinar la clase de curvas y analizar la forma en que varían considerando las diferentes posiciones relativas del plano con el sólido de Steinmetz. ¿Cuáles son las ecuaciones de estas curvas? (Figura 10).

Determinar la clase de curvas y analizar la forma en que varían si se consideran las diferentes posiciones relativas del plano con dos cilindros de igual radio que se intersecan perpendicularmente. ¿Cuáles son las ecuaciones de estas curvas? (Figura 11).

3. Acercamiento al cálculo del volumen del sólido con argumentaciones geométricas.

Se puede encontrar una fórmula para el volumen con conceptos geométricos elementales sin hacer uso formal de recursos de cálculo integral. En el ejemplo que se presenta podemos simplificar las cosas tratando sólo una parte del sólido, de ocho idénticas, obtenidas practicando cortes perpendiculares en tres direcciones (Figura 12). El corte horizontal produce dos sólidos en forma de tienda de campaña con bases planas y cada uno con cuatro paredes curvas (Figuras 13 y 14). Cada uno de estos nuevos sólidos se cortan en cuatro partes con dos cortes verticales perpendiculares. Consideramos una de las ocho partes del sólido inscrita en un cubo de lado *r* (Figura 15).

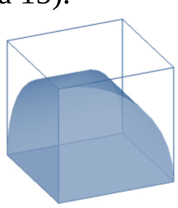


Figura 12

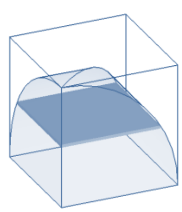


Figura 13

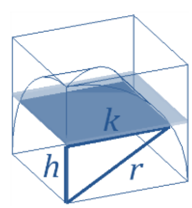


Figura 14

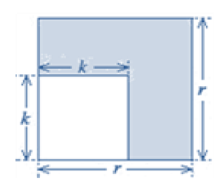


Figura 15

En lugar de encontrar el volumen de la parte que compone al sólido encontramos el volumen de la parte complementaria, entre la octava parte del sólido y el cubo de radio r. Imaginemos que practicamos cortes horizontales en el cubo a alturas h, desde la base (Figuras 13 y 14). Se tienen cortes de forma cuadrada de lado *r* (Figuras 13, 14 y 15). De éstos, las partes cuadradas que tienen vértices comunes con una de las aristas del cubo forman parte del bicilindro y los polígonos cóncavos restantes, en forma de L (hexágono L), son complementos del sólido (Figuras 13, 14 y 15). Si el lado de la placa cuadrada complementaria del hexágono L tiene longitud *k* entonces el área del hexágono L que le corresponde es igual a $r^2 - k^2$.

En la cara frontal del cubo se tiene un triángulo rectángulo (Figura 14) de hipotenusa r y catetos $h, k,$ donde h también corresponde a la altura a la que se encuentra el hexágono L, a partir de la base del cubo. Se tiene la relación $r^2 - k^2 = h^2$. En consecuencia, el área del hexágono L es $r^2 - k^2 = h^2$. Apoyados en un razonamiento semejante se puede inferir que para cada altura h el hexágono L es equivalente a un cuadrado de área h^2. Por tanto, el área de la parte complementaria del sólido aumenta gradualmente en la misma forma que se incrementa el área de un cuadrado de lado cero hasta el área de un cuadrado de lado r, en el corte de mayor altura, de área r^2. Por tanto, es equivalente a una pirámide donde el área de su base es r^2 y la altura es r; es decir, un pirámide de volumen $\frac{r^3}{3}$. Consecuentemente, el volumen del bicilindro es igual a

$8r^3 - 8\left(\frac{r^3}{3}\right) = \frac{16r^3}{3}$.

Las actividades que complementan el aprendizaje de la tercera etapa se basan en considerar una parte conveniente del sólido y transformarlo en una región equivalente. Otra forma de proceder es buscar capas del solido que conservan cierta relación con capas de otro sólido de volumen conocido.

4. Cálculos utilizando sumatorias.

En los ejemplos presentados en esta parte el sólido se divide convenientemente en capas con la finalidad de expresar su volumen en forma aproximada en una fórmula que incluye sumatorias. Una vez establecida la fórmula se puede emplear para encontrar aproximaciones sucesivas del volumen del sólido o para expresarlo en forma exacta obteniendo el límite de la expresión algebraica cuando el número de capas en que se ha dividido el sólido aumenta indefinidamente. A continuación se presenta un ejemplo de la búsqueda del volumen del sólido comprendido en la intersección de dos cilindros que sus ejes están en un mismo plano, son de igual radio, r, y se intersecan formando ángulo recto.

Ejemplo. El sólido representado en la figura 16 se divide en capas cuadradas superpuestas (Natanson, 1977) .

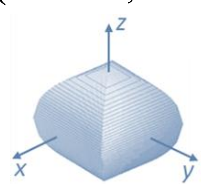


Figura 16

Dado que el sólido es simétrico respecto al plano xy se calcula el volumen de la bóveda correspondiente a su mitad, para $0 < z < r$.

La altura a la que se encuentra el prisma que ocupa la posición k es $\frac{kr}{n}$ (Figura 17). De las figuras 18 y 19 se tiene

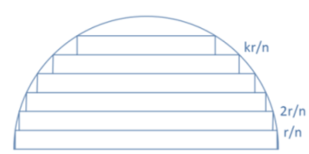


Figura 17

$x^2 = r^2 - \left(\frac{kr}{n}\right)^2$.

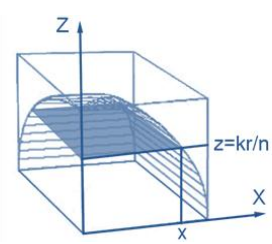


Figura 18

La longitud del lado del cuadrado que está en el plano $z = \frac{\mathrm{kr}}{\mathrm{n}}$ es

$$2x = \frac{2.\sqrt{r^2(n^2 - k^2)}}{n}.$$

El área de la base de los prismas cuadrangulares es igual a

$4x^2 = \frac{4r^2(n^2-k^2)}{n^2}$

y la altura es $\frac{r}{n}$. Una aproximación del volumen de la bóveda es

$$2\sum_{k=1}^{n}(4r^2)\left(\frac{n^2-k^2}{n^2}\right)\left(\frac{r}{n}\right)$$

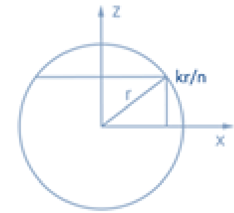


Figura 19

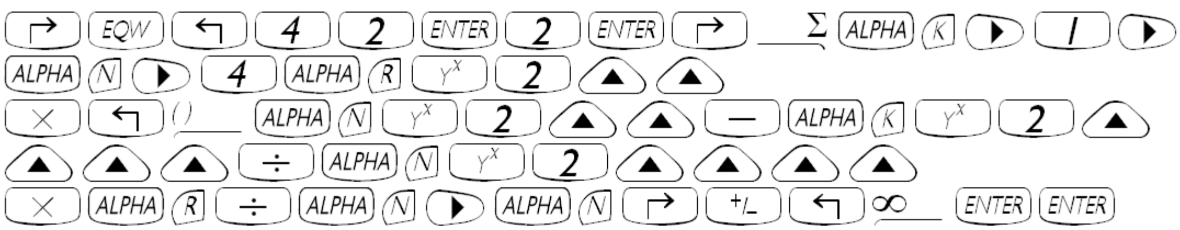
El volumen de la bóveda se obtiene al encontrar el límite.

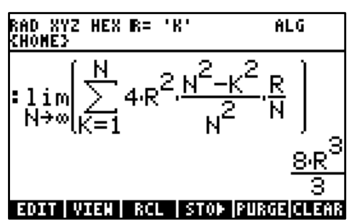
$$2\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(4r^2)\left(\frac{n^2-k^2}{n^2}\right)\left(\frac{r}{n}\right).$$

El volumen del sólido es el límite de la suma de los volúmenes de los prismas cuadrangulares cuando *n* tiende a infinito; es decir, $V = 8r^3 - \frac{8}{3}r^3 = \frac{16}{3}r^3$

.

Con la siguiente secuencia de teclas se obtiene el mismo límite en la calculadora ***HP 50g***:





Las actividades, ejercicios y problemas que se proponen para la cuarta etapa del taller se basan en cuatro aspectos. Primeramente se busca una forma de dividir una parte o todo el sólido en *n* capas de manera que al sumarlas se llegue a una fórmula para una aproximación del volumen en función de *n*. En segundo lugar, a partir de la fórmula encontrada, se obtienen aproximaciones específicas del volumen para ciertos valores de n. Luego se valúa la fórmula variando el valor de *n*, de manera que aumente su valor; si es posible, siguiendo algún patrón de crecimiento observar la tendencia del valor del volumen. En cuarto lugar, se obtiene el volumen del sólido mediante el límite de la función del volumen cuando *n* tiende a infinito.

5. Cálculo del volumen del sólido empleando integrales.

Esta parte ilustra la síntesis que representa la integral como un método para medir magnitudes factibles de reducirse a sumas infinitas de cantidades infinitamente pequeñas. Es importante la elección de los métodos y las estrategias para tener la clase de integral idónea al proceso de resolución. Se presentan dos ejemplos para encontrar el volumen del bicilindro con el empleo de integrales (Weisstein, consultado el 15 de enero de 2011).

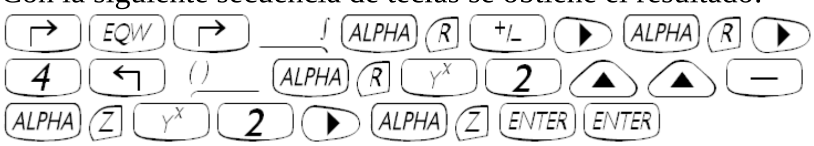
Ejemplo 1. El área del los cuadrados en el sólido de la figura 18 está dada por la función f(y) $=4(r^2 - z^2)$.
La integral útil en este caso es la siguiente:

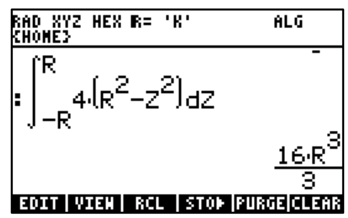
$$V = \int_a^b A(z)dz,$$

donde *V* es el volumen de un sólido, *A*(*z*) es la función que expresa el área.

$$V = \int_{-r}^{r} 4(r^2 - z^2)dz = \frac{16}{3}r^3$$

Con la siguiente secuencia de teclas se obtiene el resultado:





Ejemplo 2. Se considera la cuña obtenida al intersecar un cilindro con un plano que pasa por un diámetro de la base formando un ángulo de 45° con el plano de la base (Figura 20).

Estrategia 1. Se calcula el área de los rectángulos perpendiculares a la base. Tienen dos lados tangentes al cilindro y los lados que descansan sobre la base son paralelos al diámetro.
La longitud de la base de los rectángulos se define por la ecuación

$y = 2\sqrt{r^2 - x^2}$ (Figura 21).

La altura de los mismos, se establece con la función $z = x$.
Las áreas $yz = A(x)$ de los rectángulos se obtienen con la función

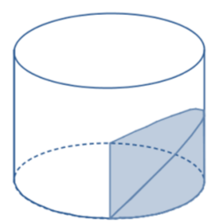


Figura 20

$$A(x) = 2x\sqrt{r^2 - x^2}\ .$$

El volumen de la cuña esta dado por la integral

$$V = \int_0^r 2x\sqrt{r^2 - x^2}\,dx = \frac{2}{3}r^3.$$

Dado que hay ocho cuñas en el bicilindro el volumen es igual a $\frac{16}{3}r^3$

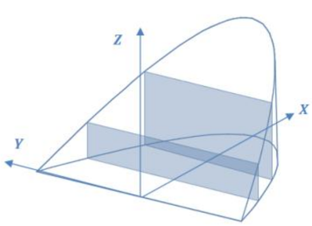
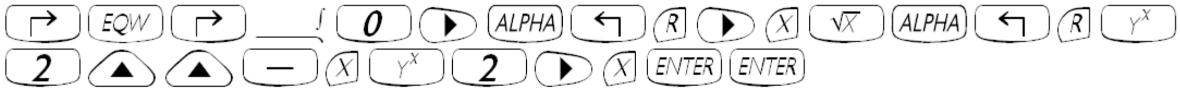
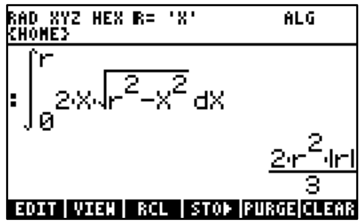


Figura 21

La siguiente secuencia de teclas conduce al resultado:





Estrategia 2. Se calcula el área de los triángulos rectángulos e isósceles que se encuentran en planos perpendiculares a la base, tienen un cateto sobre el cilindro y el otro en la base del sólido (Figura 22).
Debido a que $z = x$ el área de los triángulos es

$A(x) = \frac{x^2}{2} = \frac{r^2-y^2}{2}$.

El volumen de la cuña se calcula con la integral

$\int_{-r}^{r} \frac{r^2-y^2}{2}\, dy = \frac{2}{3} r^3$.

El volumen del bicilindro es

$V = \frac{16}{3} r^3$.

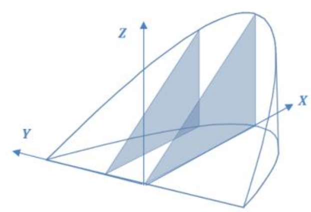
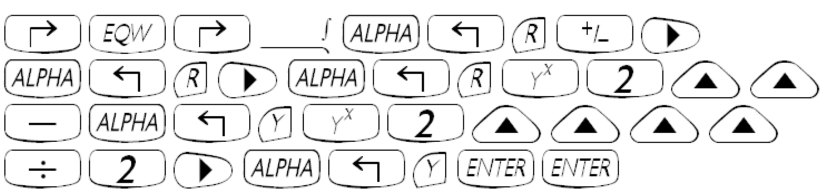
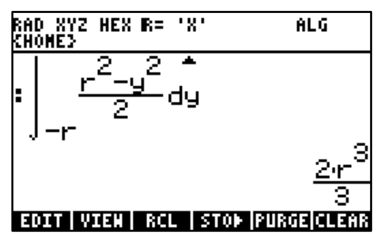


Figura 22

La siguiente secuencia de teclas para llegar al resultado:





Ejemplo 3.
Estrategia 1. Con las ecuaciones de los cilindros $x^2 + y^2 = r^2$ y $y^2 + z^2 = r^2$ se tiene la intersección de los cilindros como sigue:

$\{(x,y,z) | x^2 + y^2 = r^2,\ -\sqrt{r^2-x^2} \le y \le \sqrt{r^2-x^2}\}$,

correspondiente a la integral siguiente:

$$V = \int_{-r}^{r} \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} 2\sqrt{r^2-x^2}\, dy\, dx = \frac{16}{3} r^3 .$$

Estrategia 2. El volumen también puede encontrarse usando descomposición algebraica cilíndrica. La intersección de los cilindros es la siguiente:

$$\left\{(x,y,z)\right| -r \leq x \leq r,\ -\sqrt{r^2-x^2} \leq y \leq \sqrt{r^2-x^2}, -\sqrt{r^2-x^2} \leq z \leq \sqrt{r^2-x^2}\left.\right\}$$

El volumen del sólido es igual a la siguiente integral:

$$V = \int_{-r}^{r} \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} dz\, dy\, dx = \frac{16}{3} r^3\ .$$

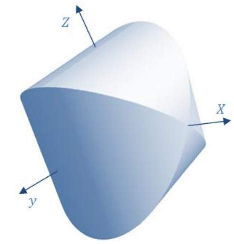


Figura 23

Ejemplo 4. Se emplean coordenadas cilíndricas para encontrar el volumen de la cuña (Figura 22), $x = \rho\ cos\theta,\ y = \rho\ sen\theta,\ z = z$.

Debido a que $z = x = \rho\ cos\theta$ y porque la cuña se encuentra en la parte superior del plano *xy* los límites de integración para la variable z son desde 0 hasta $\rho\ cos\theta$.
La proyección de la cuña en el plano *xy* es una semicircunferencia de radio r los límites de integración de ρ son desde 0 hasta r.
Finalmente, para θ se integra de 0 a $\frac{\pi}{2}$ porque la cuña es simétrica respecto al plano *xz*.
En consecuencia, se tiene el volumen de la mitad de la cuña.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{r} \int_0^{\rho\ cos\theta} dz\ \rho\ d\rho\ d\theta = \frac{r^3}{3}.$$

Se multiplica el resultado por 2 para obtener el volumen de la cuña, después, por 8 para el volumen del sólido. Se obtiene $V = \frac{16}{3} r^3$.

Las actividades ejercicios y problemas propuestos para la quinta etapa del taller están fundamentados en la aplicación de integrales para el cálculo del volumen del sólido de Steinmetz. Primeramente se busca la sección del sólido que permite establecer las variables sobre las que se integra. El problema puede resolverse con integrales simples, dobles o triples.

Conclusiones

Se ha desarrollado una forma de abordar el aprendizaje de la obtención de volúmenes con cálculo integral. Consiste en llevar a la práctica un proceso que inicia con el uso de materiales manipulativos. Después, construir configuraciones geométricas que incorporan las propiedades involucradas en los materiales didácticos manipulables. Luego se da un paso de abstracción y se resuelve el problema con recursos geométricos. Más adelante, el problema se expresa con sumatorias. Finalmente se utilizan recursos propios del cálculo integral. El proceso sigue una trayectoria que va de acciones sencillas a más complejas. Se ha propuesto poner en práctica distintos métodos y estrategias para conducir las trayectorias de los procesos de resolución.

Bibliografía

Hogendijk, J. P. (2002). *The Surface Area of the Bicylinder and Archimedes' Method*. Historia Mathematica **29**, 199–203. doi:10.1006/hmat.2002.2349, available online at http://www.idealibrary.com. Pp. 199-203.

HP 50g Calculadora Gráfica. Manual del usuario. 2006. Edición 1. HP Invent. USA.

Natanson, L. P. (1977). Problemas elementares de máximo y mínimo, Suma de cantidades infinitamente pequeñas. Lecciones populares de matemáticas. Editorial Mir. Moscú.

Straffin, Philip D. Jr. (1998). *Liu Hui and the First Golden Age of Chinese Mathematics*. Mathematics Magazine. Vol. 71, No. 3. Pp. 177-180.

Weisstein, Eric W. "*Steinmetz Solid*." From MathWorld--A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/Steinmetz Solid.html. Consultado el 15 de enero de 2011.

Información general	
Título del taller	Métodos y estrategias para el cálculo del volumen de ciertas intersecciones de cilindros
Nombre de Autores	Vicente Carrión Miranda, Pablo Rafael Zamudio Cortés
Instituciones de los autores	Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV Facultad de Ciencias UNAM
País o países de los autores	México
Número de horas más conveniente (2 horas máximo)	2 horas
Nivel educativo al que va dirigido el taller (Preescolar, Primaria, Secundaria, Terciaria, o General)	Secundaria y Terciaria
Número máximo de personas	25
Equipos audiovisuales o informáticos que requeriría (Proyector multimedia, TV grande, laboratorio de computación, conexión a Internet)	Proyector multimedia