

Unidad didáctica para la enseñanza-aprendizaje de funciones matemáticas con ayuda de maple.

Mariela **Sarmiento S.**

Universidad de Los Andes. Núcleo Universitario “Rafael Rangel”

Venezuela

marielas@ula.ve

Jorge **Manzanilla P.**

Universidad de Los Andes. Núcleo Universitario “Rafael Rangel”

Venezuela

jorgemanzanilla@hotmail.com

Resumen

Este estudio desarrolla el diseño de una Unidad didáctica para la enseñanza-aprendizaje de las funciones matemáticas con la ayuda de Maple. Seguimos el enfoque de la investigación proyectiva y la desarrollamos en tres fases: En la fase Diagnóstica obtenemos información sobre estrategias de enseñanza-aprendizaje-evaluación y dificultades, al observar en forma no participante en el aula y al interactuar con profesores de Lógica Matemática y sus alumnos(as) a través de entrevistas y un cuestionario. En la fase Diseño se construye un sistema hipermedia y en la fase Evaluación tres expertos examinan aspectos técnicos, de diseño y pedagógicos. Se concluye que el proceso de enseñanza-aprendizaje de las funciones requiere mejorarse y se hace necesario buscar nuevas vías y materiales, los sistemas hipermedia favorecen el desarrollo de materiales didácticos que activan el pensamiento heurístico y la ayuda de Maple para graficar y manipular parámetros permite visualizar las modificaciones requeridas por el problema.

Palabras clave: Enseñanza-aprendizaje, funciones reales, sistema hipermedia.

Abstrat

This study develops the design of a teaching unit for teaching and learning of mathematical functions with the help of Maple. We follow the approach of the projective research and developed in three phases: In Phase Diagnostic has gotten information about teaching strategies, learning strategies, assessment and difficulties, noting in the classroom and were interacting with teachers of Logic Mathematics and their students through interviews and a questionnaire. In the design phase constructed a hypermedia system and in the evaluation phase, three experts discussed technical aspects, pedagogical and design. We conclude that teaching-learning of functions needs to be improved and we need new ways and materials, hypermedia systems favor the development of materials that trigger the heuristic thinking and Maple helps to plot and to manipulate parameters to visualize modifications required by the problem.

Key words: Teaching-learning, real function, hypermedia system.

Planteamiento del problema

Los cambios en los modelos de comunicación debido a la incorporación de nuevas tecnologías han provocado un desafío para nuestro sistema educativo. A pesar de ello, en las clases de matemáticas, en el Núcleo Universitario “Rafael Rangel” de la Universidad de Los Andes (NURR-ULA) en Venezuela, prevalece el modelo tradicional donde el docente es el centro del proceso de enseñanza-aprendizaje y se privilegia el uso de la pizarra. Pero ¿cómo romper con ello? Una manera puede ser implementando nuevas estrategias metodológicas donde el uso de la computadora pueda proporcionar una interacción que permita compartir el protagonismo entre docente, alumnos y contenido.

Esto lo observamos en muchas instituciones educativas del mundo, donde se han implementado diferentes software algebraicos y materiales multimedia con el propósito fundamental de mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de una disciplina tan importante y compleja como lo es la Matemática. Por ejemplo, la Universidad Politécnica de Madrid usa el *Maple* para el estudio de la Transformada de Fourier (Martín y Méndez: 1999), la Facultad de Ciencias Exactas, Naturales y Agrimensura en la Universidad Nacional del Nordeste (UNNE-Argentina) usa el programa *Advanced Grapher* para la enseñanza-aprendizaje de las funciones matemáticas (López, Petris, y Pelozo: 2005), la facultad de Ingeniería de la Universidad de Los Andes (ULA-Mérida-Venezuela) desarrolló un Sistema hipermedia para la enseñanza de aspectos generales de Geometría Descriptiva y el estudio específico del punto y la recta (Rangel, Calderón y Sandía: 2008), entre otros.

En esta investigación nos centramos en la enseñanza-aprendizaje de las funciones matemáticas reales por su gran importancia para la formación integral de nuestros estudiantes de la carrera Educación, ya que su estudio constituye el armazón de toda la Matemática Real y consecuentemente de toda la ciencia y tecnología (Galdós: 2002).

Para ello desarrollamos una unidad didáctica donde se utiliza una herramienta tecnológica, el hipermedia, para organizar la información e incorporar elementos multimedia y un sistema algebraico computacional, el *Maple*, para visualizar las gráficas de las funciones. Este material, bajo el título “Aprendiendo funciones con ayuda de Maple”, ha sido diseñado pensando en el docente de la materia Lógica Matemática y en los estudiantes del segundo semestre de las distintas menciones de la carrera de Educación (Física-Matemáticas, Biología-Química, Castellano-Literatura, Lenguas Extranjeras, Geografía-Historia y Ciencias de la Tierra-Geografía), en el NURR-ULA, por lo cual posee ejemplos, imágenes, ejercicios resueltos y propuestos, entre otros, en las distintas áreas que éstas contemplan.

Fundamentación teórica

La mejora de los procesos de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas pasa por tomar decisiones sobre las tareas, estrategias y modos de interacción en el aula, entre otros. En los cursos iniciales, por ejemplo Lógica Matemática, se observa que la mayoría de los estudiantes poseen deficiencias notorias en las operaciones básicas con números reales, no logran definir con coherencia el concepto de *función* y presentan dificultad en el uso e interpretación del lenguaje matemático, así lo afirman algunos docentes consultados, durante esta investigación. Por ejemplo, confunden *Dominio* con *Rango*, tienen dificultades en determinar cuando una función es *inyectiva*, *sobreyectiva* o *biyectiva*, entre otros.

Las causas de estas confusiones son variadas, entre los factores tenemos estrategias de enseñanza, contenidos abstractos, elaboración de modelos mentales relacionados sólo a los *Diagramas de Venn*, priorizar la enseñanza de habilidades de cálculo a expensas de la

comprensión de conceptos y la resolución de problemas, motivación, entre otros. Algunos de ellos tienen que ver con el método tradicional que impera en las aulas, como lo hemos observado. Al respecto, López y otros (2005: 1) exponen que la enseñanza de las funciones matemáticas a través de enfoques tradicionales, es desarrollada en forma abstracta, formal y matemáticamente perfecta, pero sin un verdadero significado para la mayoría de los alumnos porque están alejados de las aplicaciones y propenden, por lo general, a un aprendizaje memorístico, carente de significado.

Por su parte García (2001:21) señala que “el aprendizaje usando exclusivamente métodos tradicionales, no resulta suficiente para desarrollar en los alumnos las capacidades cognitivas, creativas y organizativas requeridas por la sociedad moderna”. Es por ello que la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, y en particular el tema de funciones, debe apropiarse de los grandes avances de la tecnología y desarrollar entornos que propicien un ambiente agradable para su estudio.

En la actualidad son muy utilizados los sistemas algebraicos computacionales (Güyer:2008; García, Morales y Zaragoza:2005; López y otros:2005), los micromundos (Sacristán:2003; Gómez:1997; Balacheff y Kaput:1996) y los entornos de aprendizaje colaborativo (Gerwerc:2001; Lehtinen, Hakkarainen, Lipponen, Rahikainen y Muukkonen:1998; Scardamalia, Bereiter, Mclean, Swallow y Woodruff:1989) por las características que poseen, entre ellas podemos señalar su capacidad de almacenamiento, manejo de información, simulación, representación de los objetos matemáticos y sus relaciones, interactividad, sistemas simbólicos, aprendizaje individualizado y autoevaluación, entre otras.

Algunos entornos de aprendizaje se diseñan utilizando el hipertexto, el cual puede entenderse como un conjunto de bloques de texto unidos entre sí con nexos, que sugiere la idea de un texto escrito en forma no lineal, algo así como un camino que se subdivide en varios caminos que le permiten al usuario tomar una ruta (o itinerario) según su criterio. Cuando al hipertexto se le añaden imágenes, sonido, animaciones, entre otros, se le conoce como hipermedia. Las capacidades del computador (multimedia) y su interactividad le permiten al usuario escoger el medio en el que desea obtener la información, en formato textual, icónico-visual (estático o animado) o icónico-sonoro, es por ello que Prendes (1996) sugiere la fórmula hipertexto + multimedia = hipermedia.

El diseño de recursos hipermedia donde se incorpore un sistema algebraico como el Maple para el estudio de las funciones, le permite al usuario seguir un modelo no lineal a su propio ritmo (el conocimiento matemático no es lineal), lleno de información en distintos formatos, en forma autónoma, por distintos itinerarios y según sus intereses y necesidades. Además, el usuario navega libremente de acuerdo a sus habilidades para interactuar con el material y a las características técnicas del mismo (interacción instrumental) y decide cuáles estrategias de aprendizaje desarrollar para asimilar la información allí contenida (interacción cognitiva).

Este tipo de herramienta impacta al usuario y le proporciona las rutas suficientes para que en forma sencilla siga la información, consulte dudas, chequee ejercicios resueltos, resuelva los ejercicios propuestos, utilice el Maple para graficar funciones, haga algunos cambios (en los argumentos, dominio, entre otros) y visualice su comportamiento, con lo cual dedica menos tiempo a la realización de cálculos y gráficas y centra sus esfuerzos en la reflexión y análisis de resultados. Con esta forma de presentar el material, el diseño de problemas relevantes para los estudiantes (de acuerdo a su área de estudio) y la creación de vínculos entre el nuevo

conocimiento y el existente, favorecemos un aprendizaje lleno de significado.

El *Maple* es un sistema de cálculo simbólico (mantiene y manipula símbolos y expresiones), posee un amplio conjunto de rutinas gráficas para visualizar información matemática compleja, algoritmos numéricos que dan soluciones precisas y un lenguaje de programación completo y comprensible que permite al usuario crear sus propias funciones y aplicaciones (Martínez: s/f). *Maple* contribuye con la mejora de las habilidades cognitivas del usuario, de manera tal que ejecuta procedimientos que con la educación tradicional del aula sería costoso en tiempo, precisión, visualización y en comprensión. Además el registro en formato electrónico de las actividades hechas por el alumno hace posible el análisis de los aciertos, errores y tiempos de respuesta, los cuales son datos importantes para que el docente logre una adecuada evaluación formativa.

Diseño y metodología

Por su naturaleza esta investigación se enmarca en el tipo de estudios proyectivos, en la modalidad de Proyecto Factible que aporta una solución a un problema que está latente en la realidad del proceso de enseñanza aprendizaje del tema en cuestión (Hurtado:2000). Para su desarrollo seguimos como objetivo general: Desarrollar una propuesta didáctica que incluya el uso de las herramientas tecnológicas para la enseñanza-aprendizaje de las Funciones Matemáticas, en la materia Lógica Matemática de la carrera de Educación de la ULA-NURR.

En cuanto al ambiente, la investigación se realiza en el lugar natural donde ocurren los hechos. En lo que respecta a las técnicas para la obtención de la información, se corresponde con un diseño de campo.

En este estudio, la población está conformada por los estudiantes de Educación inscritos en los Semestres A-2008 y B-2008 y 28 profesores adscritos al Departamento de Física y Matemáticas del NURR-ULA, en Trujillo. La muestra es de tipo no probabilística, tal como lo exponen Hernández, Fernández y Baptista (1999), el procedimiento de selección es informal y poco arbitrario, se trata de una muestra de sujetos voluntarios constituida por 5 profesores de Matemáticas del NURR-ULA y 37 estudiantes cursantes de la asignatura Lógica Matemática.

El criterio de selección de la muestra es intencional en su modalidad opinática por ser personas idóneas y representativas de la población a estudiar y por su interés en participar en la investigación, con lo cual se garantiza la calidad de la información (Ruíz Olabuénaga:1999).

La investigación se ha dividido en tres fases: Diagnóstica, Diseño y Evaluación. En la primera fase, el investigador es un observador no participante en el aula y recoge, en su diario de campo, un registro sistemático de las actuaciones del docente y sus alumnos(as), en el desarrollo del tema de funciones, alterando lo menos posible el proceso natural de los acontecimientos. También se realizan entrevistas no estructuradas a los profesores del Área de Matemáticas, que han tenido la oportunidad de dictar la asignatura Lógica Matemática, sobre diferentes tópicos como: formación académica, estrategias de enseñanza-aprendizaje, estrategias de evaluación, entre otros. Y a los alumnos (as) se les aplica un cuestionario, validado por tres expertos, con preguntas cerradas de selección (10 ítems) y abiertas (7 ítems) para medir sus conocimientos sobre el tema de funciones reales.

En la fase de Diseño se consideran los datos de la fase Diagnóstica y se elabora una unidad didáctica denominada “Aprendiendo funciones con ayuda de Maple”, en formato electrónico, con la cual los usuarios podrán explorar el tema de las funciones reales a través de

una navegación sencilla, detallando ejemplos y ejercicios resueltos, realizando ejercicios propuestos que podrá comentar con el administrador de la página web vía correo electrónico, programar y visualizar las gráficas de funciones usando Maple, autoevaluarse y revisar la bibliografía, reseñas históricas y anécdotas. En la fase de Evaluación, tres expertos del NURR-ULA valoran la página Web, para ello se les suministra una ficha de evaluación integrada por tres categorías: aspectos generales, aspectos pedagógicos y aspectos estéticos (Sarmiento: 2004).

Resultados y discusión

Vamos describiendo el desarrollo de los eventos de acuerdo a cada fase de investigación y definimos las unidades de análisis que van surgiendo de acuerdo a los objetivos que nos guían en este estudio.

Fase diagnóstica

A continuación exponemos las categorías que permiten el análisis de esta fase.

Dificultades en la enseñanza-aprendizaje de las funciones. Entre ellas se destacan:

Comprensión de Conceptos. Los conceptos poseen un nivel de abstracción y generalidad que influyen en su comprensión, para Vergnaud (1990) un concepto es una terna formada por referente, significado y significante, pero la mayoría de los objetos matemáticos no tienen significado en la realidad concreta y, por lo tanto, su conceptualización se vale de las representaciones. Al triangular datos hemos detectado que los estudiantes no distinguen las relaciones que son funciones, confunden los conceptos de función e inyectividad, dominio y rango o los de sobreyectividad, inyectividad y biyectividad. Esto es de cuidado porque, en particular, el concepto de función es importante para el desarrollo de capacidades para comprender estructuras fundamentales de las matemáticas avanzadas.

El individuo que aprende simboliza y representa los objetos al mismo tiempo que interactúa con su ambiente, como afirma Vygotsky, para contribuir a ello la totalidad de los docentes manifiestan usar la ejemplificación pero sólo con la ayuda de la pizarra y el marcador y eso no basta para que los estudiantes desarrollen atención, memoria lógica, abstracción, capacidad de comparación y diferenciación, para lograr adquirir los conceptos. La asimilación incorrecta de los conceptos acarrea errores, en nuestra investigación, en particular la comprensión errónea de los conceptos de rango y codominio han provocado errores en la construcción del concepto de función sobreyectiva, sólo 22% de los participantes lo ha logrado. De Guzmán y Gil (2002: 26) aseguran que la causa se debe a “la ineficacia de las estrategias de transmisión de conocimientos, que siguen siendo las utilizadas mayoritariamente por el profesorado”. Por su parte, Font, Godino y D’Amore (2007) consideran que un alumno ha comprendido un determinado contenido cuando lo usa de manera competente en diversas prácticas, pero la totalidad de nuestros participantes no expresan el área de un cuadrado en función de su diagonal.

Representación gráfica. La dificultad para dibujar una gráfica comienza en la construcción de la tabla de datos, acota el profesor P4. Esto puede ser debido a que sólo utilizan la representación a través de diagramas de Venn, según el profesor P3. Si un estudiante no es capaz de reconocer las distintas representaciones gráficas de un objeto matemático (en nuestro caso, las funciones), pasar de una a otra y utilizarlas en las diversas situaciones problemáticas que se le presentan entonces, desde el punto de vista pragmático, no lo ha comprendido. Asegura Rico (2009), que cada concepto o estructura matemática necesita para su total comprensión del

empleo y juego combinado de más de un sistema de representación.

La falta de destreza para manipular las gráficas de relaciones y funciones en el plano cartesiano, se observa en la totalidad de los participantes (32.4% no identifica la gráfica de una función cuando se le presentan seis gráficas de relaciones y el resto lo hace incorrectamente). La representación gráfica de las funciones nos ayuda en la comprensión de los conceptos de función, dominio y rango.

Cálculo de Dominio y Rango. Se aprecia dificultad en el cálculo analítico y geométrico de ambos conceptos. Afirma el profesor P3 que esto se debe a que “no internalizan que el dominio de una función se asocia al eje de las abscisas y las imágenes al eje de las ordenadas” y se observa uso frecuente de diagramas de Venn. Por otro lado, 21.6% de alumnos determinan en forma correcta el dominio y rango desde el gráfico de una relación, sólo 8% justifica analíticamente el dominio de una función racional y 92% tienen dificultad en señalar, entre 4 alternativas, el dominio de una función lineal. Estos resultados muestran deficiencias en conocimientos y aptitudes analíticas, lo cual provoca confusión entre ambos conceptos, por ejemplo, a la pregunta ¿Por qué es $\mathbb{R}-\{0\}$ el dominio de la función $y = 2x - \frac{11}{x}$? el alumno C4 responde “porque 0 está integrado al rango”. Esto nos debe inquietar, en virtud que debemos facilitarle a los estudiantes la comprensión de estos conceptos básicos y de los métodos, pero debemos actuar y entender que la enseñanza tradicional, centrada en prácticas algorítmicas y algebraicas, no basta. Se deben incorporar más actividades didácticas de enfoque geométrico que les permitan al estudiante pasar de un enfoque al otro, confrontarlos y construir ambos conjuntos. Aseguran García, Vázquez e Hinojosa (2004), que en estas tareas el mayor porcentaje de error encontrado en estudiantes de ingeniería es el paso del registro gráfico al algebraico motivado a dificultades en la interpretación del gráfico, empleado sólo como soporte.

Notación y lenguaje matemático. Aprender es construir mientras se socializa a través de un lenguaje (condicionado por el mediador simbólico). La mayoría de los estudiantes utilizan la notación adecuada cuando manipulan relaciones, esto se debe al cuidado y la insistencia de los docentes en el buen uso del lenguaje matemático, como se ha observado. Sin embargo, hay que seguir insistiendo en el respeto a las reglas sintácticas.

Una notación es la representación de una idea, su interpretación incorrecta acarrea errores, por ello P3 afirma: “Hago énfasis de que una función es una triada inseparable de: dominio, codominio y ley de correspondencia”.

Los símbolos, al igual que las representaciones gráficas, nos permiten tener acceso a los conceptos matemáticos y por ello, son importantes en la enseñanza, aprendizaje y comunicación del conocimiento matemático, como en su totalidad lo manifiestan los docentes encuestados. Así, P4 destaca: “Defino funciones desde la visión de las relaciones entre los elementos o pares ordenados del conjunto $A \times B$, luego en la definición formal uso el simbolismo $f: A \rightarrow B$.”

Estrategias de Enseñanza-Aprendizaje-Evaluación. La realidad observada nos muestra que la enseñanza de las matemáticas tiende a desarrollarse en forma tradicional en nuestras aulas, se centra en una práctica algorítmica y algebraica y evalúa las competencias adquiridas (lo que los alumnos saben hacer) y a su vez los estudiantes entienden que lo esencial es lo que se evalúa, en un todo de acuerdo con Artigues (1995).

Los profesores entrevistados usan la ejemplificación como estrategia de entrada al introducir un nuevo concepto, así, P2 afirma: “Generalmente introduzco problemas de aplicación

a situaciones reales” y P4: ”Antes de introducir cada noción u objeto de estudio, los ilustro con situaciones familiares al estudiante bien a la cotidianidad o bien al interior de la matemática misma”.

Otra de las estrategias usadas es el planteamiento geométrico del problema, como lo indica P5: ”Utilizar el apoyo figurativo-intuitivo como es lo gráfico o geométrico”, lo cual estimula visualmente al estudiante y le ayuda a comprender la situación planteada.

No menos importante es la estrategia de demostración, la cual consiste en la presentación lógica de procesos que llevan a un determinado resultado, enfatiza P1, quien además utiliza la resolución de problemas, P1: ”Realizo ejercicios que permitan al estudiante poner en práctica las nociones estudiadas”. Ésta es una de las estrategias más usadas en Matemática, que para Polya, consiste en la aplicación de 4 fases: Comprender el ejercicio, pensar en un plan, ejecutar el plan y examinar cuidadosamente la solución obtenida.

El aprendizaje de las Matemáticas implica la solución de problemas, en Lógica Matemática los problemas planteados en forma verbal se traducen del castellano usando simbolismo matemático, muchas veces se utiliza una representación gráfica, especialmente en el estudio de las funciones.

El docente actúa como un instructor, con sus herramientas básicas: marcador, pizarra y guía de ejercicios, también es un facilitador del aprendizaje en sus clases prácticas cuando permite al alumno pensar y buscar la solución a los problemas planteados en forma autónoma o en pequeños grupos, como lo afirma P2: “se hacen prácticas grupales”, sin embargo, no utiliza con frecuencia la autoevaluación y coevaluación y se priva de participar activamente junto a sus alumnos(as) en el proceso de enseñanza-aprendizaje-evaluación. En particular, vemos como evalúa P4: “Yo aplico un examen parcial, sin embargo, durante el desarrollo del tema, utilizo la observación del trabajo del alumno mediante preguntas en clase y ejercicios”, mientras que P3: “He aplicado en forma exitosa evaluaciones de interpretación gráfica de conceptos de funciones”.

Fase Diseño

Entre los elementos a tener presentes para lograr un buen diseño están el diagnóstico inicial, objetivos de aprendizaje, contenidos, la organización de la información, recursos, realimentación, control del ritmo de aprendizaje, el plan y el tiempo del proceso de desarrollo (Marqués: 2006). El diseñador puede planificar, organizar y desarrollar su material didáctico de acuerdo a un modelo instruccional, el tiempo y las audiencias a las que va dirigido.

Estos elementos los hemos considerado al diseñar la Unidad Didáctica titulada *Aprendiendo funciones con ayuda de Maple*. Esta propuesta, en formato hipermedial, facilita el estudio de las funciones matemáticas, tema contemplado en cursos iniciales del área de Matemática (ver la Figura 1).

Para su construcción se han empleado los programas Microsoft FrontPage 5.0, Microsoft Word y Latex 5.0 para la construcción de ejercicios, Adobe Acrobat 5.0 para visualizar los documentos de ejercicios, Maple VI y aplicaciones en Java Script para los cálculos con las operaciones básicas y la construcción de las gráficas de las funciones, requiriendo para su instalación el Internet Explorer 6.0 ó superior y una resolución de pantalla 1024x768 píxeles para su mejor visualización. También se han usado Microsoft Paint, Paint Shop Pro 6.0 y Jasc Animation Shop 2.0 CD. Para la presentación de los contenidos se toma en cuenta la

organización de la información en torno a dos núcleos: información principal y complementaria (ver la Figura 2), los contenidos aparecen enlazadas de forma no lineal, el diseño de las pantallas, el tamaño de la letra, información suficiente, sintaxis, interacción a través del correo electrónico e interfaz (navegación sencilla), la inclusión de ambientes para la exploración de los contenidos, ejercitación con o sin la ayuda de Maple VI, la autoevaluación y para satisfacer la curiosidad, potenciar la investigación, la construcción y el descubrimiento.



Figura 1. Página inicial de la Unidad Didáctica.

Al entrar en la Unidad Didáctica (Figura 1), automáticamente se activa una caja de comentario donde se hace una descripción de la imagen, se visualiza el botón **Salir** de la Unidad Didáctica y el botón **PRINCIPAL** que enlaza una segunda pantalla (Figura 2) que contiene un menú donde se distinguen ocho secciones.

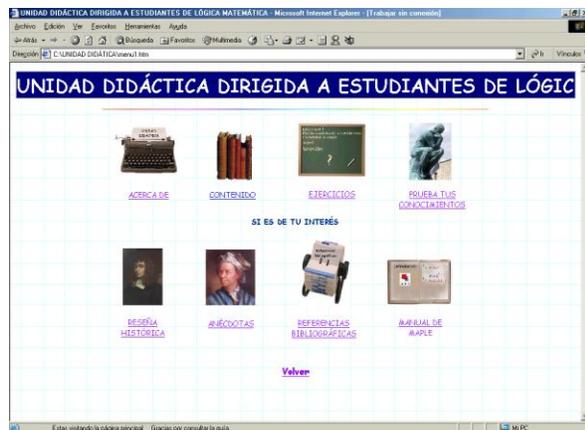


Figura 2. Menú principal de la Unidad Didáctica

Acerca de: Es un enlace que expone los objetivos, el contenido y los requerimientos para la instalación de la Unidad Didáctica.

Contenido: Este link presenta un mapa de navegación por esta sección, con seis enlaces:

Ejemplos y definición. Muestra al usuario varios ejemplos de funciones, relacionados con la vida cotidiana, que pueden ser comentados a través de la Web al pulsar el botón **comentario**. También incluye las definiciones de función, dominio y rango.

Representación gráfica. Al activar este enlace, se muestran algunas funciones sencillas con sus gráficas. Se puede acceder al programa matemático *Maple* pulsando sobre su icono para

realizar las actividades señaladas y las que desee. También se incluye un ejercicio para aplicar un criterio geométrico y se concluye con información sobre el cálculo geométrico del Dominio y el Rango.

Tipos de Funciones. Al pulsar este link, se abre otro mapa de navegación, donde se muestran y explican las funciones polinómicas, racionales, exponenciales, entre otras.

Clasificación. Al activar este enlace el usuario puede ver ejemplos y definiciones de funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas.

Operaciones. Muestra las operaciones básicas con las funciones reales (suma, resta, multiplicación y división). También, contiene actividades a realizar con Maple VI.

Aplicaciones. Posee información sobre la aplicación de las funciones matemáticas en: Biología, Geografía, Ciencias de la Tierra, Física y Química.

Ejercicios. En esta sección se encuentran cuatro enlaces (Figura 3):

```

Maple VI [aplicaciones.mws]
File Edit View Insert Format spreadsheet Options Window Help
> f:=x->x^3+x; g:=x->5*x+4;
      f = x -> x^3 + x
      g = x -> 5x + 4
> s:=f+g; d:=f-g; p:=f*g; c:=f/g;
      s = f + g
      d = f - g
      p = f * g
      c = f / g
> s(x); d(x); p(x); c(x);
      x^3 + 6x + 4
      x^3 - 4x - 4
      (x^3 + x)(5x + 4)
      (x^3 + x) / (5x + 4)
  
```

Figura 3. Sección de ejercicios con ayuda de Maple VI

Ejercicios Resueltos. Este enlace abre el programa Acrobat que permite al usuario ver el archivo que contiene ejercicios resueltos con ayuda de Maple, otros sin ayuda de Maple y un tercer grupo son ejercicios que están escritos en Látex. Estos ejercicios están clasificados en tres categorías: sencillos, intermedios y avanzados.

Ejercicios Propuestos. El programa Acrobat permite visualizar ejercicios que se le ofrecen al usuario con un nivel adecuado y en distintas áreas del saber.

Ver Manual. Se incluye un manual de Maple VI.

Volver. Al presionar en este enlace se retorna al menú principal (Figura 2).

Prueba tus Conocimientos. Se muestra un test con 16 preguntas teórico-prácticas. El botón *Resultado del test* muestra la puntuación obtenida, cantidad de preguntas sin contestar y una observación por la actuación del usuario. Se incluyen los botones de **Respuestas correctas** y *Reiniciar el test* (Figura 4).

En la pantalla principal (Figura 2) se encuentra un segundo grupo de íconos bajo el subtítulo SI ES DE TU INTERES, donde se exponen cuatro secciones:

Reseña Histórica. En este sitio se encuentra un breve relato de la vida de grandes matemáticos (Leonard Euler, John Neper, René Descartes, entre otros) y sus aportes al estudio de las funciones matemáticas.

Anécdotas. En esta sección se encuentran algunos eventos o curiosidades que les

sucedieron a grandes matemáticos a lo largo de su vida.

Referencias Bibliográficas. Son las fuentes empleadas en la construcción de los diferentes contenidos desarrollados en la Unidad Didáctica.

Manual de Maple. Esta sección describe de una manera sencilla como se trabaja con el programa Maple VI, específicamente la manipulación de Funciones. Se presentan los comandos y se hace énfasis en que la sintaxis tiene que respetarse para que el programa reconozca la instrucción, efectúe los cálculos y muestre la gráfica de las funciones. Es importante resaltar que éste software matemático tiene otras versiones más avanzadas.

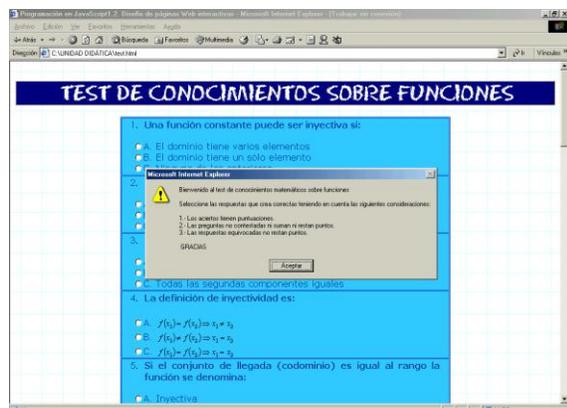


Figura 4. Test de Conocimientos.

Fase Evaluación

En esta fase es valorada la página Web, por tres expertos, usando una ficha de evaluación (Sarmiento, 2004). desde tres categorías.

Aspectos Generales. En su totalidad, los expertos determinan la versatilidad y facilidad del manejo de la unidad didáctica *Aprendiendo funciones con ayuda de Maple*, además de la excelente organización y calidad de la información en cuanto al tema se refiere, en particular E1 expresa: “La estructura del material da idea de todo lo contemplado en el tema, además presenta material complementario de interés”. Para los expertos, visitar ésta página Web es agradable, de fácil comprensión y navegación, señala perfectamente las distintas zonas que la integran y ofrece una excelente visualización de todos los aspectos necesarios para la comprensión del tema.

Aspectos Pedagógicos. El nivel del material es adecuado a quiénes va dirigido, la información que presenta es concisa, actualizada, incluye actividades variadas que motivan, el aprendizaje es dirigido y a su vez fomenta en forma adecuada el aprendizaje por construcción. Como afirman E2: “La página es concreta y precisa en cuanto al contenido, evita la sobrecarga o saturación de información, lo que seguramente hará más grata su consulta”, E3: “Presenta la información organizada para que el usuario pueda desplazarse fácilmente en la búsqueda de la misma y posee un alto grado de fiabilidad de sus contenidos” y E1: “Está página web permite a los usuarios el desarrollo del tema de funciones en forma constructiva, autónoma y libre de iniciar o continuar su estudio en el punto o tópico de interés, además les permite ir chequeando dudas con los responsables de administrarla”.

Aspectos Estéticos. La unidad didáctica presenta una adecuada armonía cromática entre todos los elementos empleados en su diseño, tales como: colores, fondos, imágenes, gráficas y animaciones, tal como lo expresa el profesor evaluador E1: “El material presenta colores,

imágenes y gráficos que permiten ilustrar lo que se plantea en forma armónica y llamativa al usuario”.

Conclusiones

Los estudiantes de Educación inician su aprendizaje matemático, a nivel universitario, en la asignatura Lógica Matemática. Allí trabajamos con objetos matemáticos tales como proposiciones, conjuntos, relaciones y funciones, no todos son desconocidos por ellos. Las funciones, en particular, se estudian en bachillerato vistas como proceso de dependencia o de transformación; entonces nuestro trabajo consiste en desarrollar estrategias que les permitan obtener flexibilidad en su manipulación como procesos (explícitos, recursivos, entre otros) o como objetos (objetos solución de una ecuación funcional, objetos que poseen alguna propiedad, entre otras).

Otro aspecto importante es desarrollar en los estudiantes los niveles de comprensión necesarios de conceptos como dominio y rango de una función, biyectividad y operaciones con funciones, entre otros, evitando el trabajo memorístico y mecánico (aprendizaje por repetición) y dando énfasis al trabajo constructivo desde el punto de vista geométrico, lo cual podremos lograr con la ayuda del *Maple VI*.

Con esta investigación mostramos la situación real de uno de nuestros espacios educativos, sus características y necesidades, y a su vez hacemos un aporte de un material educativo que permita diversificar las estrategias de enseñanza-aprendizaje-evaluación empleadas, ejemplificar las funciones en distintas áreas del saber, dotarlas de sentido con la ayuda visual o gráfica y crear un clima de actitudes positivas hacia la matemática.

La educación actual tiene nuevas metas y debemos ayudar a nuestros estudiantes en su preparación para ser parte de las organizaciones modernas, Lógica Matemática le da herramientas para analizar la ingente información que les rodea, la unidad didáctica *Aprendiendo funciones con ayuda de Maple* mejorará sus habilidades en la resolución de problemas y a su vez les permitirá comunicar sus hallazgos y reflexionar sobre su propio aprendizaje.

Referencias y bibliografía

- Artigue, M. (1995): La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En Artigue, M., Douay, R., Moreno, I. & Gómez P. (Eds.): Ingeniería didáctica en educación matemática. México, Grupo Editorial Iberoamérica, 97-140.
- Balacheff, N. & Kaput, J. (1996): Computer-based learning environments in mathematics. En Bishop A., Clements K., Keitel C., Kilpatrick J. Y Laborde C. (Eds.): International handbook of mathematics educations. Parte 1. Holanda, Kluwer Academic Publishers, 469-501.
- De Guzman, M. & Gil, A. (2002): Dificultades en la Enseñanza de las Matemáticas. Extraído el 08 de Octubre 2008 de: <http://www.allegue.com/mates/mates2.htm>.
- Font, V., Godino, J. & D'Amore, B. (2007): Enfoque ontosemiótico de las representaciones en educación matemática. Extraído el 05 de julio 2010 de: http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/enfoque_ontosemiotico_representaciones.pdf
- Galdós, L. (2002): Matemática. Madrid, Cultural.
- García, J., Morales A. y Zaragoza N. (2005): Cálculo de bombas sumergibles asistido por sistemas algebraicos computacionales. *Ingeniería*, 9 (2), 31-38.
- García, L., Vázquez, R. & Hinojosa, M. (2004): Dificultades en el aprendizaje del concepto de función en

- estudiantes de ingeniería. Extraído el 05 de julio 2010 de:
<http://grafito.fime.uanl.mx/misitio2/HinojosaRivera2004b.pdf>
- García, V. (2001): La tecnología en la Escuela venezolana. *Candidus*, 3 (16), 22-23.
- Gewerc, A. (2001): Diseño de entornos de aprendizaje. Universidad de Santiago de Compostela. Material Policopiado.
- Gómez, P. (1997): Tecnología y educación matemática. *Informática Educativa*, 10 (1), 93-111.
- Güyer, T. (2008): Computer Algebra Systems as the Mathematics Teaching Tool. *World Applied Sciences Journal* 3 (1), 132-139.
- Hernández R., Fernández C. y Baptista P. (1999): Metodología de la Investigación. (2ª ed.). Bogotá, McGraw-Hill.
- Hurtado J. (2000): Metodología de la Investigación Holística. Caracas, Sypal.
- Lehtinen, E., Hakkarainen, K., Lipponen, L., Rahikainen, M. & Muukkonen, H. (1998): Computer supported collaborative learning: A review. Extraído el 05 de julio 2010 de:
<http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.105.9216&rep=rep1&type=pdf>.
- López, M., Petris R. & Pelozo, S. (2005): Estrategias innovadoras mediante la aplicación de software. Enseñanza-aprendizaje de funciones matemáticas en los niveles EGB3 y polimodal. Extraído el 10 de Enero 2007 de: <http://www.unne.edu.ar/web/cyt/com2005/8-Exactas/E-014.pdf>.
- Marquès, P. (2006): Diseño instructivo unidades didácticas. Extraído el 22 de Abril 2008 de:
<http://www.dewey.uab.es/pmarques>
- Martín, E., & Méndez A. (1999). Estudio de la Transformada de Fourier con un modelo de formación basado en competencias. Extraído el 08 de Mayo 2008 de: <http://www.mapleapps.com>
- Martínez, H. (s/f): Introducción Maple. Extraído el 08 de Mayo 2008 de:
<http://www.angelfire.com/planet/hmrc/CalculoDI.pdf>
- Prendes, M. (1996): El multimedia en entornos educativos. En Cabero J. y otros (Coords.). Medios de comunicación, recursos y materiales para la mejora educativa II. Sevilla, Kronos, 151-172.
- Rangel, M., Calderón, J. & Sandía, B. (2008): Desarrollo de un Sistema Hipermedia para la Enseñanza de Geometría Descriptiva Bajo la Plataforma de Software Libre.
<http://www.saber.ula.ve/handle/123456789/15834> (2010, 05 de diciembre)
- Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. *PNA*, 4(1), 1-14.
- Ruíz Olabuénaga, J. (1999). Metodología de la investigación cualitativa. Bilbao, España: Universidad de Deusto.
- Sacristán, A. (2003): La importancia de los micromundos computacionales como entornos didácticos estructurados para fomentar e investigar el aprendizaje matemático. En Memorias del Tercer Congreso Internacional sobre la Enseñanza de la Matemática Asistida por Computadora. Costa Rica.
- Sarmiento, M. (2004): La enseñanza de las Matemáticas y las NTIC. Una estrategia de formación permanente. Tarragona, España: Universitat Rovira i Virgili [Tesis doctoral inédita].
- Scardamalia, M., Bereiter, C., Mclean, R., Swallow, J. & Woodruff, E. (1989): Computer-Supported Intentional Learning Environments. *Journal of Educational Computing Research* V 5 (1), 51-68.
- Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10 (23), 133-170.