

Resolución de problemas de estructura aditiva con alumnos de 2^{do} y 3^{er} grado de educación primaria

Francisco Amado **Cruz** Ramírez
Universidad Pedagógica Nacional. Ajusco
México

patt_alagr@hotmail.com

Cristianne **Butto** Zarzar
Universidad Pedagógica Nacional. Ajusco
México

cristianne_butto@hotmail.com

Resumen

Se reportan resultados sobre la resolución de problemas de estructura aditiva realizado con estudiantes, entre 7-10 años de edad de educación básica asociado a la adquisición de las reglas del sistema de numeración decimal indo-arábica y vigesimal Mixteco. Objetivos: Investigar problemas de estructura aditiva con estudiantes de 2^{do} y 3^{er} grado; El marco teórico se basa en la teoría de la representación de tareas cognitivas distribuidas de Zhang y Norman (1994). El trabajo experimental involucró: cuestionarios iniciales sobre problemas de estructura aditiva, escritura numérica decimal indo-arábica y vigesimal, Mixteco, seguido de entrevista clínica individual; secuencia didáctica y cuestionario final. Los resultados revelan que los alumnos elaboran reglas intuitivas sobre el sistema de numeración decimal con indicios de otro vigesimal Mixteco. Representan mayor complejidad para los alumnos los problemas de combinación y comparación.

Palabras clave: Modelos matemáticos, problemas de estructura aditiva, educación básica, aprendizaje, procesos.

Introducción

El aprendizaje de problemas de estructura aditiva asociado a la adquisición de las reglas del sistema de numeración decimal indo-arábico (SND) constituye una etapa en el desarrollo del pensamiento matemático de los niños en educación pre-escolar y primaria. Esta etapa, muchas veces, representa para los niños un proceso difícil, pues, se enfrentan a “obstáculos” inherentes al proceso de aprendizaje. Por otro lado, en el proceso de instrucción escolar no se exploran las nociones que los niños elaboran en la construcción de su conocimiento, y generalmente, se enseña independientemente el sistema de numeración decimal indo-arábico y los problemas de estructura aditiva.

El campo conceptual de las estructuras aditivas ha sido estudiado desde la década de 1980 y se han realizado importantes aportaciones, tanto en su delimitación teórica como en las estrategias, dificultades y errores de los estudiantes ligados a dicho campo conceptual. Vergnaud clasifica en 6 grandes categorías el tipo de relaciones aditivas. Hay que notar que la operación de suma es una relación ternaria (comúnmente llamada operación binaria) que relaciona la suma c con los sumandos a, b :

$$(a, b) \rightarrow c = a + b.$$

El aprendizaje de los problemas de estructura aditiva (adición y sustracción) asociado a la adquisición de las reglas del sistema de numeración decimal indo-arábico (SND) constituye una etapa en el desarrollo del pensamiento numérico de los niños. Esta etapa inicia en

educación pre-escolar y continua en la escuela primaria. Varios autores han investigado esta temática, por ejemplo: Piaget (citado en Kamii, 2003); Brissiaud (1993); Fuson, Hall, Schaeffer (citados en Castro y otros, 1995); Fayol (1996); Brizuela y Cayton (2010); entre otros.

De modo similar, estudios realizados por ejemplo, Vergnaud y Durand (1983), Estructuras aditivas y complejidad psicogenética, Vergnaud (1991), Los problemas de tipo aditivo; Puig y Cerdán (1988), Problemas aritméticos escolares; Castro, Rico y Castro (1995), Estructuras Aritméticas Elementales; Aguilar y Navarro (2000), Aplicación de una estrategia de resolución de problemas matemáticos en niños; Flores (2005), El significado del algoritmo de la sustracción en la solución de problemas, entre otros. Relatan los procedimientos utilizados por los niños en la resolución de problemas de suma y resta.

Objetivo del estudio

1. Investigar el aprendizaje de los problemas de estructura aditiva de los estudiantes de 2^{do} y 3^{er} grado de educación básica.
2. Elaborar y aplicar una secuencia didáctica que considere aspectos cognitivos-matemáticos para el desarrollo del pensamiento matemático.
3. Estudiar la evolución de las ideas matemáticas.

Marco teórico

El marco teórico de este estudio se fundamenta en la teoría de las representaciones de tareas cognitivas distribuidas de Zhang y Norman (1994). Estos autores consideran que las tareas cognitivas distribuidas requieren de procesar la información a partir de representaciones mentales internas, principalmente de: 1) la representación distribuida de la información, 2) la interacción de representaciones internas y externas; y 3) la naturaleza de las representaciones externas. A continuación se muestra el esquema propuesto por Zhang y Norman.

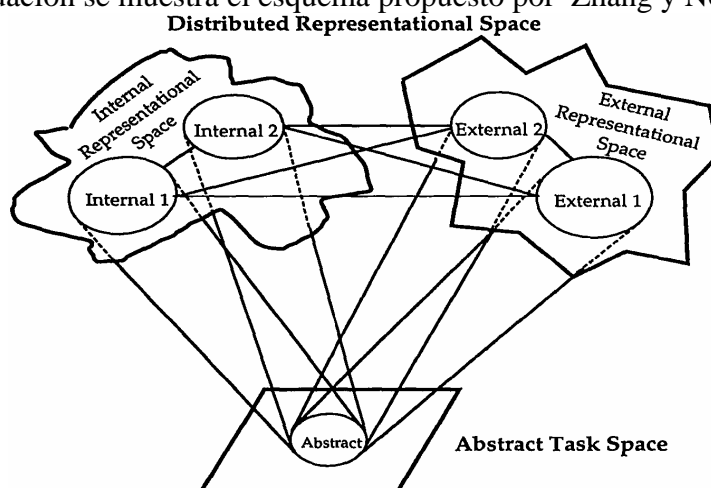


Figura No.1 Sistema de representación distribuida. Tomado de Zhang y Norman (1994), pp. 90.

La figura 1. Muestra el sistema representacional de una tarea con dos representaciones internas y externas. Cada representación interna reside en la mente de las personas y cada representación externa está en el medio externo. Estos dos espacios forman la representación de la tarea, que, es la representación del espacio de trabajo abstracto que describe las estructuras y las propiedades de la tarea. Estas propiedades representacionales de la tarea (por ejemplo, problemas de estructura aditiva), están relacionadas con el proceso de solución.

Sistema de numeración decimal indo-arábica

De acuerdo con Lerner y Sadovsky (1994), para acceder al sistema de numeración decimal, los alumnos crean sus propias reglas para entender su funcionalidad. Dichos autores realizaron un estudio de cómo los estudiantes interpretan y desarrollan las primeras nociones del sistema de numeración decimal antes y después de ingresar a la escuela. Argumentan, que los estudiantes elaboran sus propias hipótesis acerca del sistema decimal y poco a poco éstas se van consolidando en el proceso de instrucción escolar. Además, las producciones de numerales constituyen una forma de apropiación y representación del sistema de escritura numérica. Brizuela (2004); Brizuela (2006); Brizuela y Cayton (2010); mencionan que los niños comienzan a pensar y aprender los números cuando empiezan la escolarización, aprenden a leerlos y escribirlos en la medida que desarrollan conceptos numéricos. Estas son representaciones externas que crean los niños con la intención de reconstruir una visión propia del número.

Lerner y Sadovsky (op. cit.), ponen énfasis en la producción, interpretación y comparación de la escritura sobre el sistema de numeración decimal de los niños. Las autoras señalan que los niños entran en contradicción al tratar de comprender el sistema y, paulatinamente reconceptualizan sus propias nociones para apropiarse de las reglas formales. El estudio fue realizado con estudiantes de cinco a ocho años de edad y encontraron que los niños elaboran por lo menos cuatro hipótesis: 1ª: La cantidad de cifras se corresponde con la magnitud del número representado; entre más cifras tiene la cantidad mayor es el número, 2ª, la posición de las cifras como criterio de comparación (el primero es el que manda); se le atribuye un valor a la cifra dependiendo el lugar que ocupa. Si hay un número con la misma cantidad de cifras, es mayor el que tenga la cifra mayor; 3ª, la numeración escrita corresponde con la numeración hablada; los niños escriben el número como lo escuchan, salvo los números ubicados entre intervalos; 4ª, el rol de los números nudos (decenas, centenas y unidades de millar) son los que pueden escribir de forma convencional.

En este mismo sentido, Brizuela (2004), realizó un estudio sobre las concepciones que tienen niños de 6 años de edad, el uso de las comas y los puntos para facilitar la lectura y escritura de los números. La autora encontró que una primera hipótesis sobre el uso de la puntuación en la notación numérica se refiere a la lectura de los números. Los chicos leen números de forma convencional antes de entrar a la educación formal basados en su conocimiento sobre el dinero, así, suponen que los números que están a la derecha del punto se refieren a dólares (el estudio fue realizado en los Estados Unidos) y los que están a la izquierda a centavos, lo que equivale en el SND a décimas. Una segunda hipótesis que encontró fue que los niños relacionan la puntuación de la notación numérica con la puntuación en lecto-escritura, es decir, los chicos dicen que los puntos que están en un número indican el momento en el que hay que parar de leer la cantidad y que las comas indican una pausa en dicha lectura; cabe aclarar que esto solo aplica a las cantidades que se encuentran en los nudos de la numeración, puesto que en otras cantidades a esta edad aún hay confusión. En tercer término los chicos en la escritura utilizan las comas para dividir grupos de tres números como por ejemplo: 1,000; 10,000; 1,000, 000. Así, para los niños, existe una tensión constante en el proceso de adquisición del sistema de numeración decimal que requiere entender a más a profundidad.

Sistema de numeración vigesimal Mixteco

Las formas de contar entre diferentes pueblos de la tierra son muy distintas. Ejemplo de ello el Mixteco, considerado de base veinte (vigesimal), basado de los dedos que posee el hombre de

manos y pies. Este sistema numérico es de tradición oral, es decir, se cuenta verbalmente, Hollenbach y Erickson (2000), Caballero (2005). La construcción de todo sistema de numeración consiste de a cuerdo a Barriga (2005); Establecimiento de una serie de números prebásicos; formular una o más operaciones deícticas prebásicas, casi siempre se acompaña de señalamientos con los dedos y, posteriormente se apropian de dos nociones: instalación de una base de sumas y emplazamiento retrospectivo que convierte la base en un punto de apoyo desde el cual la enumeración puede avanzar; fundar una base de multiplicación y seguir operando retrospectivamente; fundación de potencias; emplazamiento prospectivo de la cuenta y; instalación de la resta. A continuación, se muestra cómo se escribe el vocablo Mixteco, su traducción al español y su escritura numérica del 1 al 20. La tabla describe los vocablos de la lengua Mixteca que servirán de análisis sobre las ideas intuitivas que crean los alumnos en el sistema de numeración vigesimal.

Tabla No. 1
Numerales del Mixteco

Vocablos del Mixteco	Traducción al español	Numerales	Vocablos del Mixteco	Traducción al español	Numerales
In	Uno	1	Utsi in	Once	11
Uvi	Dos	2	Utsi uvi	Doce	12
Uni	Tres	3	Utsi uni	Trece	13
Kumi	Cuatro	4	Utsi kumi	Catorce	14
U'un	Cinco	5	Tsa'un	Quince	15
Iñu	Seis	6	Tsa'un in	Dieciséis	16
Utsa	Siete	7	Tsa'un uvi	Diecisiete	17
Una	Ocho	8	Tsa'un uni	Dieciocho	18
Iin	Nueve	9	Tsa'un kumi	Diecinueve	19
Utsi	Diez	10	Oko	Veinte	20

Adaptado de Caballero (2005).

A partir de esta tabla, se establece una base escrita para los números del 1 al 10 y a partir del siguiente número 11 en Mixteco son formas compuestas, es decir, estos números se construyen con el diez seguido de uno, dos, tres, cuatro. Aquí se puede observar el principio aditivo. El número quince (**15**) toma un nombre propio: **Tsa'un** [**xa'un**, **sa'un**] dos ejemplos de variante dialectales. Sin embargo, es posible que sea una forma compuesta muy antigua de diez más cinco. Los números del dieciséis al diecinueve son números desarrollados de quince más uno, dos, tres y cuatro respectivamente. El número 20 toma un nombre propio "**Oko**" que en el vocablo del Mixteco quiere decir veinte. Éste tiene una variante "iko" que es un termino que se usa en los múltiplos. Por ejemplo, uvi xiko 2 x 20, Caballero (2005) y Caballero (2008). Se observa que de las características descritas del Mixteco, éste sistema posee tres bases de sumas diferentes 5, 10 y 15 antes de que aparezca la base multiplicativa 20, esto con el objetivo de alcanzar números más grandes. Ahora, continúan los modelos matemáticos para abordar los problemas de adición y sustracción.

Modelos matemáticos

En lo que respecta a los modelos matemáticos encontramos el modelo lineal, cardinal, de medida, numérico y modelo funcional (Castro, 1995). Se explican cada uno de estos a continuación, *Modelo lineal*: Una representación de este modelo es la recta numérica que sirve para contar pequeñas cantidades, se utiliza más comúnmente en preescolar, se usa para tener una representación visual y para comparar cantidades, Por ejemplo: de la escuela de Ramón a su casa hay 15 calles. Si ya camino 8 calles, ¿Cuántas calles le falta a Ramón para llegar a su

casa?; *Modelo cardinal*: En este modelo suele aparecer los diagramas de la teoría de conjuntos. Estos esquemas se pueden emplear con carácter estático (no hay acción) o carácter dinámico, la operación es el resultado de una acción. En el primer caso se trata de esquemas en los que se expresa la relación parte / todo descrita bien por un conjunto dividido en dos partes disjuntas o bien, un conjunto en el que hay señalado un subconjunto, y por complementación se considera el otro. Este esquema es muy abstracto y su dominio supone una fase importante en la consolidación de la adición y la sustracción; *Modelo con medidas*: El contexto de medida tiene como principal el modelo longitudinal como son las regletas de Cuisenare o bien modelos sobre otras magnitudes como la balanza para la comparación de pesos; *Modelo numérico*: Se considera un contexto estrictamente simbólico, y los números aparecen únicamente simbolizados.

Modelo funcional: Estas esquematizan diferentes situaciones a desarrollar con los estudiantes con la finalidad de desarrollar habilidades de suma y resta. Este modelo es actualmente el que se usa en educación básica.

En este mismo sentido, Aguilar y Navarro (2000), mencionan que estos problemas deben describir cuatro situaciones: de cambio, combinación, comparación e igualación. Se desprende del modelo funcional varios tipos y subtipos de problemas de estructura aditiva. De acuerdo con los autores antes mencionados, los cuatro tipos de problemas son: *Problemas de cambio*: describen situaciones en las que un conjunto se incrementa o se disminuye (por ejemplo, Ana tiene 2 canicas y José le regala 6 canicas más. ¿Cuántas canicas tiene Ana ahora?); *Problemas de combinación*: son situaciones derivadas de dos cantidades que se pueden considerar aisladas o como parte de un todo (por ejemplo, Ana tiene 6 canicas y José tiene 2. ¿Cuántas canicas tienen entre los dos?); *Problemas de comparación*: no existe una transformación de los conjuntos solo una relación comparativa. Pretende determinar la diferencia existente entre los conjuntos o averiguar uno de ellos conociendo el otro y la diferencia entre ellos (por ejemplo, Ana tiene 2 canicas y José tiene 3 más que Ana. ¿Cuántas canicas tiene José?); *Problemas de igualación*: se incrementa o se disminuye una cantidad para hacerla igual a otra (por ejemplo, Ana tiene 5 canicas y José tiene 3. ¿Cuántas canicas necesita José para tener las mismas que Ana?).

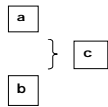
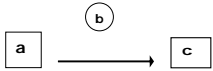
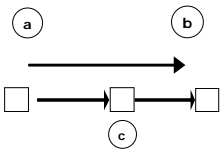
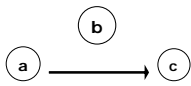
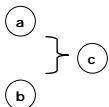
De acuerdo a Rivera y Codina (2001), problema es definido como un obstáculo que enfrenta el sujeto. Señalan que los problemas son aquellas cuestiones o interrogantes no totalmente resueltas y, desde el punto de vista psicológico un problema es una situación o tarea en la cual una meta quiere ser lograda, de modo que ya no se puede ver aislado del sujeto. Así, el objeto de estudio es la resolución de problemas como actividad del sujeto. Para clarificar esta idea, los autores mencionan que, un problema es la situación que se le presenta al sujeto, donde éste desconoce un medio de acción y experimenta confusión de qué es lo que debe de hacer ante tal situación. En cambio, la resolución del problema llega a ser el proceso por el cual un sujeto se desprende (infiere para abordar) el problema.

Desde el punto de vista matemático, Castro (1991), establece que el término problema involucra: Una proposición o enunciado; unos datos conocidos que hay que estudiar; una acción que alguien o algunos sujetos deben averiguar; una meta u objetivo para obtener un resultado; un proceso que determine el modo de actuación para alcanzar el resultado, y unas reglas que deben seguirse para alcanzar la meta.

De acuerdo a Vergnaud y Durand (1983), los problemas de tipo aditivo, son problemas cuyas soluciones implican solamente sumas y restas. Ambos autores desarrollaron cinco categorías para dichos problemas. Sin embargo, otros autores consideran seis categorías. A continuación se muestran sus esquemas con sus respectivos ejemplos.

Tabla No. 2

Esquema de problemas de estructura aditiva

Categoría	Esquema	Ejemplo
1. Dos medidas que se componen en una tercera.		Tengo 5 canicas de cristal y 3 de acero, en total tengo 8 canicas. 5,3 y 8 son números naturales.
2. Una transformación que opera sobre una medida para dar otra medida.		Tenía 7 canicas. He jugado una partida y he perdido 3. Ahora tengo 4. 7 y 4 son números naturales. - 3 es un número relativo.
3. Dos transformaciones que se componen en una tercera.		Juego una partida y gano 3 canicas. Juego otra vez y pierdo 5. En total he perdido 2 canicas. + 3, - 5 y - 2 son números relativos.
4. Una transformación que opera sobre un estado relativo para dar un estado relativo.		Debo 7 canicas a Pablo. Le devuelvo 4. No le debo más que 3. - 7, + 4 y - 3 son números relativos.
5. Dos estados relativos que se componen en un tercero.		Debo 7 canicas a Pablo y él me debe 4; por lo tanto solo le debo 3. -7, + 4 y - 3 son números relativos.

Tomado de Vergnaud y Durand (1983), pp. 107-109.

Metodología

Población

La metodología del estudio es de corte cualitativo. Se trabajó con 6 estudiantes de educación básica bilingüe de una escuela pública del Estado de Oaxaca, México; tres niños y tres niñas de entre 7 a 10 años de edad. Son alumnos regulares de 2^{do} y 3^{er} grado que asisten a una escuela pública rural bilingüe de educación básica del sistema educativo mexicano. La escuela donde asisten es multigrado. Se denominan así, porque son aquellas donde los docentes enseñan a alumnos de diversos grados en un salón de manera simultánea; en este caso, en el salón la integran seis grados que constituye el nivel primario.

Este trabajo de investigación comprende tres etapas: 1^a etapa: aplicación de un cuestionario inicial sobre problemas aritméticos verbales, seguidos de una entrevista clínica individual, y cuestionario de escritura numérica decimal y cuestionario de escritura vigesimal oral Mixteco. 2^a etapa: aplicación de secuencia didáctica. 3^a etapa: cuestionarios finales.

Primera etapa del estudio: diseño y aplicación de cuestionario inicial

Comprende el diseño de cuestionarios iniciales: 1) cuestionario de problemas aritméticos, seguidos de una entrevista clínica individual; cuestionario de escritura numérica decimal y cuestionario de escritura vigesimal oral Mixteco.

Descripción de cuestionario inicial

Tabla No. 3

Cuestionario de problemas aditivos

Pregunta	Contenido matemático	Solicitud de la pregunta
1	Modelo funcional: tipo cambio	Se solicita al alumno resolver el siguiente problema. Juan tiene 15 canicas y le dan 13 canicas más ¿Cuántas canicas tendrá Juan en total?
2	Modelo funcional: tipo combinación	Se solicita al alumno resolver el siguiente problema. En el río Papagayo Luis pesca 31 pescados. De ellos 18 son Mojarras y el resto son Truchas ¿Cuántas truchas pesco Luis?
3	Modelo funcional: tipo comparación	Se solicita al alumno resolver el siguiente problema. Beto tiene 200 pesos, María tiene 70 pesos ¿Cuántos pesos tiene Beto más que María?
4	Modelo funcional: tipo Igualación	Se solicita al alumno resolver el siguiente problema. María compró una piñata que le costó 35 pesos. Rosa tiene 25 pesos ¿Cuántos pesos tendrá que pedir Rosa para tener lo mismo que María?

Tabla No. 4

Cuestionario de escritura numérica decimal indo-arábiga y cuestionario de escritura numérica oral Mixteco

Pregunta	Idea matemática	Solicitud de la pregunta
1	Numeral del 1 al 100	Se le solicita al niño contar oralmente del 1 al 100, observando el cuadro numeral del 1 al 100.
2	Escritura de números	Se solicita al niño anotar los números que se le dictan.
3	Nombres de números	Se le solicita al niño escribir los nombres de los números de la lista.
4	Identificar antecesor y sucesor	Se solicita al niño colocar el antecesor y sucesor de los números que se le muestran.
5	Secuencias de números en orden ascendente y descendente	Se solicita al niño ordenar los numerales de menor a mayor, o de mayor a menor.
pregunta	Idea matemática	Solicitud de la pregunta
1	Numeral del 1 al 100	Se solicita al niño que cuente oralmente los números que conoce del Mixteco.
2	Escritura de números	Se le solicita al niño que escriba los nombres de los números del Mixteco.
3	Problema de agrupamiento	Se solicita al niño desarrollar una forma más adecuada de contar 100 elementos.

Entrevista clínica individual¹

La entrevista clínica individual se utilizó para indagar acerca de las respuestas de los alumnos a las preguntas solicitadas en el cuestionario inicial. A partir de los argumentos que los niños le otorgan al entrevistador, se pueden observar los procesos cognoscitivos asociados a los contenidos matemáticos específicos.

En este trabajo se reportan los resultados de la primera parte del estudio correspondiente a los cuestionarios iniciales: de problemas de estructura aditiva, escritura numérica decimal y vigesimal Mixteco.

Análisis de los datos

El análisis de los datos consistió en: ver estrategias de resolución de problemas, soportes de representación, análisis clínico de las entrevistas.

Resultados del estudio

Se puede observar en el estudio que los problemas que más complejidad representa para los alumnos son los problemas de combinación y comparación, después los de igualación y cambio.

Problemas de estructura aditiva

A continuación, se muestran estrategias utilizadas para resolver problemas de estructura aditiva en la entrevista realizada con 2 alumnos:

Problema tipo: Cambio

Ismael, 2^{do} grado, 9 años:

Ismael lee, “La mamá de María tenía 36 huevos dio 10 a su amiga Mercedes ¿Cuántos huevos le ha quedado a la mamá de María?”.

Para abordar este problema el alumno recurre al conteo total del producto para posteriormente, tachar los huevos que Maria da a su amiga Mercedes. Esta es una estrategia que puede ser eficaz para el alumno cuando resuelve este tipo de problemas, más no suficiente. Constituye un procedimiento que contribuye a dar sentido en la construcción de la representación del problema. Sin embargo, pese a apoyarse con marcar los objetos (10 huevos), duda. A continuación se presenta la entrevista con el alumno:

Ismael.	Me queda diez
E.	¿Porque crees que diez?
Ismael.	Porque lo conté y luego lo tache

Cuenta todos los elementos (36 huevos)

E.	¿Haber cuales tachaste?
	Cuenta todos los huevos (46) y tacha diez huevos.
Ismael	¡oh!...

¹De acuerdo a Delval (2001), la entrevista clínica se fundamenta en el método clínico de Piaget, que suele identificarse con un método de entrevista verbal donde se realiza una conversación libre con el niño siguiendo el curso de sus ideas sobre la explicación de un problema presentado. En este estudio se buscó indagar sobre los contenidos matemáticos tratados en la investigación.

- E. Después cuenta treinta y seis huevos y dice falle hay “treinta y seis”
 ¿Por que?
 Ismael Porque no lo conté bien
 Lo sumé
 E. ¿Donde paso con los huevos que le dio a su amiga Mercedes?
 Ismael Se fueron
 E. ¿y que paso allí?
 Ismael No los conté

Cuenta un grupo de 36 huevos y cuenta otro grupo de diez y lo tacha. Adopta conforme a su criterio tachar con una marca [/] los huevos que da.

Problemas tipo: combinación

Estela, 2^{do} grado

Lee el problema. “En el río papagayo Luis pesco 31 pescados. De ellos 18 son Mojarras y el resto son truchas ¿Cuatas truchas pesco Luis?”

- E. ¿Cuanto te dio?

Ella realiza una suma de $31 + 18$. Nueve y aquí tres, cuatro. Cuarenta y nueve.

- Estela Sumo uno más ocho salio nueve. Tres mas uno sale cuatro. Sale cuarenta y nueve.

- E. ¿crees que pesco 49?

Estela Si.

Realiza una suma de los números $31+18$

- E. ¿Pero porque te salio cuarenta y nueve?

Realiza otra suma de $31+11$. Cuarenta y dos.

- E. ¿Donde salio este once?

Estela De mi cabeza.

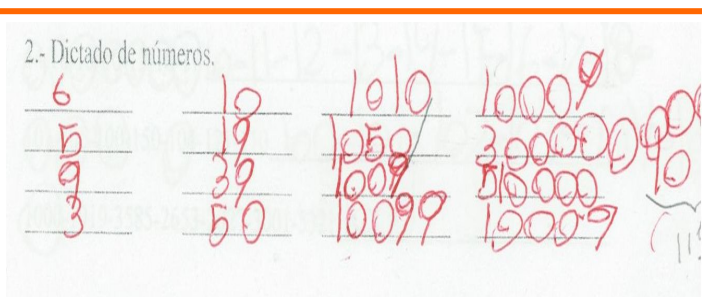
Muestra la suma que hizo. Porque aquí treinta y uno le ponemos más once, me salio cuarenta y dos.

Aquí el alumno buscó el numero 11 mentalmente. Después los suma. Se le dificulta encontrar una representación adecuada del problema y no atina realizar una representación adecuada para dicho problema.

Cuestionario inicial sobre el sistema decimal indo-arábigo

Los resultados de esta etapa revelan que los estudiantes desarrollan ideas intuitivas sobre el sistema indo-arábigo; Lerner y Sadovsky (1994): 1) la numeración escrita corresponde con la numeración hablada; los niños escriben el número como lo escuchan, 2) el rol de los números nudos (decenas, centenas y unidades de millar) del sistema decimal, les permite producir sus propios números. Los niños desarrollan: “*el papel de la numeración hablada*”, es decir, los niños escriben los números tal cual los escuchan. Como se puede apreciar en lo que escribió Lázaro a la solicitud de la pregunta número dos:

Tabla No. 5
Cuestionario de escritura numérica (SND)

Números dictados	Números escritos
<p>En la tercera columna se le dictaron los números: 110, 150, 109 y 199. Lázaro escribió: 1010 para 110 1050 para 150 1009 para 109 10099 para 199.</p>	

Se verifica que los alumnos escriben los números tal como los escuchan: ellos están construyendo la numeración escrita de acuerdo con su oralidad. Se vislumbra que los estudiantes tienen nociones intuitivas del valor posicional que ocupa el número.

Cuestionario inicial sobre el sistema oral vigesimal: el conteo oral

Los resultados de esta parte del estudio parece revelaron una “combinación” del sistema vigesimal con el decimal indo-arábigo en la oralidad. Teniendo en cuenta que las sub-bases del sistema vigesimal son el 5, el 10 y el 15, y estos se usan para formar números más grandes, algunos niños reconocieron poco estas agrupaciones.

Después de la primera pregunta del cuestionario oral, se pidió a los niños que escribieran en Mixteco el vocablo de los números expresados anteriormente. A partir de las respuestas de los niños, se encontró que, el número treinta y cinco lo formaron usando las reglas del sistema decimal. También, se verifica que los números 5, 10, y 15 que fungen de base para desarrollar números más grandes son reconocidos en la oralidad pero no en la escritura; es decir, tres de los niños conocen el número quince tanto en la oralidad como en la escritura numérica, pero no lo reconocen en la agrupación del número 35. Al escribir, por ejemplo, el número 35, lo forman como: $20 + 10 + 5$: se puede deducir que los niños elaboran hipótesis de acuerdo con el sistema decimal para formar este número, siendo que el 35 en Mixteco se forma $1(20) + 15$. Los niños desarrollan hipótesis, conocen y usan el conteo oral Mixteco, pero su escritura parece estar fuertemente influenciada por el sistema de numeración decimal indo-arábigo. A continuación se muestra cómo los estudiantes desarrollan la escritura oral del Mixteco.

Tabla No. 6

Cuestionario vigesimal Mixteco

Escribe los números en Mixteco	Vocablo en Mixteco
<p>Los niños escribieron todos los números que conocían. Cuando César escribió el número 35, lo formó Oko utsi u'un que significa $1(20) + 10 + 5$.</p>	<p>35 OKO utsi u'un 36 OKO utsi iya 37 OKO utsi utsa 38 OKO utsi una 39 OKO utsi iin 40 OKO utsi iin uxico</p>

Para dar cuenta de cómo los niños elaboraron hipótesis a partir del número 35 se recurrió al análisis de los vocablos utilizados en el sistema oral vigesimal Mixteco. Los niños construyen el número 35 con las reglas del sistema decimal $20 + 10 + 5$, considerando que esta construcción en el sistema vigesimal Mixteco es $1(20) + 15$, se puede observar la influencia del sistema decimal sobre el sistema vigesimal en la escritura. De acuerdo con los resultados, se puede observar que los niños desarrollan ideas intuitivas de los dos sistemas de numeración: decimal y vigesimal. Parece existir un predominio de uso de las reglas del sistema decimal indo-arábigo sobre el sistema vigesimal. Una de las posibles hipótesis es que los alumnos son introducidos al sistema decimal indo-arábigo, y lo utilizan, incluso para desarrollar el sistema vigesimal en la escritura. Pareciera existir un conocimiento oral del sistema vigesimal que no se ha desarrollado en la escritura. Los números más reconocidos son el cinco, el diez, el quince, el veinte y el cuarenta; éstos podrían ser los más y mejor utilizados en la oralidad de estas comunidades.

Los niños desarrollan la escritura de los números de 1 al 34 en el sistema vigesimal. A partir del 35 mezclan su conocimiento sobre el sistema decimal y vigesimal para escribir los números. Los resultados de la entrevista clínica individual revelaron que los niños tienen ideas tempranas acerca de los números, y que en algunos casos se aproximan a las reglas formales del sistema de numeración decimal.

Conclusiones

A partir de los resultados arrojados en el estudio parece importante investigar la relación entre el aprendizaje y el desarrollo del pensamiento infantil asociado a contenidos específicos; por ejemplo, la adquisición de las reglas formales sobre el sistema de numeración decimal, es decir, investigar sobre el aprendizaje de las matemáticas, pero sin perder de vista el desarrollo cognitivo de los niños. Es fundamental conocer las concepciones infantiles asociadas a un determinado contenido matemático; esto permitirá diferenciar cuándo los niños presentan dificultades “reales” en el aprendizaje, o cuándo éstas corresponden más bien a un proceso evolutivo de dicho conocimiento matemático.

Agradecimientos

La investigación fue posible por el apoyo del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) de México por la beca de maestría otorgada.

Referencias bibliográficas

- Aguilar, V. M. y G. J. Navarro (2000). Aplicación de una estrategia de resolución de problemas matemáticos en niños. *Revista de psicología general y aplicada*. 53 (11), 63-83.
- Barriga, F. (2005). “Historia natural de los sistemas de numeración”. En M. Alvarado y B. M. Brizuela (Comps.), *Haciendo números: las notaciones numéricas vistas desde la psicología la didáctica y la historia*. México. Paidós.
- Brissiaud, R. (1993). *El aprendizaje del cálculo. Más allá de Piaget y de la teoría de los conjuntos*. Madrid. Visor.
- Brizuela, B. (2004). *Mathematical Development in young children: exploring notations*. NY: Teachers College Press.
- Brizuela, B. (2006). *Desenvolvimento Matemático na criança: explorando notacoes*. Brasil: Artmed.
- Brizuela, B. y G. Cayton (2010). Anotar números desde pre-escolar hasta segundo grado: el impacto del uso de dos sistemas de representación en la presentación. *Cultura y Educación*, 22 (2), 149 -167.

- Caballero, G. (2005). La numeración de Tu'un Savi. *Revista Tu'un Savi*. Números 7, 8 y 9. Huajuapán de León, Oaxaca.
- Caballero, G. (2008). *Diccionario del idioma Mixteco "Tutu Tu'un Nñuu Savi"*. Universidad Tecnológica de la Mixteca. México.
- Castro, E. (1991). Resolución de problemas aritméticos de comparación multiplicativa. *Memoria de Tercer Ciclo*. Universidad de Granada, Facultad de Ciencias, Granada.
- Castro, E., L. Rico y E. Castro (1995). Estructuras aritméticas elementales y su modelización. Bogotá, Editorial Iberoamericana.
- Delval, J. (1991). Descubrir el pensamiento de los niños. Introducción a la práctica del método clínico. Barcelona. Paidós.
- Fayol, M. (1996). *A crianza e o número. Da contagem à Resoluçào de problemas*. Puerto Alegre. Artes Medicas.
- Flores, M. R. (2005). El significado del algoritmo de la sustracción en la solución de problemas. *Revista Educación Matemática*. 17 (2). pp. 7-33
- Hollenbach, F. y E. Erickson (2000). Los números del Mixteco antiguo: Mixteco de Magdalena Peñasco. *Instituto Lingüístico de Verano*. pp. 1- 8. México, D. F.
- Kamii, C. ((2003). Reinventando la Aritmética I, II Y III, Aprendizaje Visor. Madrid. Sexta edición.
- Lerner, D. y P. Sadovsky (1994). El sistema de numeración: un problema didáctico. En: Cecilia Parra e Irma Saiz (Comps.). *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones*, Buenos Aires, Paidós.
- Puig, L. y F. Cerdán. (1989). Problemas aritméticos escolares. Madrid, síntesis.
- Rivera, A. y A. Codina (2001). "Hacia una instrucción basada en la resolución de problemas: los términos problema, solución y resolución". En Pedro Gómez y Luis Rico (eds.). *Iniciación a la Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje al Profesor Mauricio Castro*. Granada, España. pp. 125-135
- Vergnaud, G. (1990). Développement et fonctionnement cognitifs dans le champ conceptuel des structures additives. In S. Netchine-Grynberg (Ed). *Développement et fonctionnement cognitifs*. Paris, P.U.F., pp 261-277.
- Vergnaud, G. (1991). El niño, las matemáticas y la realidad. Problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. México. Trillas.
- Vergnaud, G. y C. Durand, (1983). "Estructuras aditivas y complejidad psicogenética". En Coll. C. (Comp.). *Psicología genética y aprendizajes escolares*. Madrid, España. Siglo XXI.
- Zhang, J. y D. Norman (1994). Representaciones en tareas cognitivas distribuidas. *Cognición*. 18. pp. 87-122.