XIII CONFERENCIA INTERAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
CIAEM 2011
26 - 30 Junio, 2011
Recife, Brasil
50 años
del Comité Interamericano de Educación Matemática

Mapas, conceptos y sucesiones reales CO

Elvira **Borjón** Robles
Universidad Autónoma de Zacatecas
México
eborjon@mate.reduaz.mx
Otilio B. **Mederos** Anoceto
Universidad Autónoma de Coahuila
México
omederosa@gmail.com

Resumen

En este trabajo se realiza un estudio de los conceptos de sucesión, sucesión acotada superiormente, sucesión acotada inferiormente, sucesión acotada, sucesión convergente y sucesión divergente. Representando a los conceptos por una cuádrupla (E, C, R, S) donde E es la extensión, y C es el contenido, R las representaciones de los objetos de *E y S* los significados asociados a los objetos. En este trabajo se estudia la extensión del concepto utilizando representaciones gráficas y mapas de extensiones como herramientas didácticas ya que proporcionan al alumno una técnica didáctica que permite abordar el tema de sucesiones en forma diferente a la tradicional. Se diseñan y se aplican dos hojas de trabajo a seis estudiantes de Licenciatura en Matemáticas.

Palabras clave: concepto, sucesión, representaciones, mapas de extensiones.

Introducción

En el aprendizaje de las matemáticas es primordial que los individuos aprendan los conceptos, pues estos juegan un papel muy importante en su desarrollo y son considerados parte esencial de su conocimiento. Existe preocupación por reflejar que el estudio y aprendizaje de los conceptos es de considerable importancia prueba de ello es que desde la psicología educativa se afirma:

> "…los conceptos constituyen un aspecto importante de la teoría de asimilación debido a que la comprensión y la resolución significativa de problemas dependen en gran parte de la disponibilidad en la estructura cognoscitiva del alumno tanto de conceptos supraordinados

> (en la adquisición inclusiva de conceptos) como de conceptos subordinados (en la adquisición supraordinada de conceptos)"
>
> (Ausubel, Novak y Hanesian, 2000, p.86)

En esta misma dirección pero desde el punto de vista de la matemática educativa, relacionado con la importancia que tienen los conceptos en el aprendizaje D´Amore afirma:

> Distinguir el "concepto" de su construcción no es fácil, y quizás, no es ni posible ni deseable: un concepto se halla, por así decirlo continuamente en fase de construcción y en esta misma construcción se halla la parte más problemática y por lo tanto más rica de su significado.
> Podríamos llamar a tal construcción, como hace otros autores: conceptualización.
> ¿Qué es o cómo se da la conceptualización? Sigue siendo fundamentalmente un misterio…
>
> (D´Amore 2003, p. 28)

También relacionado con la importancia del aprendizaje de los conceptos matemáticos se afirma:

> Los alumnos pronto se dan cuenta de que uno tiene que describir el entendimiento de un concepto con fines de habilidades; por ejemplo, para poder dar ejemplos, contraejemplos, para evaluar ejemplos, para conocer propiedades, para conocer las relaciones entre los conceptos, y para aplicar el conocimiento acerca del concepto. Este tipo de habilidades pueden ser evaluadas. Pero es más difícil describir lo que queremos decir al "tener imágenes de un concepto", "apreciar un concepto", o "conocer la importancia de un concepto".
>
> (Vollrath, 1994)

En general en el cálculo y el análisis se aborda el tema de sucesiones reales y resultados relacionados, a través de un enfoque axiomático es decir con la estructura formal, lógico matemática. Se parte de las definiciones, por ejemplo de sucesión y sucesión convergente, y utilizando las propiedades que aparecen en estas definiciones se demuestras teoremas y otras propiedades. Cuando esto se hace se da prioridad al desarrollo de habilidades lógicas y de un pensamiento lógico, en detrimento del desarrollo de la intuición. Los ejemplos que se abordan en la estructura axiomática, se presenta una sucesión y se demuestra que converge, o que no converge, utilizando la definición de convergencia o su negación. Se obtiene así un ejemplo de una sucesión convergente, o una sucesión divergente, respectivamente. Lo que proponemos es más amplio que eso:

Partimos de representaciones. Iniciamos con representaciones gráficas de sucesiones particulares de diferentes tipos: acotadas superiormente y no acotadas superiormente, acotadas inferiormente y no acotadas inferiormente, acotadas y no acotadas convergentes y no convergentes, entre otros conceptos, para que los estudiantes encuentren rasgos gráficos comunes de cada tipo. Después se guía a los estudiantes para que pasen de las representaciones gráficas a las analíticas.

Determinar el contenido de los conceptos. Posteriormente, los estudiantes serán orientados para llegar a las definiciones correspondientes, lo que implica determinar el contenido.

Trabajo con la Extensión. Finalmente, se les presentarán sucesiones para que ellos determinen, utilizando las propiedades que aparecen en la definición correspondiente, si pertenecen o no a su extensión.

En ese sentido, nuestra preocupación se orienta a proponer alternativas didácticas que permitan que los alumnos construyan los conceptos de: sucesión, sucesión acotada inferiormente, sucesión acotada superiormente, sucesión acotada y los conceptos contrarios a este desde la intuición, contrario a la forma tradicional en que estos son enseñados, con el rigor de la estructura lógica.

Objetivo

Desarrollar los conceptos de sucesión, sucesión acotada inferiormente, sucesión acotada superiormente, sucesión no acotada inferiormente, sucesión no acotada superiormente, sucesión acotada, sucesión no acotada sucesiones convergente y no convergentes en alumnos de licenciatura en matemática utilizando representaciones y mapas de extensiones.

Marco Teórico

Conceptos

Se representan los conceptos por una cuádrupla (E, C, R, S) donde E es la extensión, y está formada por de todos los objetos que corresponden al concepto, C es el contenido, es decir un conjunto, $\{Pi\}$, $i \in I$ (I es un conjunto), de propiedades esenciales Pi de objetos, cuyo cumplimiento es suficiente para dado un nuevo objeto determinar si pertenece o no pertenece a la extensión del concepto, R las representaciones de los objetos de *E y S* los significados asociados a los objetos.

Para el caso del concepto de sucesión el contenido y la extensión se ilustran en la siguiente definición:
Definición 1. Una sucesión s de N en R es una función de N en R que cumple las siguientes propiedades:

P1) s es subconjunto de NxR
P2) Para todo n en N, existe un s_n de R tal que (n, s_n) está en R
P3) Si $s_{n1=}$ s_{n2} entonces n1=n2

El contenido C del concepto de sucesión real es: C = {P1, P2, P3}.
Su extensión la forman todas las funciones que satisfacen las propiedades P1, P2, P3, y se indica por *S*(N).

Mapas

Según Beltrán, (1998, pp.155) "…el significado del aprendizaje se percibe más fácilmente cuando los contenidos del aprendizaje están organizados, poseen una estructura y están relacionados entre sí. Ningún instrumento mejor que los mapas conceptuales para lograr este objetivo".

Joseph D. Novak, en una entrevista concedida especialmente a EDUTEKA (EDU) expresó

> "Los Mapas Conceptuales, como los conocemos y los describimos se desarrollaron en 1972 dentro de un proyecto de investigación a mi cargo en la Universidad de Cornell. Este proyecto se enfocó en hacer seguimiento a estudiantes de educación Básica desde el primer grado hasta el grado 11°, para estudiar de qué manera la enseñanza en los conceptos básicos de ciencias en los dos primeros grados escolares influenciaría el aprendizaje posterior en

> ciencias y, además, comparar estudiantes que recibieran esa instrucción temprana con los que no la recibieran”.

Para Jones, (1987, citado por Beltrán, pp.157) se distinguen tres clases de mapas conceptuales: mapas araña, mapas encadenados y mapas jerárquicos. Según Hernández, (1990, citado por Beltrán ,157), los mapas se han usado con una gran variedad de contenidos y grupos de edad, y con dos medios: los textos y los ordenadores. El contenido ha incluido disciplinas como ecología, genética, economía familiar, geología, etc. Y los grupos de edad llegan desde los alumnos de primaria a la universidad.

Beltrán, (1998, pp162-168) cita una gran cantidad de investigaciones que se han realizado sobre los mapas conceptuales. Entre ellas, consideramos las investigaciones que han contribuido a determinar diferentes clases de relaciones en los mapas conceptuales (Armbruster y Anderson, 1984), (Huang, 1988) y (Mc Allese, 1988). “Las relaciones son muy variadas, entre las cuales destacamos estas nueve: A es una instancias de B (por ejemplo, tipo de, clase de, y por ejemplo). La segunda, A es una propiedad de B (un rasgo de, es una característica de, se llama y es definido como). La tercera, A es idéntico a B (es idéntico a y es lo mismo que). La cuarta, A es semejante a B (es como, es semejante a, de manera semejante). La quinta, A no es semejante a B (es diferente, en contraste). La sexta, A es mayor que o menor que). La séptima, A ocurre antes que B (y después, antes,…). La octava, A causa a B (causa, produce, porque, consiguientemente). La novena, A permite a B (permite, requiere).

El concepto de mapa no es en la actualidad sólo de uso en la geografía, sino que también ha invadido otras áreas del saber entre ellas la biología, la psicología y la didáctica. Se sabe que para representar la disposición de los cromosomas dentro de una célula, se utiliza el mapa genético; que Novak y Gowin introdujeron el concepto de mapa conceptual –muy conocido hoy en el ámbito educativo– para representar relaciones entre conceptos y que Tony Buzan le llamó mapa mental a una técnica que ideó para la toma de notas, la cual ha sido desarrollada por Brinkmann (2003) para su uso en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática.

El enriquecimiento del significado inicial del concepto de mapa por su uso en contextos no geográficos ha llevado a que la Real Academia Española (RAE) haya reconocido varios significados de la palabra mapear, de manera que no se reducen sólo a la acción de construir mapas geográficos, sino también a acciones como “localizar y representar gráficamente la distribución relativa de las partes de un todo” (RAE, 2006).

Se han ampliado los significados conocidos del concepto de mapa, al proponer mapas de otros tipos para representar relaciones entre conceptos matemáticos y contribuir de esa manera al aprendizaje significativo de la matemática. En estos trabajos se introducen y caracterizan los conceptos de mapa de extensiones y mapa de proposiciones, los cuales tienen gran utilidad para la representación de relaciones conceptuales matemáticas.

Mapas de extensiones.

Un *mapa de extensiones* es un diagrama (una imagen visual) en el que se representan gráficamente las extensiones de varios conceptos que se han definido a partir de un mismo concepto; o entre los que existe alguna relación de dependencia (por ejemplo, tienen relación con un mismo concepto). Mederos (2009)

Cuando se ha construido adecuadamente un mapa de este tipo, se facilita el establecimiento y el recuerdo de todas las relaciones mediante proposiciones entre los conceptos correspondientes a las extensiones que aparecen en el mapa, o sea, es posible establecer el *mapa de proposicion*es correspondiente. Se pueden establecer, también, todas las relaciones mediante relaciones y operaciones de la teoría de conjuntos, y haciendo uso, además, de la cardinalidad; lo que constituye un *mapa simbólico*.

Los mapas de extensiones forman parte de los instrumentos que mejor propician y facilitan que el aprendizaje sea significativo; ya que por una parte, nuestro conocimiento está conectado o puede conectarse con todos los otros conocimientos con los que guarda relación por medio de conceptos y sus relaciones y, por otra parte, porque son organizadores excelentes de los contenidos y propician estrategias de elaboración. En consecuencia, facilitan que el significado del aprendizaje se aprecie más fácilmente.

En matemática se puede comenzar con la construcción de un mapa mediante el cual se establecen las relaciones que, como conjunto, tienen las extensiones de los conceptos que se estudian atendiendo a las características de sus intersecciones y diferencias. Puede continuarse con la determinación de la cardinalidad de cada uno de los conjuntos que surgen como resultado de aplicar las operaciones de intersección y de diferencia a los distintos pares de extensiones. Posteriormente pueden construirse otros mapas mediante los cuales se establecen las relaciones de intersección y diferencia que tienen las extensiones que satisfacen determinadas estructuras algebraicas, métricas, topológicas o medibles, etc.

La forma del mapa de extensiones depende del concepto de partida (concepto universo) que se tome para describir la organización de una colección de conceptos y está en correspondencia con sus relaciones de inclusión y con las operaciones conjuntista de intersección, unión, diferencia y diferencia simétrica.

Generalmente un mapa de extensiones comienza con el dibujo de una primera aproximación que refleja la información que se tiene en un determinado momento. Las insuficiencias de ese mapa compulsan a la determinación de más información y al dibujo de una sucesión de mapas que precisen, completen y mejoren la representación de la información que se va agregando. Cada nuevo mapa de esta sucesión constituye una aproximación mejor de la relación real de la colección de extensiones.

Metodología.

La forma de trabajo con los estudiantes fue a través del diseño e implementación de dos hojas de trabajo, de la intervención de los investigadores con los alumnos y de trabajo en equipo. Se trabajan cuatro horas semanales durante cuatro semanas, con seis alumnos del segundo semestre del Programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Autónoma de Zacatecas, México.

La primera hoja de trabajo incluye 16 representaciones gráficas de sucesiones en dos dimensiones, de diferentes tipos; convergente y no convergentes, luego se incluyen las mismas gráficas acotadas superiormente y no acotadas superiormente, acotadas inferiormente y no acotadas inferiormente, acotadas y no acotadas, para que los estudiantes encuentren rasgos gráficos comunes de cada tipo y determinen las características de cada gráfica. En la tabla 1 se describen las características de las sucesiones que se trabajaron.

Tabla 1

Características de las sucesiones de la hoja de trabajo 2

Sucesiones	total
Convergentes	9
No convergentes	7
Acotadas Superiormente	11
No Acotadas Superiormente	5
Acotadas Inferiormente	16
Acotadas	11
No acotadas	5

Posteriormente, los estudiantes se orientan a través de la intervención de los investigadores para que lleguen a las definiciones correspondientes, lo que implica determinar el contenido.

Quedando algunas de las definiciones de la siguiente forma:
Definición 2. (Definición del concepto de sucesión acotada inferiormente).Una sucesión numérica se denomina acotada inferiormente si existe un número real i tal que la imagen de la sucesión está contenida en el intervalo $(i, +\infty)$.

Todo número i para el cual la imagen de la sucesión está contenida en el intervalo $(i, +\infty)$, recibe el nombre de cota inferior de la sucesión. Obviamente para toda sucesión acotada inferiormente existen infinitas cotas inferiores.

La imagen de una sucesión $\{x_n\}$ está contenida en el intervalo $(i, +\infty)$ si, y solo si, $i<x_n$.
El contenido del concepto de sucesión acotada inferiormente es {p1}, donde p1 denota la propiedad: la imagen de la sucesión está contenida en el conjunto $(i, +\infty)$.

Utilizando la propiedad p1 la definición de sucesión puede darse de la forma siguiente:

Definición 2´. Se denomina sucesión acotada inferiormente a toda sucesión numérica que cumple la propiedad p1.
La extensión del concepto de sucesión acotada inferiormente se denota por S_i. Es decir, S_i es el conjunto de todas las sucesiones acotadas inferiormente.

Definición 3. (Definición del concepto de sucesión no acotada inferiormente). Se llama sucesión no acotada inferiormente a toda sucesión que incumple la propiedad p1.

Definición 4. (Definición del concepto de sucesión acotada superiormente). Se dice que una sucesión numérica está acotada superiormente, o que es una sucesión acotada superiormente, si existe un número real s tal que la imagen de la sucesión está contenida en el intervalo $(-\infty, s)$.

Todo número s con estas características recibe el nombre de cota superior de la sucesión.
La imagen de una sucesión $\{x_n\}$ está contenida en el intervalo $(-\infty, s)$ si, y solo si, $x_n<s$.

El contenido del concepto de sucesión acotada superiormente es $\{p2\}$, donde p2 denota la propiedad: la imagen de la sucesión está contenida en el conjunto $(-\infty, s)$.

Utilizando la propiedad p2 la definición de sucesión puede darse de la forma siguiente:
Definición 4´. Se denomina sucesión acotada superiormente a toda sucesión numérica que cumple la propiedad p2.

La extensión del concepto de sucesión acotada superiormente se denota por S_S. Es decir el conjunto S_s consiste de todas las sucesiones que son acotadas superiormente.

Definición 5. (Definición del concepto de sucesión no acotada superiormente). Se llama sucesión no acotada superiormente a toda sucesión que incumple la propiedad p2.

Definición 6. (Definición del concepto de sucesión acotada). Se dice que una sucesión numérica está acotada, o que es una sucesión acotada, si existen números reales i y s tales que la imagen de la sucesión está contenida en el intervalo (i, s).

La imagen de una sucesión $\{x_n\}$ está contenida en el intervalo (i, s) si, y solo si, $i<x_n<s$.
El contenido del concepto de sucesión acotada $\{p1, p2\}$. Utilizando las propiedades p1 y p2 la definición de sucesión puede darse de la forma siguiente:

Definición 6´. Se denomina sucesión acotada a toda sucesión numérica que cumple las propiedades p1 y p2. La extensión del concepto de sucesión acotada superiormente se denota por S_a. Es decir el conjunto S_a consiste de todas las sucesiones que son acotadas

Luego una sucesión es acotada si, y sólo si, es una sucesión acotada inferiormente y superiormente, o sea, una sucesión pertenece a S_a si, y solo si, pertenece a S_i y S_s.

Se les presentarán sucesiones para que ellos determinen, utilizando las propiedades que aparecen en la definición correspondiente, si pertenecen o no a su extensión.

En la segunda hoja de trabajo se estructuran 34 preguntas abiertas en las que se solicitan representaciones geométricas y analíticas de sucesiones particulares con determinadas características, por ejemplo "Dibuje las representaciones gráficas del dominio, la imagen y el grafo de tres sucesiones acotadas inferiormente con características diferentes" y ligada a esta pregunta "Construya representaciones analíticas del dominio, la imagen y el grafo, de tres sucesiones acotadas inferiormente tales que cada una de ellas corresponda a las características de una de las representaciones gráficas dibujadas para dar solución al ejercicio anterior"

Por otro lado en la intervención que se tuvo con los alumnos se pusieron en práctica diversas estrategias:

a) Para poner en práctica el aprendizaje mediado se solicita a los alumnos que en equipos discutan y escriban lo que entienden por sucesión, sucesión acotada superiormente, sucesión acotada inferiormente
b) Se trabaja con ellos el contenido de los conceptos, de sucesión acotada superiormente, sucesión acotada inferiormente y sucesión acotada y los contrarios a estos, es decir lo que caracteriza a cada uno de los conceptos.

c) Se introduce y ejemplifica el concepto de mapa de extensiones.

d) se trabajan con lo los alumnos definiciones alternativas.

La evaluación de los resultados se hace en base a la detección de la capacidad del alumno para:

- Determinar a través de las representaciones gráficas si las sucesiones que se le presentan son: acotadas inferiormente, acotadas superiormente y acotadas y los conceptos contrarios a estos.
- Representar analíticamente el dominio, la imagen y el grafo.
- Elaboración de mapas de extensiones.

Conclusiones

De las representaciones gráficas: los seis alumnos detectan correctamente las gráficas que se solicitan, de sucesiones acotadas inferiormente, sucesiones acotadas superiormente, acotadas y los conceptos contrarios a estos.

De las representaciones analíticas del dominio, de la imagen y del grafo se observa que los seis alumnos tienen claro que el dominio es el conjunto de los números naturales, no así que la imagen es un subconjunto de algún intervalo, dependiendo del tipo de sucesión que se presente, la mayoría termina escribiéndolo en términos de intervalos de números reales, sin embargo, se detecta que si lo relacionan con el concepto en función. El grafo lo describen correctamente, notándose algunos problemas con la descripción en términos de conjuntos y la notación funcional.

De los mapas de extensiones. En principio se detecta que no se tiene claro este concepto, cuando se solicita a los estudiantes dibujar un mapa de extensiones de los conceptos de sucesión, sucesión acotada inferiormente y sucesión no acotada inferiormente, simplemente reproducen el mismo mapa que se les dio como ejemplo. Sin embargo, se realiza una intervención por parte del maestro y en lo que sigue realizan mejor la tarea de dibujar mapas de extensiones. En la imagen 1 se ilustra el mapa de extensiones de sucesiones, sucesiones acotadas superiormente, sucesiones acotadas inferiormente y sucesiones acotadas.

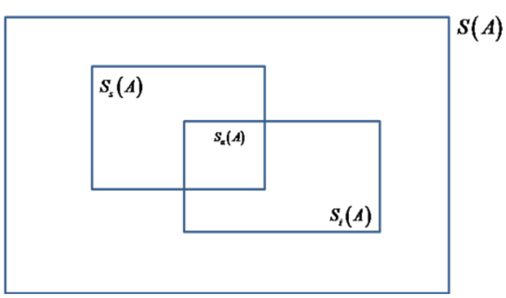

Imagen 1. Ejemplo de mapa de extensiones

De manera sucinta en la tabla 2 se recogen las reacciones de los seis alumnos de la hoja de trabajo dos con algunas observaciones más especificas en particular las repuestas sobre convergencia o divergencia de las sucesiones.

Tabla 2.
Reacciones de los alumnos de la hoja de trabajo de convergencia.

Forma de contestar	**No de alumnos**	**Observaciones**
Correctamente	3	Se afirma que las oscilantes ni convergen ni divergen con afirmaciones como “no tiene como límite un número real, se mueve de -1 a 1”
Intermedio	1	Confusión con el concepto de función, misma que impactó en sus respuestas relacionadas con la determinación de la convergencia o divergencia
Incorrecto	2	Afirman que las sucesiones que no convergen, divergen y viceversa, y las sucesiones que son acotadas superiormente, no los son.

De esta manera se han utilizado como instrumentos didácticos, las representaciones geométricas y los mapas de extensiones para hacer que los estudiantes desarrollen el contenido de los conceptos en juego.

Prospectiva

Es importante resaltar que hace falta trabajo con los estudiantes sobre el concepto de convergencia de sucesiones reales, con la idea siempre de que los construyan intuitivamente utilizando representaciones y mapas de extensiones. Después de trabajado el concepto de convergencia, lo que nos interesa es relacionarlo con el concepto de sucesión acotada para que a través del uso de representaciones y mapas de extensiones el alumno llegue a estructurar las afirmaciones “toda sucesión que es convergente es acotada” y “no toda sucesión que es acotada es convergente” Solo después de que se haya adquirido un concepto atendiendo a su extensión, contenido y representaciones. Más aun queda abierta la posibilidad de trabajar el significado a través de la teoría de las funciones semióticas.

Referencias y bibliografía

Ausubel, D. P., J.D. Novak y H. Hanesian. (2000). *Psicología Educativa. Un punto de vista cognoscitivo*. México: Editorial Trillas.

Beltrán, J. (1998). *Psicología evolutiva y de la educación. Procesos, estrategias y Técnicas de aprendizaje. Editorial Síntesis*, S.A. Madrid, España

D´Amore (2003). *Bases Filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la Didáctica de la Matemática*. Grupo Editorial Iberoamérica S.A de C.V. Traducción de Martha Isabel Fandiño Pinilla.

Mederos, O. B. y González, B. E. (1999). Una variante metodológica para el estudio de los conceptos a partir de una generalización. *Foro de la Revista Electrónica del Departamento de Matemáticas.* Facultad de Ciencias, UNAM. FORO.RED-MAT,Vol. 9.

Mederos, O. B. y Mederos, B. J. (2009). Los ejemplos y contraejemplos como herramientas para facilitar el proceso de generalización conceptual. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 22, 257-266.México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Mederos, O. B. y Ruíz, A. M. (2002). La formación, desarrollo y generalización de conceptos en la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática. En J. R. Delgado (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 16, 218-223. Chile: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Vollrath H. (1994). Reflections on mathematical concepts as starting points for didactical thinking. En R. Biehler, R. W. Scholz, R. Sträser, B. Winkelmann (Eds), *Didactics of mathematics as a scientific discipline* (pp. 61-72), London: Kluwer, Academic Publishers.