



## La problemática de la tridimensionalidad y su representación en el plano

Melissa **Andrade** Molina  
CINVESTAV

México

[mandrade@cinvestav.mx](mailto:mandrade@cinvestav.mx)

Alex **Montecino** Muñoz  
CINVESTAV

México

[montecino@convestav.mx](mailto:montecino@convestav.mx)

### Resumen

El objetivo de este estudio, converge en detectar las dificultades asociadas al uso de la visualización espacial. Se realizó un trabajo de observación de campo -que se desprendió de un análisis previo- que tiene como finalidad identificar si la visualización espacial es utilizada como recurso pedagógico sobre las actividades que involucran lo tridimensional. En los resultados de esta investigación podemos encontrar que los estudiantes tienen grandes dificultades en el trabajo y representación de lo tridimensional y, más aún, acudir a ella para encontrar la solución de una problemática, por otra parte, podemos ver que no se formaliza la tridimensionalidad durante la enseñanza escolar, lo que obstaculiza, desde nuestro punto de vista, la comprensión de ésta.

*Palabras clave:* visualización espacial, recurso pedagógico, representación, tridimensionalidad, obstáculo.

### Contenido

#### Planteamiento del problema

Los cuerpos geométricos o sólidos de revolución, es decir todas aquellas representaciones que requieren de un “eje z”, son presentadas en el aula bidimensionalmente<sup>1</sup>. Es usual que un

---

<sup>1</sup> Se entiende por esto aquellos sólidos o cuerpos que se grafican en 2 dimensiones, por ejemplo en el plano cartesiano, y no en el espacio (3D), es decir, que son dibujados en el pizarrón haciendo uso de la perspectiva.

profesor, al transponer estos contenidos, acuda a una representación icónica en el pizarrón, por ejemplo al bosquejar un cubo en el plano mediante un dibujo con perspectiva, sin embargo ¿Implica aquello que los estudiantes se apropien del concepto de cubo? ¿Es factible que un estudiante que no haya adquirido una visualización espacial vea dos cuadrados superpuestos con cuatro segmentos uniendo sus vértices?

Es por lo anterior que el presente estudio evidencia la dificultad existente al formular una *imagen mental* de una figura en tres dimensiones. El objetivo de esta investigación converge en detectar las dificultades asociadas al uso de la visualización espacial dentro del contexto áulico chileno. El interés por interiorizarse en este suceso surge a partir de un estudio previo en el que se detectaron dificultades al momento de generar imágenes mentales y representaciones en el plano de figuras tridimensionales, lo que conlleva, desde nuestro punto de vista, a conflictos cognitivos, como lo es el salto del plano al espacio.

Para abordar este fenómeno se efectuó una revisión de: los Planes y Programas propuestos por el Ministerio de Educación de Chile, MINEDUC, de Primer Año Básico (NB1) a Cuarto Año Medio (NM4); los textos del Estudiante otorgados por el MINEDUC desde Séptimo Año Básico (NB5) a Cuarto Año Medio (NM4); el Texto de Apoyo del Docente correspondiente a NM4. Siendo el análisis de esta reflexión el sustento para establecer la relación entre los distintos niveles escolares frente a cómo se abordan objetivos, aprendizajes esperados, actividades y contenidos mínimos, para posteriormente identificar si están direccionados a generar una visualización espacial en los alumnos. Se identificó que no existe un trabajo profundo que propicien cambios de registros entre los diferentes tipos de representaciones semióticas, conllevando a conflictos cognitivos al momento de cambiar dimensiones, o más específicamente, el salto del plano al espacio. Con estos antecedentes se aplicó una actividad a estudiantes de NB5, NB6, NM3 y NM4 con la finalidad de reconocer las dificultades que se presentan al trabajar con una tercera dimensión como recurso para la solución de una problemática.

Centramos nuestra problemática de investigación en las dificultades generadas al realizar representaciones mentales del espacio, en lo que respecta al discurso matemático escolar, entendiendo éste a partir de los textos escolares y de los planes y programas del MINEDUC. Por lo cual nuestra pregunta de investigación fue la siguiente: ¿Los estudiantes recurren a la visualización espacial o tridimensionalidad al enfrentarse a situaciones que pongan en juego sus conocimientos, pero que a la vez no involucren fórmulas algebraicas o patrones de solución?

### **Antecedentes**

La visualización espacial puede utilizarse como recurso pedagógico (por parte del profesor) o herramienta (por parte del alumno) para facilitar la comprensión y el entendimiento de saberes matemáticos abstractos involucrados en el proceso de transposición o en la interiorización de éstos por parte de los estudiantes (Andrade & Montecino, 2009). Sin embargo, poco se ha estudiado con respecto a las dificultades que surgen al visualizar lo tridimensional en el plano, por ejemplo al graficar una función de una variable real en el plano cartesiano cuando se transforma en un cuerpo generado mediante la rotación de la curva en torno a un eje determinado.

Podemos observar que, por ejemplo, en los textos escolares se priorizan contenidos que serán evaluados en las pruebas *SIMCE*<sup>2</sup> y *PSU*<sup>3</sup>, es decir, se pone especial énfasis en desarrollar las competencias necesarias en los estudiantes para que logren desenvolverse con mayor facilidad en pruebas estandarizadas a las cuales deberán enfrentarse en algún momento de su formación escolar. En algunos ensayos oficiales de PSU, como el publicado por la Universidad de Chile en el diario El Mercurio el año 2008, es posible reconocer ejercicios que, si bien pueden algebraicamente, involucran el uso de una visualización espacial. Por lo cual sostenemos que ésta puede ser utilizada como recurso o alternativa de solución por algunos estudiantes.

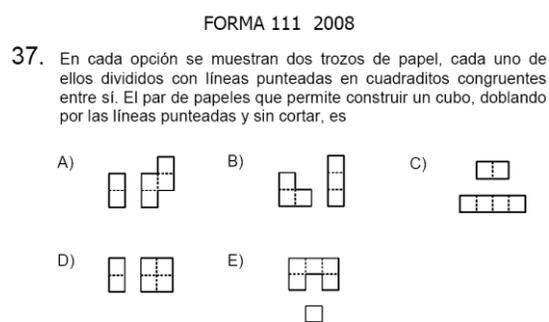


Figura 1: Ejercicio de PSU  
Tomado de Facsímil Oficial de Matemáticas, p. 15

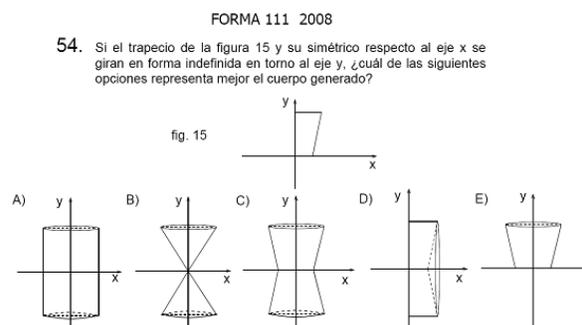


Figura 2: Ejercicio de PSU  
Tomado de Facsímil Oficial de Matemáticas, p. 21

Algunos objetos matemáticos están construidos bajo procesos dinámicos en función del tiempo, como es el caso de los sólidos de revolución o la rotación de figuras planas, por lo que el fenómeno a estudiar se torna más complejo, ya que no sólo involucra la aprehensión de saberes matemáticos, sino aspectos visuales, porque para realizar un bosquejo o un dibujo donde estén involucrados objetos reales es la visualización espacial y el uso de la perspectiva, en lo cual subyace la identificación de cuerpos geométricos. En relación con lo anterior Piaget (1991) señala que como seres humanos estamos limitados a visualizar la abstracción de la matemática en dos dimensiones, que es diferente a nuestra cotidianeidad.

Además en el tratamiento de conceptos matemáticos, como integrales definidas, existe un salto drástico entre el trabajo de gráficas bidimensionales a la tridimensionalidad, lo que conlleva a reflexionar sobre cómo son presentados los contenidos que involucran el uso de la visualización espacial en enseñanza escolar. Viéndose reflejado, por ejemplo, al no explicitar una analogía entre isometrías de figuras planas con isometrías en el espacio - rotaciones, traslaciones, reflexiones, entre otras-. Por otra parte creemos que los alumnos tienen dificultades al utilizar una tercera dimensión como recurso para la solución de una problemática en particular, en otras palabras, no les resulta inmediato.

Finalmente, cabe señalar que una gran parte de las investigaciones que abarcan las dificultades sobre los recursos geométricos, icónicos, gráficos, entre otros, se centran

<sup>2</sup> El SIMCE evalúa el logro de los Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios del Marco Curricular de Enseñanza Básica o Media. A partir del año 2006, se evalúa todos los años a 4° Básico y se alternan 8° Básico y 2° Medio.

<sup>3</sup> Las PSU son instrumentos de evaluación educacional que miden la capacidad de razonamiento de los postulantes egresados de la Enseñanza Media, teniendo como medio, los contenidos del Plan de Formación General de Lenguaje y Comunicación, de Matemática, de Historia y Ciencias Sociales y de Ciencias. Esta última incluye a Biología, Física y Química.

principalmente en la articulación de registros de representación semiótica, por ejemplo, desde un registro algebraico a uno gráfico y viceversa, o desde un registro verbal a uno algebraico y luego a uno gráfico (González, 2005; Anido, López & Rubio Scola, 2006).

### **Fundamentación teórica**

Creemos que lo cognitivo y lo visual son necesarios para la adquisición de la visualización espacial, es por ello que en esta investigación se contrastaran: la Teoría Evolutiva de Piaget (1991) centrada en aspectos cognitivos de la inteligencias - mecanismos de acción, de pensamientos, la adquisición de habilidades y memorización de información-; la Teoría de la Capacidad Creadora de Lowenfeld (1980) entendida como una fluidez de ideas que permite pasar de un tipo de pensamiento al otro, manifestándose a través de la acción o realización, teniendo como foco la perspectiva visual. Cabe señalar que en relación al desarrollo de la capacidad creadora y de la premisa “Todos los niños nacen creativos”, Getzels y Jackson (1962) afirman que la escuela coarta el pensamiento creador, pudiendo anular la creatividad de los estudiantes, ya que los profesores prefieren alumnos dóciles y conformistas; Apoyándonos de ciertos elementos de la Didáctica Fundamental como los Registros de Representación Semiótica - formación, tratamiento y conversión - de Duval (1999) y la noción de obstáculo en el sentido de Brousseau (1986).

Piaget (1991) plantea una evolución, mediante estadios, señalando que es uniforme para todos los niños indistintamente del contexto en el que se encuentren inmersos, por otro lado Lowenfeld (1980) destaca, además, que en todo proceso de creación interactúan distintos factores, como los ambientales, sociales, emocionales, entre otros.

Al contrastar ambas propuestas vemos que éstas exponen diferentes niveles de abstracción del pensamiento para los mismos rangos etarios, como se puede ver reflejado en lo siguiente:

- Piaget (1991) señala que a los dos años y medios los niños son capaces de descubrir propiedades físicas de los objetos concretos que son manipulados, por ejemplo las cualidades de perspectiva. De acuerdo con Lowenfeld (1980) en esta edad se da comienzo a la autoexpresión, por lo que los individuos están más centrados en su cuerpo que en el entorno, más aún, señala que es entre los doce y los catorce años cuando surge la necesidad de expresiones tridimensionales, sin embargo sólo algunos son capaces de apreciar en el espacio estas cualidades al descubrir que pueden realizar dibujos con ilusión de profundidad.
- De los 10 a los 12 años, según Piaget (1991), se manifiestan las operaciones espaciales, donde son capaces de establecer el espacio que ocupan los objetos y su desplazamiento. Por otro lado Lowenfeld (1980) plantea que en el establecimiento de las representaciones espaciales influyen constantemente las emociones, de los 7 a los 9 años son capaces de distinguir las formas de un objeto, pero de los 9 a los 12 las actitudes egocéntricas, características de esta etapa, conllevan a dificultades para establecer relaciones espaciales debido a que se aíslan de su entorno y se centra en el *yo*.

Considerando que las representaciones mentales, para Duval (1999), son un conjunto de imágenes y concepciones que un individuo puede tener sobre un mismo objeto, sobre una misma situación y sobre aquellos que se les está asociado, donde las emociones, tal como señala Lowenfeld (1980), juegan un papel crucial al momento de generar estas representaciones, por lo que no serán uniformes para todos los individuos, ni generadas en el mismo rango etario.

Finalmente, la visualización espacial, utilizada como recurso pedagógico, puede generar obstáculos, en el sentido de Brousseau (1986), al momento de aprender contenidos que requieran de ella, ya que, como se señaló anteriormente, no todos los estudiantes pueden apropiarse del concepto de perspectiva, más aún es a partir de los 12 años cuando surge, según Lowenfeld (1980), la necesidad de la tridimensionalidad.

### **Diseño y metodología**

De la revisión de los Planes y Programas y Textos Escolares se indagó, más profundamente, acerca de la visualización espacial que desarrollan los estudiantes durante la enseñanza escolar. Para ello se aplicaron dos problemas que involucran el uso de la tridimensionalidad, uno a un grupo de 59 estudiantes de séptimo y octavo básico, y otro, a un grupo de 17 estudiantes de tercero y cuarto medio.

Las actividades consistieron en enfrentar a los alumnos a dos situaciones en las que subyace, como herramienta o recurso de solución, la visualización espacial. La primera, involucra una pregunta de ingenio cuya solución subyace en el pensamiento tridimensional, la segunda, una situación de construcción geométrica, que se resuelve a través de la manipulación de materiales tangibles, por lo que la carencia de visualización mental del espacio presenta dificultades que en algunos casos impiden aproximarse a la solución. El desarrollo de éstas fue registrado mediante observaciones de campo de tipo descriptiva, narrando los sucesos tal y como ocurrieron, destacando sólo la información que estimamos relevante para llevar a cabo el análisis.

Se seleccionaron estas dos actividades a fin de dar cuenta que a una parte no menor de estudiantes, ya en niveles finales de enseñanza básica y de enseñanza escolar, no les es inmediata la visualización mental de cuerpos tridimensionales, por lo que, creemos, tienden a trabajar y a pensar en dos dimensiones, es decir, sobre el plano, a pesar de que el mundo que les rodea tiene a lo menos tres variables. Ambas actividades requieren, por consiguiente, un quiebre al pasar del plano al espacio.

Para la aplicación de las actividades escogimos los últimos niveles de cada ciclo escolar (enseñanza básica: 7° y 8° básico y enseñanza media: 3° y 4° medio), cabe señalar que los cuatro niveles se han formado, desde primero básico a sexto básico, con los mismos profesores y que ambos cursos de enseñanza media han continuado su formación con el mismo profesor.

La primera actividad se aplicó a los niveles de séptimo y octavo año básico, con el fin de establecer un punto de referencia sobre las habilidades para desenvolverse en el espacio, por otro lado, para indagar acerca de la visualización espacial de los alumnos que se encuentran cursando los últimos años de enseñanza escolar, consideramos que la primera actividad no era muy adecuada ya que se anticipa, por experiencias pasadas, que los estudiantes por ejemplo se entramparán en algunas propiedades como: la suma de los ángulos interiores de un triángulo suman  $180^\circ$ , distinguiendo la presencia de obstáculos que pudiesen impedir hallar la solución de la actividad planteada. Es por esta razón que se decide aplicar la segunda actividad a los estudiantes de tercero y cuarto medio.

El análisis de la aplicación de los problemas de tridimensionalidad se llevó a cabo mediante el método de codificación abierta. El sustento para éste fue provisto sobre la base de la sensibilidad teórica y la discusión adquirida por el estudio de teorías de la didáctica fundamental, la perspectiva y las ciencias cognitivas, tales como la noción de obstáculo (Brousseau, 1983,

1986), la psicología cognitiva (Piaget, 1991) y el desarrollo de la capacidad creadora (Lowenflod, 1980).

**Resultados y discusión de resultados**

**i. Problema 1**

Un hombre se encuentra con un oso, para escapar de él corre 10 kilómetros hacia el sur, luego gira en 90° hacia el este y corre 10 kilómetros en esa dirección, luego gira 90° hacia el norte y corre otros 10 kilómetros y finalmente se encuentra con el mismo oso. ¿De qué color es el oso?

Una de las soluciones más recurrentes, por parte de los estudiantes que participaron en esta actividad, fue, al no encontrar una posible solución, aceptar la no existencia de esta. A modo de ejemplo, se presentan algunos tipos de respuesta:

En séptimo básico: *“Profe este ejercicio está malo, porque la única forma que sea el mismo oso es que se trasportara igual que Gokú”*. Ello revela que al centrarse en la “trayectoria o desplazamiento en el plano”, algunos alumnos incorporan elementos de su cotidiano (en este caso ciencia ficción de dibujos animados) para argumentar la imposibilidad de responder a lo que se pregunta.

*“No se sabe x q’ el primer oso nunca se dijo el color (...) faltan datos: Ubicación (en qué país o en qué región del mundo)”*

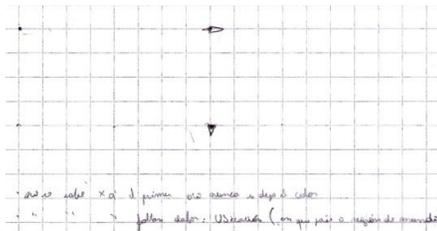


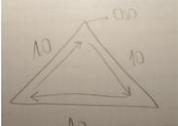
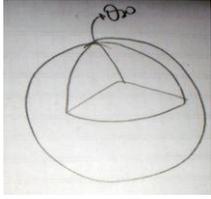
Figura 3: Respuesta de un estudiante

Se identifican otras respuestas en las que se invisibilizan los datos que se entregan en el problema, remitiéndose a responder la pregunta que se plantea *“¿De qué color es el oso?”* dando soluciones que son lógicas para ellos. Por ejemplo: *“El oso es café o negro, porque no hay más osos de otro color”*.

En tercero medio, los alumnos no lograban visualizar la solución del problema, ya que sus opiniones, tal como se anticipó, confluían en las propiedades de los triángulos en geometría euclidiana: *“la suma de los ángulos internos de un triángulo mide 180°”*, rechazando la posibilidad de que esto no se cumpla dentro de otro contexto. Por ejemplo: *“pero no que la suma de los ángulos interiores de un triángulo debe ser 180°, y ahí se pasa”*; *“3 ángulos de 90° = 270°”*; *“ah, entonces fácil, no tiene solución”* o *“¿Cómo vamos a saber de qué color es el oso, si el problema no tiene solución?, es ilógico. Está claro que el oso puede ser café, gris, negro o blanco, ¿o no?”*

Con relación a las posibles soluciones que se plantearon tenemos:

Solución	Tipo de Respuesta	Imagen
Respuestas que se limitan a dar cuenta del	Recorrido del hombre según los ángulos: <i>“R// Es café porque el resultado de caminar tanto(...) una C de café”</i>	

recorrido que realiza el sujeto	Recorrido del hombre según los tramos recorridos: “para que el oso sea el mismo, el hombre debe haber hecho este movimiento, o sea un triángulo”.	
Respuestas que revelaban el uso de lo tridimensional	“la única forma es que si camina en la tierra, entonces hace un movimiento así (dibuja una curva del centro a uno de los polos) entonces ahí sí se puede, pero no sabemos de qué color es el oso”; “El hombre camina en forma de triángulo, porque recorre tres veces 10 kilómetros y llega al mismo punto, para que los ángulos sean de 90° entonces debería ser con las capas de la tierra”.	

En términos generales, al observar el desarrollo de la actividad, podemos concluir que pocos estudiantes logran desprenderse de un pensamiento bidimensional, es decir, abandonar el plano, y sobre todo, la posibilidad de un trabajo sobre una superficie esférica, por ejemplo: “Nunca se me hubiese ocurrido hacer el movimiento en la tierra”. Además, se puede evidenciar que en los estudiantes hay conceptos arraigados que en esta ocasión, generan un *obstáculo*<sup>4</sup> para el trabajo asignado, como lo es el haberse apropiado que toda suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a 180°, enseñada y enfatizada durante la presentación y trabajo de los triángulos durante la enseñanza escolar.

## ii. Problema 2

**Problema 2:** Construir cuatro triángulos congruentes con seis segmentos del mismo largo (la medida de los palitos).

**Materiales:** 6 palitos de igual medida, forma y tamaño

Este problema de tridimensionalidad revela que los estudiantes no son capaces de utilizar la tercera dimensión como primer recurso para su solución, notamos que los estudiantes tienden a solucionar el problema con figuras planas, surgiendo luego la necesidad de utilizar la tridimensionalidad. Coincidiendo con lo que plantea Lowenfeld (1980) al señalar que lo tridimensional surge por la necesidad de representar su entorno en tres dimensiones. Cabe resaltar que este proceso no es inmediato, por ejemplo: “Que extraño que en lo primero que uno piensa es en buscar figuras que sean familiares, yo no llegué al tetraedro y nunca se me pasó por la cabeza salir del plano”.

Por otra parte se puede evidenciar la manipulación de las propiedades de figuras planas a fin de obtener la solución del problema. Por ejemplo, al dibujar un cuadrado y trazar sus diagonales, afirmando que se forman cuatro triángulos congruentes, revela que el estudiante está comprendiendo que un triángulo rectángulo puede tener todas las medidas de sus lados de igual longitud. Por el contrario, algunos a pesar de no confluir a una solución, son capaces de contraponer los resultados de sus compañeros con las propiedades de la geometría euclidiana, por ejemplo: “pero las diagonales de un cuadrado no miden lo mismo que sus lados”.

Las figuras obtenidas en la aplicación de esta actividad, en terceros y cuartos medios fueron las siguientes:

<sup>4</sup> Entendiendo a la noción de obstáculo desde el punto de vista de la Didáctica Fundamental, a saber, como un *conocimiento* que funciona en cierto rango de validez pero falla en otro.

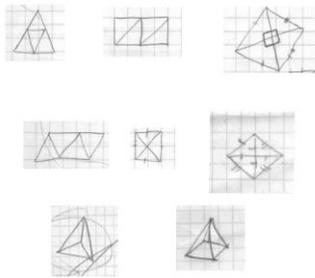


Figura 4: Síntesis de figuras propuestas por estudiantes

## Conclusiones

Dentro de los textos analizados -planes y programas de estudio, texto escolar para el estudiante y para el docente- podemos concluir que no se profundiza en las representaciones bidimensionales de cuerpos tridimensionales, lo cual implicaría que los estudiantes no incrementen sus habilidades para la manipulación de lo tridimensional. Las actividades que se centran en el trabajo con cuerpos geométricos o sus representaciones en el plano se remiten al cálculo de áreas y volúmenes, identificación de redes, descomposición de cuerpos, entre otros, donde se torna de vital importancia el disponer de una visualización espacial que permita desenvolverse en el uso de la perspectiva. Creemos que es necesario establecer un trabajo interdisciplinario con el Subsector de Artes Visuales, para que el estudiante desarrolle sus capacidades y habilidades en torno a trazar en el plano la realidad que le rodea, lo que implica que será más fluido el visualizar las representaciones bidimensionales de cuerpos geométricos.

En algunos niveles de enseñanza escolar, no se profundiza en el desarrollo de la visualización espacial en los estudiantes, sino que se propicia el cálculo, de áreas y/o volúmenes, mediante fórmulas. Por otro lado no se proponen actividades a fin de evaluar lo tridimensional en los estudiantes. La que se utiliza como recurso para la solución y comprensión de ejercicios de otros saberes matemáticos, por ejemplo, simetría de cuadriláteros.

Además, se distingue que no se establece una estructura continua y gradual para institucionalizar los saberes, se observa, por ejemplo, que el cálculo de áreas y volúmenes de figuras planas dista, sobremanera, del cálculo en cuerpos geométricos, o el contenido de transformaciones isométricas en el plano, de las que ocurren en el espacio. Por otra parte, no se propician la visualización de cuerpos geométricos desde distintas perspectivas, ya que en diferentes textos conllevan a la misma imagen del cuerpo, representándolos desde un mismo punto de vista (prototipo). Lo que interviene en que se aprenda o memorice sólo una representación para cada cuerpo.

De la aplicación de los problemas de tridimensionalidad, se detectó que gran parte de los estudiantes que participaron en la actividad, presentan dificultades en el trabajo y representación de lo tridimensional, en otras palabras, en acudir a ella para solucionar una situación problema. Uno de los factores que, creemos, influye directamente es que los estudiantes no son capaces o no les es inmediato desarraigarse de las preconcepciones heredadas del trabajo en dos dimensiones, como es el caso de la suma de los ángulos interiores de un triángulo.

De los resultados de ambas experiencias realizadas en el aula, en la enseñanza básica y media, dejaron en evidencia ciertas falencias respecto al recurrir a la tridimensionalidad como recurso para la solución de una situación problemática, ya que sólo surge ésta luego de agotar

todas las posibles soluciones en el plano, lo que, creemos, se debe a que durante la enseñanza escolar los problemas, ejemplos y trabajos se entrelazan con el contenido que está siendo institucionalizado.

Se puede evidenciar que el estudiantado presenta dificultades referentes a la manipulación de las representaciones en el plano de cuerpos geométricos tridimensionales, sobre todo al dibujarlas. Por otra parte los alumnos de enseñanza media tienden a algebratizarse, ya que, por ejemplo en el primer problema concluyen que éste no tiene solución ya que los ángulos interiores de un triángulo suman  $180^\circ$ , lo que deja al descubierto que los alumnos de enseñanza media no son capaces de recurrir a lo tridimensional, en otras palabras distanciarse de lo bidimensional, como solución a este problema.

Además, en el transcurso de las actividades, se distingue un gran predominio del registro algebraico e icónico, por sobre el registro gráfico, pero no se propicia una interacción entre éstos, ya que, para el cálculo de áreas y/o volúmenes se identifica el valor de los lados (registro icónico), para luego obtener un resultado mediante la aplicación de una fórmula (registro algebraico), tampoco se establece una función que explicita las variaciones de los lados de estos cuerpos (registro gráfico).

En consecuencia, es indispensable que los estudiantes desarrollen las habilidades y competencias para dibujar e interpretar las representaciones en el plano de los cuerpos tridimensionales y, de esta manera, obtener las herramientas necesarias para comprender, visualizar y manipular las representaciones icónicas y/o gráficas de la geometría espacial, con ello lo que implica el estudio de saberes matemáticos avanzados, como lo es el cálculo del volumen de sólidos de revolución mediante integrales definidas.

Es por ello que se hace indispensable incluir nuevas formas de enseñanza o apoyo para el aprendizaje del estudiante, que favorezca percibir las matemáticas, específicamente lo referente a lo geométrico, de forma dinámica y variable, apoyándose de algunos recursos tecnológicos, como las calculadoras gráficas o software matemáticos.

### Referencias y bibliografía

- Andrade, M. & Montecino, A (2009) La problemática de la tridimensionalidad y su representación en el plano. Antecedentes para una propuesta centrada en el aprendizaje reflexivo. Tesis de licenciatura no publicada
- Anido, M., López, R., & Rubio Scola, H. (2006). Las superficies en el aprendizaje de la geometría. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9(3), 335-360
- Brousseau, G. (1983). Los obstáculos epistemológicos y los problemas en matemáticas. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, DIE-Cinvestav.
- Brousseau, G. (1986). Les obstacles épistémologiques et les problèmes in mathématiques. *La problématique et l'enseignement des mathématiques*, Actas del XXVIII CIEAEM.
- Duval, R. (1999). *Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for Learning*. Proceedings of the 21<sup>st</sup> PME-NA Annual Meeting. Mexico, 1999.
- Getzels, J., Jackson, P. (1962), Creativity and Intelligence: Explorations with Gifted Students. *Educational and Psychological Measurement Online*. doi:ep m.sagepub.com/cgi/reprint/22/4/801.

González A. (2005) *“La generalización de la integral definida desde las perspectivas numérica, gráfica y simbólica utilizando entornos informáticos. Problemas de enseñanza y de aprendizaje”*. doi: [documat.unirioja.es/servlet/tesis?Codigo=1002](http://documat.unirioja.es/servlet/tesis?Codigo=1002).

Lowenfeld, V., Brittain-Lambert, W. (1980) *“Desarrollo de la capacidad creadora”*, Segunda Edición, Editorial Kapelusz, Buenos Aires.

Ministerio de Educación (2004) *Programas de Estudios de Educación Matemática, desde Primer Año Básico a Cuarto Año Medio*.

Piaget, J. (1991) *“Seis estudios de psicología”*, Editorial Labor, España.