



A compreensão do conceito de número fracionário: significado *medida*

Valéria Espíndola Lessa

Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Brasil

lessavaleria@yahoo.com.br

Resumo

O presente trabalho tem por objetivo desenvolver uma proposta de ensino com alunos do 6º ano de uma escola privada de Porto Alegre, a fim de verificar a compreensão do conceito de números fracionários através de seu significado “medida”. Para tanto, foi desenvolvida uma sequência didática com base nas etapas da Engenharia Didática, que constitui uma metodologia baseada em experiências de sala de aula. Para a avaliação das aprendizagens dos alunos, este trabalho apoiou-se na Teoria dos Campos Conceituais, que proporcionou o embasamento teórico a respeito da construção do conceito. Analisando os resultados, verificou-se ser possível, através de uma sequência didática envolvendo o significado “medida” dos números fracionários, proporcionar a compreensão do conceito de número fracionário.

Palavras-chave: matemática, números fracionários, conceito, medida, ensino, aprendizagem.

Temática

O trabalho na escola básica, principalmente com o Ensino Fundamental (EF), é ponto crucial para a sensibilização dos alunos para o raciocínio matemático, bem como para o apreço (ou a não resistência) à disciplina, muitas vezes entendida como o “bicho papão” da escola. Dessa forma, cabe ao professor buscar alternativas didáticas para uma educação matemática de qualidade, que propicie aos alunos bases para seu desenvolvimento intelectual.

Na busca por esta educação de qualidade, percebi, por exemplo, muita resistência de meus alunos, de Ensino Fundamental e Médio, com os cálculos que envolviam os números racionais na sua representação fracionária. Observei que grande parte deles preferia trabalhar com números decimais, com aproximações, do que efetuar os algoritmos das operações com os números fracionários. Assim, surge a hipótese de que o problema da dificuldade em lidar com estes números não está apenas nos algoritmos, mas na sua compreensão.

Com isso, comecei a busca por teorias que me ajudassem a pensar sobre a construção do conceito de número fracionário, para, então, propor uma nova estratégia didática para trabalhar este conteúdo. Para Lopes (2008), há muitos obstáculos à aprendizagem dos números fracionários, a começar pelo fato de que representam ideias diferentes. Ao conceito de número fracionário estão associados diversos significados, ou interpretações, que dependem do contexto no qual estão inseridos. Entre as classificações estabelecidas nas obras pesquisadas, assumirei neste trabalho cinco significados: “parte-todo”, “medida”, “operador”, “quociente” e “razão”.

Acredito que a aprendizagem do conceito de número fracionário se dá mediante o desenvolvimento de todas estas interpretações, de forma integrada, ao longo da vida escolar dos alunos. Dos cinco significados apresentados acima, escolho aquele que trata do “número fracionário como um número que também mede” como uma interessante “porta de entrada” para iniciar os alunos de 6º ano no estudo deste novo campo numérico. Isto porque ele pode possibilitar atividades que provoquem uma concreta necessidade de ter-se “novos números” para realizar medidas que não são mais exatas (os números inteiros não bastam). E, de forma natural, estes “novos números” podem ser colocados em correspondência com os pontos de uma reta, e nisso preparam os alunos para o entendimento de novos campos numéricos – os racionais e os reais.

Portanto, este trabalho¹, na sua parte de investigação experimental, terá como foco os números fracionários como números que correspondem a medidas e que podem ser colocados em correspondência com os pontos de uma reta. Sumarizo a pergunta de investigação da seguinte forma: **como proporcionar aos alunos a compreensão do conceito de número fracionário no 6º ano do Ensino Fundamental através de seu significado “medida”?**

Para responder esta pergunta, trago uma proposta de sequência didática com atividades que enfatizam o significado “medida” e dessa forma, o objetivo deste trabalho é verificar a compreensão do conceito de número fracionário na experimentação desta

¹ Este artigo é fruto de minha dissertação de Mestrado apresentada no dia 12 de janeiro de 2011 ao Programa de Pós-Graduação de Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, orientada pela Professora Dr^a Maria Alice Gravina.

proposta didática para a escola básica, de forma a qualificar o ensino-aprendizagem de matemática.

A fundamentação teórica

A fundamentação teórica está ancorada na classificação dos diferentes significados dos números fracionários e na Teoria dos Campos Conceituais (TCC) como se segue.

Os diferentes significados dos números fracionários

Dessa forma, pressuponho que a compreensão do número fracionário passa por situações de aprendizagem variadas, de forma que a pergunta “o que significa $\frac{2}{3}$ para você?” se desdobra em outras indagações, dependendo da situação em que é colocada: seriam dois pedaços de um bolo que está partido em três pedaços iguais? Seria dividir igualmente duas pizzas para três pessoas? Seria fazer um suco, onde, para cada duas medidas de suco concentrado, temos três medidas de água? Seria R\$ 6,00 de R\$ 9,00? Ou ainda, seria um número associado a um ponto da reta numérica?

Kieren (apud Rodrigues, 2009) foi a primeira pesquisadora a propor que a construção do conceito de número fracionário deve levar em consideração diferentes interpretações e significados. Os quatro “subconstructos” propostos por essa autora são: quociente, operador, medida e razão, na qual o parte-todo Kieren considera como estando presente nas situações de quociente, operador e medida, e, por vezes, na situação que corresponde à razão.

A partir do diagrama apresentado na figura 1, faço uma breve discussão sobre os diferentes significados que podem ser atribuídos ao número fracionário $\frac{a}{b}$ (sendo a e b números inteiros positivos).



Figura 1 – Classificação dos diferentes significados segundo Kieren.

Significado “Parte-todo”.

O significado “parte-todo” é o mais trabalhado na escola e o que mais se encontra nos livros didáticos. Este significado está associado à ideia de partição/divisão de um todo, ou um inteiro, em partes iguais e toma um número determinado destas partes. Também é possível fazer a contagem dupla das partes: o denominador é o número de partes que o “todo” foi dividido e o numerador é o número de partes consideradas.

Vejamos um exemplo deste significado: *Pedro cortou uma pizza em quatro fatias e comeu três. Que fração da pizza representa o que Pedro comeu?*

Significado “Medida”.

Nesta interpretação, o número fracionário na forma $\frac{a}{b}$, com a e b inteiros positivos e b não-nulo, é associado a ponto sobre a reta numérica e o seu caráter quantificador indica a medida do segmento com extremidades neste ponto e naquele que é identificado com o número zero (a origem da reta).

Este significado possibilita um processo de ensino-aprendizagem contextualizado em que a existência dos números fracionários se apresenta de forma muito natural. Segundo Crump (apud Backendorf, 2010), a necessidade de medir comprimento de segmentos (uma quantidade contínua) é um incentivo para o desenvolvimento dos números fracionários – a medida pode ser considerada um meio pelo qual duas grandezas de mesma espécie podem ser comparadas em termos numéricos.

Ao se medir o comprimento de determinado objeto utilizando uma unidade de medida específica – por exemplo, um pedaço de cordão –, pode-se encontrar uma relação com a unidade que não corresponde a número inteiro, fazendo-se necessário subdividir o cordão em partes iguais para, então, identificar o número conveniente de partes que são necessárias para ajustar a medida procurada.

A introdução da reta numérica com os números racionais não-negativos, conforme já mencionado, pode ajudar na (futura) compreensão a respeito dos números irracionais, e, conseqüentemente, da reta real, no sentido de superar uma primeira idéia intuitiva (equivocada) de que, uma vez escolhida livremente uma unidade de comprimento, a medida do comprimento de qualquer segmento de reta poderia ser expressa como um múltiplo fracionário adequado da medida da unidade de comprimento adotada. A seguir um exemplo de atividade:

1) Quanto mede o comprimento do cano?

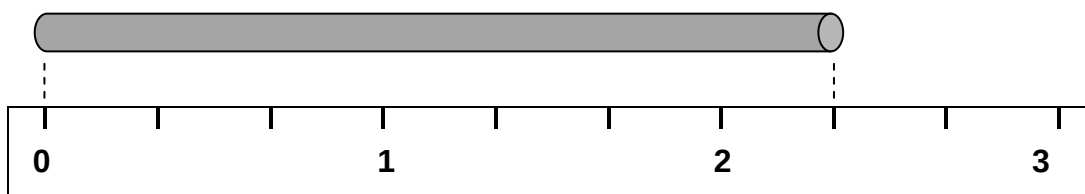


Figura 2 – Ilustração do exemplo 1 do significado “medida”

Significado “Operador Multiplicativo”.

O significado de número fracionário como operador multiplicativo é bastante trabalhado na escola, principalmente através de problemas matemáticos no 6º ano do EF. Geralmente, nos capítulos de livros didáticos, é chamado de “fração de uma quantidade” ou “fração de um número”. Este significado tem a função de transformação do número, no sentido de “algo que atua sobre uma situação e a modifica” (Llinares & Garcia, 1988).

O operador pode ser comparado à ação de uma “máquina”, que, no contexto discreto, divide e multiplica os números de entrada para obter os números de saída; e, no contexto contínuo, reduz ou amplia a quantidade inicial. Os exemplos a seguir tratam de tornar mais claro este significado do número fracionário.

Numa classe de 36 alunos, $\frac{3}{4}$ dos alunos são meninas. Quantas meninas há na classe?

Entrada	Operador	Saída
36 alunos	Dividir por 4, multiplicar por 3	27 alunos

Figura 3 – Representação da solução do problemas com o significado “operador”

Significado “Quociente”.

Outro significado associado ao número fracionário é o de quociente. Neste caso, o número fracionário a/b (também indicado por $a : b$) representa o número c tal que $a = c \cdot b$. Esta idéia não é simples para os alunos, pois, neste novo significado, a barra da notação $\frac{3}{4}$ assume a função de “dividir 3 por 4”, que é muito diferente do significado de “dividir o todo em 4 partes e tomar 3”. Exemplo:

Três barras de chocolate são divididas para 4 crianças, quanto cada uma receberia? (Merlini, 2005, p.77)

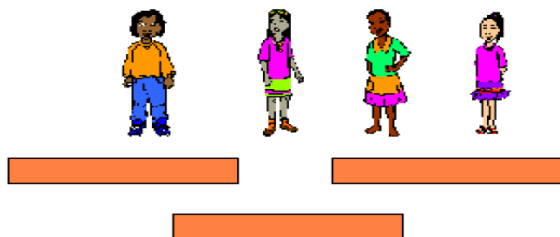


Figura 4 – Representação da solução do problema com o significado “quociente”

Significado “Razão”.

Em certas situações, as frações são usadas como um índice comparativo entre duas grandezas de mesma natureza ou de naturezas diferentes, não existindo uma relação com uma unidade ou um todo, necessariamente. A comparação entre duas grandezas “a” e “b” pode ser representada por “ $a : b$ ”, “ $\frac{a}{b}$ ”, na qual se faz a leitura: “a” está para “b”.

Exemplo: Na escola de Pedro foi feita uma rifa e foram impressos 150 bilhetes. A mãe de Pedro comprou 20 bilhetes dessa rifa. Qual a chance da mãe de Pedro ganhar o prêmio? (Merlini, 2005, p.118)

A Teoria dos Campos Conceituais

Para entender como se dá o processo de construção do conceito de número fracionário, a Teoria dos Campos Conceituais (TCC) se apresenta como um interessante referencial. Apresento uma síntese dos principais elementos desta teoria a fim de proporcionar ao leitor um entendimento a respeito do meu “olhar” quando analiso as ações dos alunos frente às situações que foram propostas na sequência didática implementada como parte de minha pesquisa.

Neste processo de aprendizagem em que o conhecimento é interpretado como um “campo conceitual”, a rede de conceitos que constituem este campo é grande. Quanto ao conhecimento relativo a número fracionário, considero que este se constitui em um campo conceitual que se insere como um dos componentes de um campo maior – o campo conceitual das estruturas multiplicativas, já bem discutido por Vergnaud. Dessa forma, inserimos o conhecimento “números fracionários” como um dos nós com muitas conexões dentro da grande rede de conexões que se constitui no “campo conceitual multiplicativo”. A figura 5 traz uma representação sobre como estou vendo estas conexões da rede.

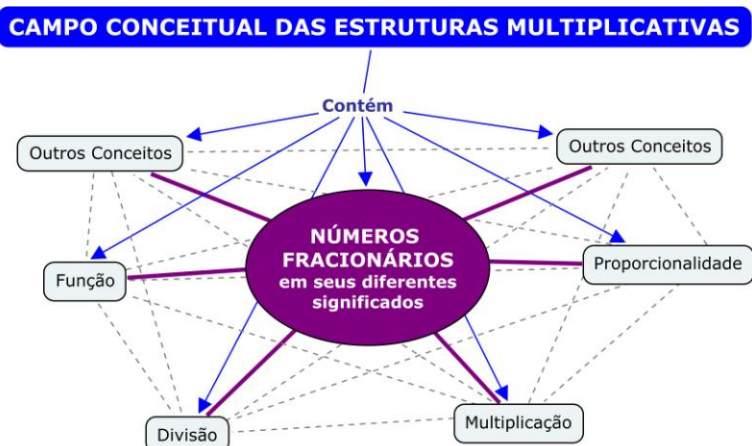


Figura 5 – Representação do Campo Conceitual dos Números Fracionários.

Cabe ressaltar que estes conceitos colocados na figura (função, proporcionalidade, multiplicação e divisão) não são exclusivos de um único campo conceitual, portanto muitas outras ligações podem ser estabelecidas com outros Campos Conceituais. Segundo Vergnaud (2003, p.30), “[...] campo conceitual é um conjunto vasto, porém organizado, a partir de um conjunto de situações”. Ou seja, é um conjunto de problemas, situações, conceitos, relações, estruturas, conteúdos e operações de pensamento conectados uns aos outros.

Estabelecido que um campo conceitual é uma rede de conceitos em conexão, avanço com o entendimento que deve ser atribuído à palavra “conceito” na TCC. Segundo Vergnaud (1996), um conceito é formado por uma tripla $C=(S, I, R)$, na qual:

S: conjunto das situações que dão sentido ao conceito (a referência);

I: conjunto das invariantes nas quais assenta a operacionalidade dos esquemas (o significado);

R: conjunto das formas pertencentes e não pertencentes à linguagem que permitem representar simbolicamente o conceito, as suas propriedades, as situações e os procedimentos de tratamento (o significante).

Figura 6 – Elementos da TCC extraído de Vergnaud (1996, p.166)

A partir desta definição de conceito, dada por Vergnaud, apresento um diagrama na figura 7 que ilustra como o conceito de “número fracionário” pode ser entendido à luz da TCC:



Figura 7 – Conceito de número fracionário associado à TCC.

Dessa forma, entendo que um conjunto de situações e de problemas, teóricos ou práticos, envolvendo os diferentes significados do número fracionário – parte-todo; quociente; medida; operador; e razão –, se forem propostos aos alunos, contribuem para que este conceito adquira sentido para o aluno.

Dadas as situações, os alunos utilizarão suas competências para resolvê-las. Nesta busca por estratégias de resolução, os alunos evocam conhecimentos anteriormente formados, fazendo uma “organização da sua conduta”. À forma de agir perante as situações e às escolhas dos conhecimentos usados, Vergnaud define como “esquema”. Assim, dentro destes “esquemas” podemos identificar os conhecimentos em ação dos alunos frente às situações. Estes conhecimentos Vergnaud (2009) define como conceitos em ação “um conceito considerado pertinente” e teoremas em ação “uma proposição tida como verdadeira na ação em situação” (p.23).

Em geral, os alunos apresentam dificuldades para expressar os conhecimentos (conceitos e teoremas em ação) utilizados na resolução de um problema e, com isso, a maioria destes conceitos e teoremas permanece implícita. Estando implícitos, estes conhecimentos não são cientificamente aceitos, ou seja, se o aluno não consegue representar na linguagem matemática correta seus conceitos e teoremas, não é possível identificar sua aprendizagem. Para torná-los explícitos, entra em cena o papel do ensino: ajudar o aluno a explicitar, em forma de linguagem e símbolos, seus conhecimentos que estão inicialmente implícitos (Moreira, 2002).

A identificação dos invariantes é obtida através das representações, mas não só através delas. As representações simbólicas podem ajudar na resolução de problemas quando há dados numerosos e a resposta exige várias etapas; e também ajudam para

identificar com mais clareza os objetos matemáticos que são decisivos para a conceitualização. Se o aluno não conhece os termos e linguagem específicos da matemática, reconhecidos socialmente como corretos, para a conceitualização, seus progressos na construção de conhecimento podem ficar comprometidos. Isto porque ele irá criar sua própria representação, repleta de significado e que, não estando “corretamente” escrita, pode ser fonte de dificuldades na comunicação.

Assim, a atenção do professor pesquisador deve estar sobre as representações e sobre as ações. Segundo Vergnaud (2009), “sem a linguagem e os simbolismos desenvolvidos pela cultura, seria impossível identificar estas construções conceituais” (p.29).

Finalizo esta parte me colocando na mesma posição de Muniz (2009) quando ele fala que a Teoria dos Campos Conceituais vem contribuir “para a construção de um novo olhar do professor para as produções matemáticas dos alunos” (p.38). Conforme já mencionado, é com este novo olhar que me coloco na posição de observadora do processo de construção do significado de número fracionário, quando tomado como um número que expressa uma medida e que pode ser naturalmente associado a pontos de uma reta.

O método

Para organizar a pesquisa, utilizou-se a metodologia da Engenharia Didática (Artigue, 1996) por ser baseada em experiências de sala de aula. Esta metodologia sugere quatro etapas de trabalho que buscam facilitar a prática de investigação na sala de aula. Na primeira etapa, temos as análises prévias, onde foram investigados e discutidos os objetos de estudo e as teorias que embasam a pesquisa, numa espécie de revisão bibliográfica a cerca do tema. Com isso, surgiu a discussão dos diferentes significados dos números fracionários e da TCC.

A segunda etapa consiste na elaboração das análises *a priori* das experiências que serão propostas na sala de aula. Este foi o momento de criação da sequência didática com base na teoria já estudada, na qual estabeleci as expectativas para a parte empírica do trabalho.

Na terceira etapa, temos a experimentação da sequência didática, e, na quarta e última etapa, temos a análise *posteriori* e validação da proposta didática projetada. Estas duas etapas não são dissociadas, pois ao mesmo tempo em que se realiza a experimentação, conclusões e observações estão sendo realizadas conjuntamente pelo pesquisador.

Assim, as atividades foram elaboradas, experimentadas e analisadas tomando como base a TCC. A Engenharia Didática se constituiu na “forma” como o trabalho se organizou e a TCC foi o “olhar” com que me debrucei sobre as análises.

Os dados da análise *a posteriori* foram obtidos através de vídeos e áudios contendo as ações e falas dos alunos e dos materiais escritos e produzidos por eles frente às atividades propostas. Com isso, pude perceber os conceitos e teoremas em ação manifestados pelos alunos e dessa forma avaliar sua aprendizagem do conceito de número fracionário.

Experimentação, análise e resultados

A sequência didática foi realizada numa turma de 6º ano de uma escola particular da cidade de Porto Alegre, com 22 alunos. A experimentação se deu durante um mês, do dia 8 de junho até o dia 8 de julho de 2010, com o total de 20 horas/aula de 50 minutos cada. As aulas foram organizadas em 9 módulos compostos por atividades diversas, tratando de três diferentes significados para números fracionários: “medida”, “parte-todo” e “operador”.

Entretanto, considero que o trabalho com o significado “medida” (dos módulos 1, 2, 3, 4 e 9)² constitui uma proposta inovadora para o 6º ano, pois proporciona situações que levam a uma natural necessidade do uso de número fracionário, bem como desenvolvimento de outros conceitos relacionados e previstos no currículo. Sendo assim, fiz uma escolha de pesquisa: fazer análise minuciosa da produção dos alunos nas atividades que envolvem o significado “medida”.

Conforme as etapas da Engenharia Didática, para cada encontro, apresento a implementação realizada, acompanhada de análises *a priori* e *a posteriori* e, por fim, trato da validação das expectativas enunciadas. Na análise *a posteriori*, procurei identificar, nas estratégias utilizadas pelos alunos, os invariantes operatórios, com base na Teoria dos Campos Conceituais, e, na medida do possível, também tratei de descrevê-los em forma de conceitos e teoremas em ação contidos na resolução das atividades e nas formas de representações das resoluções. Em cada encontro foram propostas atividades, e, nestas atividades, estavam contidas as diferentes situações que proporcionaram ao aluno dar, ou não, significado ao conceito de número fracionário.

Assim, neste artigo faço um breve relato da experimentação e dos resultados do trabalho com o significado “medida” dos números fracionários. Os conceitos e teoremas em ação encontrados na pesquisa não foram todos contemplados neste artigo.

No módulo 1 foi proposto que os alunos realizassem medições de objeto na sala de aula com uma unidade de medida convencionada na forma de uma tira de papel. Nas medições dos alunos pude identificar os conhecimentos que eles utilizavam através de suas estratégias e assim descrevê-los em forma de conceitos e teoremas em ação. Todos os alunos mostraram entendimento quanto a medição realizada, logo apresentaram o seguinte conceito em ação: *medir é saber quantas vezes a unidade-tira cabe no objeto*. A ideia de número fracionário surge quando a unidade tira não cabe um número inteiro de vezes no comprimento do objeto medido, assim teoremas em ação puderam ser identificados nas formas de medições.

No módulo 2 foi proposto a construção de um instrumento de medida, uma régua, que facilitasse as medições de objetos com medidas fracionárias. Durante a construção muitos conceitos e teoremas em ação foram manifestados pelos alunos, entre eles destaco o conceito de equivalência na qual pode ser observado na construção de um aluno conforme a figura 8:

² Os demais módulos 5, 6, 7 e 8 não fizeram parte das análises da pesquisa e portanto não serão considerados neste artigo.

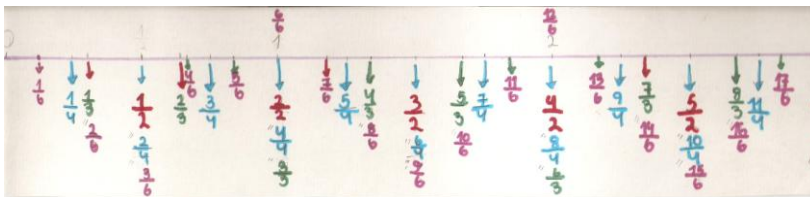


Figura 8 – Construção de régua com números fracionários por um aluno

No módulo 3 e 4 os alunos receberam listas de atividades na qual pretendeu-se realizar uma sistematização do que foi realizado, com uma exigência maior de abstração (no sentido oposto à atividade prática com objetos manipuláveis). Nesta atividade pude perceber algumas dificuldades que considero inerentes ao processo de aprendizagem, e dessa forma estas dificuldades puderam ser descritas em forma de teoremas em ação equivocados, para posteriormente serem reformulados.

O uso da régua numerada nos primeiros encontros suscitava a oportunidade de trabalhar com adições e subtrações de frações em situações de medição. No momento que números fracionários assumem o significado de “medida”, estas podem ser envolvidas em questões contextualizadas do tipo: se comprei $\frac{1}{2}$ metro de fita azul e $\frac{3}{4}$ metros de fita laranja, quantos metros de fita eu comprei ao todo?

Dessa forma, o contexto da régua possibilitou elaborarmos uma atividade que explore a medição de objetos com tamanhos fracionários, a comparação e a adição destas medidas com a necessidade de usar as equivalências, que se constitui o Módulo 9 do trabalho. Assim, entre os teoremas em ação descritos neste módulo, destaco o seguinte: *se as frações têm denominadores diferentes, então é preciso transformar estas frações em outras equivalentes e que tenham o mesmo denominador.*

Como resultados, tem-se que esta sequência didática, com os módulos 1, 2, 3, 4 e 9 possibilitou que os alunos colocassem em ação seus conceitos matemáticos através de teoremas usados durante a realização de tarefas. Foram 17 teoremas e 3 conceitos em ação descritos nas análises *a posteriori* que elucidaram os entendimentos e as dificuldades que os alunos tiveram sobre os números fracionários. Sendo que em 12 destes teoremas, os alunos apresentaram uma leitura correta da situação matemática, assim evidenciando suas aprendizagens. Nestas aprendizagens, observa-se, por exemplo, os conceitos de proporcionalidade, de equivalência, de função (associar ponto a número e número a ponto), de medição, de multiplicação e de adição, não se esgotando por aqui.

É importante esclarecer que muitos outros conceitos e teoremas em ação talvez ainda pudessem ser descritos neste trabalho, se o tempo de realização das atividades e de análise dos resultados fosse mais longo.

Conclusões

Ao longo deste trabalho de pesquisa que trata de uma proposta didática inovadora sobre números fracionários para o 6º ano do EF, objetivando qualificar o ensino de matemática, verificou-se que a compreensão do conceito de número fracionário através do seu significado de “medida” é possível através das atividades que foram propostas na sequência didática.

O significado “medida” proporcionou um trabalho que julgo não convencional. Neste trabalho as frações deixaram de representar partes de um todo e passaram a significar uma medida de segmento na reta numérica. Esta idéia de medida se aproximou do que considero ser importante para a compreensão dos números racionais, que é a noção de que diferentes frações equivalentes exprimem a mesma quantidade, e, portanto, o mesmo número fracionário.

Para perceber as aprendizagens dos alunos, nas atividades de número fracionário como “medida”, a Teoria dos Campos Conceituais se constituiu um aporte teórico relevante e serviu para embasar esta pesquisa. A partir desta teoria, pude fazer uma leitura dos conhecimentos que os alunos manifestaram durante a realização das tarefas, nas suas falas e atitudes, bem como nos registros escritos.

Considero a Teoria dos Campos Conceituais uma excelente teoria para todo profissional da educação, porém ela é complexa. Foi, na prática de sala de aula, que consegui compreender com maior clareza o que Vergnaud propõe. Assim, depois de muitas idas e vindas nas leituras e de muitas análises da prática, meu olhar para as ações dos alunos passou a perceber os invariantes teorizados por Vergnaud e, desta forma, pude identificá-los como conhecimentos matemáticos válidos ou conhecimentos que precisavam ser reelaborados de modo a se constituírem válidos.

Hoje consigo ter outra visão sobre as dificuldades de meus alunos. Busco perceber os conceitos que eles utilizam e de que forma os utilizam, para, então, auxiliá-los numa possível reformulação de seus teoremas em ação.

Considero que há duas as limitações neste estudo : a primeira está no fato de não ter existido um diálogo mais individualizado com os alunos, a fim de escutar com mais atenção suas palavras e interpretar melhor seus gestos, e assim aprimorar a identificação de outros teoremas em ação, conforme a TCC; e a segunda se refere a falta de discussão a respeito de minha intervenção quanto professora para suprir as dificuldades dos alunos, revelando o que foi realizado em sala de aula para que as dificuldades fossem sanadas.

Por fim, devido à importância do tema deste trabalho no ensino de matemática na escola básica, novas pesquisas podem ser realizadas de modo a qualificar o ensino de números fracionários. Dentre elas, deixo registrada a possibilidade de identificação de outros teoremas em ação, que podem ser manifestados no trabalho com todos os diferentes significados dos números fracionários. Estas pesquisas se tornam importantes a fim de auxiliar numa possível reformulação das abordagens didática em sala de aula no que se refere aos “números fracionários” no 6º ano do EF.

Referências

- Artigue, M. (1996). Engenharia Didáctica. In J. Brun (org). *Didáctica das Matemáticas*. (pp.193-217). Lisboa: Instituto Piaget.
- Backendorf, V. R (2010). *Uma Sequência Didática de Medidas de Comprimento e Superfície no 5º ano do Ensino Fundamental: Um estudo de caso*. Dissertação de Mestrado, Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.
- Llinares, S. & Garcia, M. V. S. (1988). *Fracciones*. Madrid: Editorial Sintesis.
- Lopes, A. J. (2008). O que nossos alunos podem estar deixando de aprender sobre frações, quando tentamos lhes ensinar frações. *Bolema*. 21(31),1-22.
- Merlini, V.L. (2005). *O conceito de fração em seus diferentes significados: um estudo diagnóstico com alunos de 5ª e 6ª séries do ensino fundamental*. Dissertação de Mestrado, Instituto de Matemática, Pontifícia Universidade Católica, São Paulo.
- Moreira, A. M. (2002) A Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud: o Ensino de ciências e a pesquisa na área. *Investigação em Ensino de Ciências*, 7(1). 7-29.
- Muniz, C. (2009). O Conceito de “esquema” para um novo olhar para a produção matemática na escola: as contribuições da Teoria dos Campos Conceituais. In M. Bittar & C. Muniz. *A aprendizagem matemática na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais*.(2 ed). (pp.37-52) Curitiba: Editora CRV.
- Rodrigues, M. A. S.(2009). *Explorando Números Reais através de uma representação Visual e Sonora: Um estudo das interações dos alunos do Ensino Médio com a ferramenta MusiCALcolorida*. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo.
- Vergnaud, G.(1996). A Teoria dos Campos Conceituais. In J. Brun (org). *Didáctica das matemáticas*. (pp.155-91). Lisboa: Instituto Piaget
- Vergnaud, G. (2003). A Gênese dos Campos Conceituais. In: E .P. Grossi (org.) *Por que ainda há quem não aprende? a Teoria*. (pp.21-60). Petrópolis: Editora Vozes.
- Vergnaud, G. (2009). O que é aprender. In M. Bittar & C. Muniz. *A aprendizagem matemática na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais*.(2 ed). Curitiba: Editora CRV.