



## **Integración numérica en las verduras y territorios.**

Ma. del Carmen **Barrios** Cuevas.  
CBTis 118 y Escuela Normal del Estado de Querétaro.  
México.  
barrioscuevas@hotmail.com  
Hilda Yolanda **Guillén** Lara  
CETis 105 de la DGETI  
México  
hyguillen@msn.com  
Manuel **Zapata** Barrios.  
Universidad Autónoma de Querétaro.  
México.  
mecaix@hotmail.com

### **Resumen**

La presente ponencia se inscribe en el tema 13 cálculo diferencial e integral en la educación matemática, bajo la modalidad de taller para en el nivel de bachillerato que contempla alumnos de 15 a 18 años, incluye dos prácticas para trabajar los métodos de integración numérica de Rieman, trapecio y Simpson aplicados en el cálculo de área y volumen. La estrategia de enseñanza se ajusta a la secuencia de actividades planteadas por Ricardo Cantoral. Los resultados son: mayor interés del alumno hacia el contenido matemático por el rápido acercamiento a las aplicaciones, el aprender a convivir con los demás mediante el trabajo colaborativo y desarrollar la habilidad de comunicación matemática.

*Palabras clave:* educación, matemática, cálculo integral, integración numérica.

### **Contenido**

La siguiente ponencia se inscribe en el rubro de taller:

#### **Introducción**

En la última década del milenio pasado así como en la primera década del presente siglo se ha dado un acelerado avance científico, tecnológico y de comunicaciones. La época actual ha sido llamada la sociedad del conocimiento o sociedad de la información, desde lo planteado por Deuetta (Deuetta, 2002) su característica principal es ser comunicacional que se encuentra en

todas las actividades donde interviene el hombre como pueden ser la industria, la ecología, la salud, el servicio, el entretenimiento, la medicina, los servicios, el comercio y la educación. La información es el valor máspreciado, por lo cual el estudiante y futuro ciudadano por su mayoría de edad, ha de desarrollar habilidades en la búsqueda, selección, representación e interpretación de la información.

El sistema educativo mexicano ha implantado en los últimos años reformas en los niveles superior y básico, a éste último pertenecen preprimaria, primaria, secundaria y bachillerato, es en el bachillerato donde se inscribe la presente experiencia educativa.

### **Propósito**

El presente taller tiene la finalidad de documentar una experiencia docente que permita compartir en la XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática en Recife Brasil y mediante la modalidad de taller, dos prácticas para el aprendizaje del método de integración numérica por estudiantes de 16 a 18 años, como aplicaciones prácticas de la integral definida.

### **Antecedentes**

La reforma del bachillerato (SEP-DGETI, 2004), se inició en 2004 desde el bachillerato tecnológico y se ajustó en 2009 al implantarla a la mayoría de los subsistemas lo cual dio origen al sistema nacional de bachillerato.

El plan de estudios contempla seis cursos en la línea matemática, de primero a sexto semestre el contenido respectivo es álgebra, geometría y trigonometría, geometría analítica, cálculo diferencial, estadística y probabilidad, matemáticas aplicadas con cálculo integral.

El contenido que contempla el curso de sexto semestre es integral indefinida e integral definida, en el primero se incluye la diferencial, integrales inmediatas y métodos de integración: por partes, por sustitución trigonométrica y por fracciones racionales; en el segundo se incluye métodos de integración numérica, áreas y volumen.

### **Justificación**

La última etapa del bachiller es sexto semestre en él se imparte la materia de matemáticas aplicada con especial atención al cálculo integral el cual incluye el tema de métodos de integración numérica y entre otras, las aplicaciones de área y volumen. El presente taller documenta una experiencia educativa y consta de dos actividades que contempla el conocimiento, uso y aplicación de los métodos de integración numérica de Riemann, trapecio y Simpson mediante dos situaciones concretas de práctica que permiten al estudiante el cálculo de área en “El territorio” y cálculo de volumen en “Las verduras”. El taller es pertinente ya que aborda una parte del contenido matemático propuesto en el programa de estudio e incluye dos aplicaciones del mismo. Es de interés para profesores de nivel medio superior o superior, es decir puede aplicarse con sus adecuaciones a estudiantes de 16 a 18 años o a estudiantes 19 a más años en su primer semestre de estudios superiores; también puede interesarle a estudiantes en las edades mencionadas.

### **Metodología**

En el plan de estudios el enfoque propone como estrategia metodológica la enseñanza centrada en el aprendizaje del alumno, recomienda el aprendizaje por proyectos y aprendizaje por resolución de problemas entre otros. En éste escrito se trabajará el aprendizaje mediante la resolución de problemas.

Atendiendo a la propuesta de la reforma, la actividad estará integrada por tres partes: un

inicio que corresponde a la apertura cuya intención es sensibilizar al alumno sobre el contenido así como las condiciones adecuadas de trabajo; un desarrollo que corresponde al cuerpo de la actividad que estará integrada por cuatro partes; un final que corresponde al cierre de la actividad el cual permite la reflexión sobre lo aprendido así como las mejoras de la estrategia. El desarrollo de la actividad se ajusta a lo propuesto por Ricardo Cantorial (Cantoral, 2000:43) en ella se contemplan cuatro secuencias de actividades las cuales se presentan a continuación.

### **Secuencia de actividades**

La secuencia de actividades está integrada por:

- Secuencia de acción.
- Secuencia de socialización.
- Secuencia de justificación.
- Secuencia de formalización.

La primera secuencia es de *acción* donde el alumno interactúa con el medio en forma intelectual o física dependiendo del objeto de estudio, en éste caso es integración numérica y la componen dos partes a) con orientación docente realizará *búsqueda de información* sobre: integral, integral definida, integral indefinida, métodos de integración numérica de Riemann, trapecio y Simpson empezará con definición, notación, gráfica, teoremas, fórmulas y errores, ajustándose al formato APA, lograr tres fuentes diferentes de información; el alumno tendrá un primer acercamiento al objeto de estudio se pretende se familiarice con conceptos, notación, representación gráfica y fórmulas, entienda algunos o tenga la capacidad de plantear las dudas pertinentes en el momento de la revisión del tema por el grupo; b) conoce dos *situaciones problema* una sobre los territorios como “El Charco” planteada en el libro de Cálculo integral para ingeniería (Santiago, Prado, Gómez, Quezada, Zúñiga, Pulido, Barajas & Olmos, 2008:222) y otra sobre las verduras, la intención es motivarlo sobre la aplicación de integrales por métodos aproximados en forma práctica y real. La función docente es orientar el inicio del tema y lograr la sensibilización de los estudiantes.

La segunda secuencia es de *socialización* en ella el estudiante interactúa con sus compañeros la intención es la comunicación matemática de los alumnos respecto a la información que tienen sobre integración numérica, la forman dos partes a) contestan en cuarteto el *cuestionario* sobre integración numérica la intención es poner en común los elementos para resolver en forma aproximada integrales definidas, b) deducen la *fórmula* de integración numérica por Riemann la intención es que conozcan de donde sale la fórmula además de identificar los elementos que la componen ya que se generalizará para el método del trapecio y Simpson, c) se *ejercitan* en la solución de integrales definidas por integración numérica usando los tres métodos se pretende con ello la familiarización y uso de los métodos variando las particiones, los intervalos y las funciones, d) *analizar* la estrategia de los cuatro pasos para resolver integrales; la intención es que adquieran orden, limpieza y una estrategia para lograr “ver” los elementos conocidos y desconocidos en la problemática planteada así como la relación que guardan éstos para poder identificar, deducir o construir el modelo matemático, sus parámetros que se ajusten a la realidad y poder aplicarle el método de integración numérica, e) resolver las dos *aplicaciones* que requieren de integración numérica “El territorio” y “La verdura”. La función docente es brindar ayuda pedagógica y elegir a los dos equipos que participarán en la plenaria.

La tercera secuencia es de *justificación* en ésta parte se elegirá a dos equipos y de ellos al estudiante representante uno expondrá en plenaria el problema del territorio y otro el de la verdura, se pretende poner en plenaria la resolución de los problemas; la integran dos partes a) *exposición* argumentada de cada uno de los dos alumnos, b) una *participación* argumentada a favor y otra en contra por cada uno de los demás equipos. La función docente es orientar la exposición para que lleve un orden la comunicación matemática; mediar las participaciones donde sean cuestionadas las ideas con argumentación válida y no las personas.

La cuarta secuencia es de institucionalización en ésta última etapa del desarrollo del tema el docente establecerá la convenciones sociales, para lo cual realizará la *recapitulación* del tema recuperando lo ocurrido en la etapa de acción, socialización y justificación en cada una de sus partes ya sea que haya sido dada por algún alumno, una pareja un equipo, la intención es reafirmar, ejemplificar, reforzar o encauzar la aplicación del método de integración numérica ajustándose al desarrollo de la competencia de comunicación matemática

### Plan de trabajo en el taller

En la siguiente tabla se presentan en forma general los elementos que se desarrollarán en el taller de acuerdo al tiempo, la actividad, el propósito y los recursos.

Tiempo	Actividad	Propósito	Recursos
3 min.	Presentación	Conocer lugar, nivel y tema	Cañón y lap
7 min.	Metodología	Informar sobre la forma de trabajo	6mesas, 5sillas
15 min.	Búsqueda de información: integral, integral definida e indefinida, métodos numéricos, aplicaciones.	Conocer la información que se manejará para plantear dudas o aportar ideas para su comprensión	Teoría de los temas. Cuestionario. Formulario. Gráficas.
30 min.	Situación problema: el territorio	Evidenciar la acción y socialización etapas en las situaciones didácticas	Rotafolio, marcadores, regla.
30 min.	Situación problema: la verdura		
15 min.	Exposición de los problemas	Evidenciar la justificación	Cinta para pegar.
15 min.	Recapitulación del MIN, área y volumen.	Evidenciar la formalización	Todos los materiales
5 min.	Evaluación y despedida	Reunir elementos para la mejora de la estrategia	Reflexión del material trabajado

### Forma de trabajo.

**Individual** en ésta el estudiante tendrá un primer acercamiento al objeto de estudio mediante la búsqueda formal de información, se dará prioridad al uso de las tic's. Se pide al estudiante estar atento y reflexionar sobre cada una de las actividades de la secuencia.

**Trabajo en pareja** en ésta forma de trabajo se integran dos alumnos bajo el criterio que exprese el profesor, la actividad que realizarán es contestar el cuestionario, basándose en la información buscada previamente sobre el tema, ello les permitirá la socialización donde compararán que la información aún estando correcta puede estar escrita en formas diferentes de acuerdo al autor o compartirán la información en caso de no traerla completa.

**Trabajo colaborativo** se integrarán dos parejas bajo el criterio asignado por el profesor, primero elegirán al representante del equipo, posteriormente resolverán en forma colaborativa las

dos situaciones problema, se ajustarán para ello a los elementos expresados por la profesora, elaborarán el rotafolio de apoyo a la exposición y se encontrarán atentos para apoyar al estudiante que expondrá el trabajo.

### **Tiempo dedicado**

El desarrollo del tema con la presente metodología se desarrolla en un dos semanas cuando se tienen cinco horas clase a la semana.

### **Contenido actitudinal.**

Con la estrategia aquí mostrada se pretende que el alumno pierda el desagrado, miedo y rechazo hacia la matemática; y logre tener diversos acercamientos en una forma más amable que le permite darse la oportunidad de querer Saber sobre ella. Se potenciará la buena disposición para el trabajo en equipo, el respeto a los compañeros, la responsabilidad sobre el trabajo en clase y extraclase ya sea en forma individual o colaborativa. Se potenciará el trabajo colaborativo y la socialización del aprendizaje entre sus compañeros.

### **Conclusiones**

El acercamiento no agresivo de los contenidos matemáticos permitirá al alumno estar en condiciones adecuadas para el aprendizaje. La sistematización de las actividades de aprendizaje dará la oportunidad de que el estudiante se involucre en su aprendizaje del contenido matemático. La secuencia de actividades presenta cuatro momentos donde el alumno tiene diversos acercamientos al objeto de estudio siendo el constructor de su conocimiento y contando con sus iguales y el experto. El método de integración numérica permite al estudiante resolver integrales definidas desde los primeros días de clase evitando dejar ésta actividad al final y que se vea en peligro de no ser abordada por la falta de tiempo. El contacto con las aplicaciones desde la etapa inicial del curso permitirá a estudiante tener una visión más clara sobre las aplicaciones del cálculo integral. El trabajo colaborativo permitirá al estudiante potenciar su comunicación matemática. La socialización entre pares logrará el desarrollo de habilidades positivas para una sana convivencia con los demás. Las actitudes positivas provocarán un mejor resultado en el aprendizaje del estudiante.

### **Referencias y bibliografía**

- Cantoral, R. (2000). *Desarrollo del pensamiento matemático*. Trillas. México.
- Deuetta, D. C. (2002). Sociedad de la información y el conocimiento. Entre el optimismo y la desesperanza. *Revista mexicana de ciencias políticas y sociales*, 198. Año XLV. núm. 185, mayo-agosto.
- Santiago Acosta, R. D., Prado Pérez C. D, Gómez Muñoz, J. L., Quezada Batalla M. L., Zúñiga Silva, L., Pulido Cejudo, J., Barajas de la Torre, L. & Olmos Lózez, O. (2008). Integración numérica. En *Cálculo integral para ingeniería*. 222-247.
- Sep-Dgeti. (2004). *Reforma curricular del bachillerato tecnológico*. Recuperado el 24-IX-2008. [www.dgeti.sep.gob.mx](http://www.dgeti.sep.gob.mx): <http://www.dgeti.sep.gob.mx/site/lanzador.phtml?idcont=408>

## **Apéndice A**

### **Información general**

Título del taller: integración numérica en las verduras y territorios.

Nombre de Autores: Ma del Carmen Barrios Cuevas, Hilda Yolanda Guillén Lara y Manuel Zapata Barrios

Instituciones de los autores: CBTis 118, ENEQ, CETis 105 y UAQ

País o países de los autores: México

Número de horas más conveniente (2 horas máximo): se tienen contemplado solo dos horas.

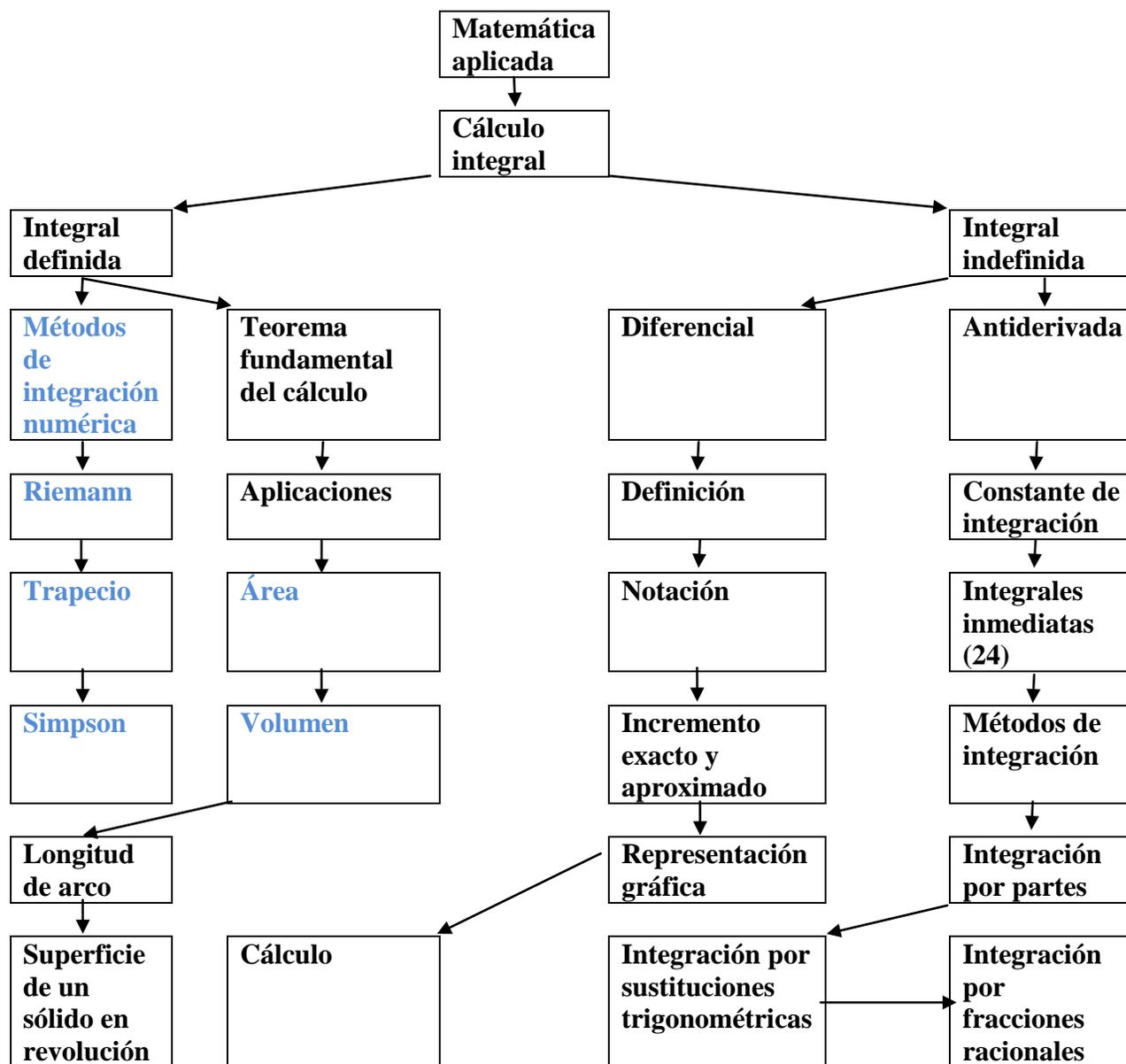
Nivel educativo al que va dirigido el taller (Preescolar, Primaria, Secundaria, Terciaria, o General); Terciaria o bachillerato para alumnos de 15 a 18 años.

Número máximo de personas: 25

Equipos audiovisuales o informáticos que requeriría (Proyector multimedia, TV grande, laboratorio de computación, conexión a Internet): se requiere de un cañón, una laptop, 5 o 6 mesas de trabajo con cinco sillas cada mesa.

### Organizador previo

A continuación se muestran los elementos matemáticos que involucra el curso, lo cual le permitirá al estudiante identificar aquellos que se relacionan con la presente actividad que corresponde al método de integración numérica con aplicación de área y volumen.



### Cuestionario

Responde en forma clara cada una de las preguntas, usa lenguaje común sólo donde se requiera y lenguaje matemático bien escrito.

Recomendación. Elegir un lugar de trabajo: biblioteca, casa o ciber. Buscar tres diferentes de información. Libro con edición no mayor de 3 años, un profesor en matemáticas de bachillerato o superior e Internet. En la computadora conectada a Internet acceder a algún buscador, indicar la palabra o frase que se busca. En la lista de las páginas Web encontradas revisarlas para elegir aquella que sea una fuente confiable. Escribir al final la bibliografía de las tres fuentes de información acuerdo al formato APA.

1. ¿Cómo se denota la integral?
2. ¿Cómo se define la integral?
3. Representa gráficamente la integral.
4. ¿A qué se le llama integral indefinida?
5. ¿Qué resulta de una integral indefinida? Justifica tu respuesta.
6. ¿A qué se le llama integral definida?
7. ¿Qué resulta de una integral definida? Justifica tu respuesta.
8. ¿A qué se le llama método de integración numérica?
9. ¿En qué consiste gráficamente el método de integración numérica por sumas de Riemann?
10. ¿Cuál es su fórmula?
11. ¿Cómo se interpreta la fórmula?
12. ¿Cómo se deduce la fórmula?
13. ¿En qué consiste gráficamente y analíticamente el método de integración numérica por trapecio?
14. ¿En qué consiste gráficamente y analíticamente el método de integración numérica por Simpson?
15. Ilustra gráficamente las posibles formas de calcular el área de una o dos curvas.
16. ¿Qué relación guarda el área con la integral?
17. ¿A qué se le llama volumen de un sólido de revolución?
18. ¿Cómo se genera dicho sólido?, considera una o dos curvas.
19. Representa físicamente la generación de un sólido real.
20. ¿Qué relación guarda el volumen de un sólido de revolución con la integral?

**Lista de cotejo para evaluar el cuestionario**

En la siguiente tabla se presentan una lista de cotej para evaluar el cuestionario que resuelve el alumno.

LISTA DE COTEJO				
Alumno				
Profesor				
Materia	Semestre			
Grupo	Especialidad			
Contenido	Métodos de integración numérica: Riemann, trapecio y Simpson, con aplicaciones en área y volumen			
Instrucción	Marcar con una “x” la columna que corresponda según el desempeño del alumno, en caso de marcar “no” señala por qué en la columna de observaciones.			
Producto	Cuestionario			
Aspecto a observar	Cumple		Observaciones	%
	si	no		
Respondió todas las preguntas				50
Definió todos los conceptos				20
Escribió las fórmulas				20
Presentación				10
Criterios de evaluación	Poner especial atención en la escritura matemática y en la idea general del concepto así como en las diferentes formas en las cuales puede estar presentado éste.			
Resultado de la evaluación	El porcentaje de cumplimiento del alumno es de ____ % El % mínimo para acreditar es de 60%			



**Rúbrica para evaluar las aplicaciones.**

A continuación se muestra una tabla que compone la rúbrica usada para evaluar las situaciones problemáticas de aplicación en integrales definidas usando para ello el método de integración numérica en el cálculo de áreas y volumen.

Centro de Bachillerato industrial y de servicios 118. Componente de formación propedéutica. Línea matemática. Matemática Aplicada: cálculo integral. VI semestre.

Contenido a evaluar: conceptual, procedimental y actitudinal correspondiente al método de integración numérica. Rúbrica de evaluación de la resolución de situaciones problema. Se presentan tres niveles de desempeño, el nivel 1 equivale en calificación al 10, el nivel dos equivale a un 8 y el nivel tres equivale a un seis

Aspecto a evaluar.	Niveles de desempeño		
	Nivel 1 equivale a 10	2 equivale a 8	3 equivale a 6
Cognitivo	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Búsqueda de información sobre los métodos de integración numérica, aplicación en área y volumen.</li> <li>2. Responder el cuestionario.</li> <li>3. Demostrar la fórmula de Riemann.</li> <li>4. Identificar los elementos al resolver la aplicación.</li> <li>5. Interpretar el resultado.</li> </ol>	Cumple completamente con cuatro elementos.	Cumple completamente con dos elementos.
Actitudinal	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Respeto hacia los otros integrantes del grupo.</li> <li>2. Responsabilidad a la actividad individual y en equipo</li> <li>3. Trabajo colaborativo cooperación activa.</li> <li>4. Comparte la acción a tomar como consecuencia de la actividad.</li> </ol>	Cumple completamente con tres elementos.	Cumple completamente con dos elementos.
Manejo de la información	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Buscar tres fuentes informativas.</li> <li>2. Elegir la información concreta, clara, confiable y reciente.</li> <li>3. Presentar la información con buena ortografía y redacción.</li> </ol>	Cumple completamente con dos elementos.	Cumple completamente con un elemento.
Comunicativo	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Capacidad para reflexionar sobre las ideas.</li> <li>2. Interpreta los resultados.</li> <li>3. Analiza los elementos de la problemática.</li> <li>4. Comparte en forma clara la información.</li> <li>5. Cuestiona en forma concreta, crítica y justificada la participación de los compañeros.</li> </ol>	Cumple completamente con cuatro elementos.	Cumple completamente con dos elementos.
Tecnológico	Competencia en la búsqueda y manejo de la información. <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Internet</li> <li>2. Word</li> <li>3. Formato APA</li> <li>4. Editor de ecuaciones</li> </ol>	Cumple completamente con tres elementos.	Cumple completamente con dos elementos.