Fórmula (-1): Uma proposta para o ensino-aprendizagem das operações com números positivos e negativos

Anuar Daian de Morais
anuar_com_u@yahoo.com.br
Programa de Pós- Graduação em Ensino de Matemática da UFRGS – PPGEMat
Marcus Vinicius de Azevedo Basso
mbasso@ufrgs.br
Instituto de Matemática – Universidade Federal do Rio Grande do Sul - Brasil

Resumo

Neste artigo apresentamos um Objeto Digital de Aprendizagem (ODA) que foi desenvolvido com objetivo promover a aprendizagem das operações com números positivos e negativos sob a perspectiva da teoria dos Campos Conceituais de Gerard Vergnaud. Tal ODA fez parte da dissertação de mestrado intitulada *Fórmula (-1): Desenvolvendo Objetos Digitais de Aprendizagem e Estratégias para a Aprendizagem das Operações com Números Positivos e Negativos.* De caráter experimental, nossa proposta foi aplicada em duas turmas da 6º série do Ensino Fundamental. Apresentamos alguns resultados presentes na análise dos dados obtidos e que serviram como subsídio para a reflexão do desenvolvimento de ODAs que promovam o desenvolvimento do raciocínio aditivo e multiplicativo através da resolução de situações problemas.

Palavras chave: educação matemática, campos conceituais, campo aditivo, campo multiplicativo, operações com números inteiros, objetos digitais de aprendizagem.

1. Introdução

Neste artigo apresentaremos alguns resultados presentes na dissertação de mestrado intitulada *Fórmula (-1): Desenvolvendo Objetos Digitais de Aprendizagem e Estratégias para a Aprendizagem das Operações com Números Positivos e Negativos*. Os motivos que nos levaram a desenvolver tal pesquisa advém da nossa experiência docente na escola básica na qual identificamos que o ensino das operações com números positivos e negativos é muitas vezes baseado apenas na aplicação da chamada *regra de sinais*. Por consequência, a utilização da regra, por parte dos estudantes, é mecânica e desprovida de significado. Pensamos que tal fato limita a própria compreensão do conceito de número, bem como o desenvolvimento do raciocínio aditivo dos nossos estudantes.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais "*o ensino dos números inteiros* *podem surgir como ampliação do campo aditivo, pela análise de situações em que esses números estejam presentes*" (p. 66). Partindo dessa premissa, desenvolvemos o objeto digital *Fórmula (-1)***.** Tal objeto é um jogo que procura promover a aprendizagem das operações com números positivos e negativos. Para desenvolver o ODA *Fórmula (-1)*, utilizamos como suporte teórico a teoria de Campos Conceituais de Vergnaud. Segundo este autor, *"Campo Conceitual é definido como um conjunto de problemas e situações cujo tratamento requer conceitos, procedimentos e representações de tipos diferentes intimamente relacionados" (1983b apud MOREIRA p.127).* Bem como uma proposta didática para a utilização do ODA.

Nossa pesquisa procurou responder a seguinte questão: *Como objetos digitais de aprendizagem podem promover a aprendizagem das operações com números positivos e negativos sob a perspectiva dos Campos Conceituais de Vergnaud?*

2. Fundamentação Teórica

2.1 O Campo Aditivo

O Campo Aditivo é definido como um conjunto de problemas e situações que envolvem soma ou subtração na sua resolução. Embora sejam operações distintas, ambas referem-se à relação parte/todo e é esse invariante conceitual que relaciona soma e subtração à mesma estrutura de raciocínio, o *raciocínio aditivo*. Portanto, soma e subtração são definidas como operações irmãs, já que podemos resolver o mesmo problema utilizando uma ou outra. Abaixo apresentamos três variações deste problema.

Transformação Direta	**Transformação Indireta**	**Comparação entre medidas**
1) Nilce tem sete pares de brincos, no seu aniversário ganhou mais quatro pares. Quantos pares têm?	2) Nilce ganhou quatro pares de brincos no seu aniversário e ficou com um total de 11 pares. Quantos pares possuía antes?	3) Nilce tinha sete pares de brincos, após seu aniversário ficou com 11 pares. Quantos pares ganhou?
$\boxed{7} \xrightarrow{+4} \boxed{?}$	$\boxed{?} \xrightarrow{+4} \boxed{11}$	$\boxed{7} \xrightarrow{?} \boxed{11}$

Podemos perceber que muitas vezes a operação utilizada na resolução depende do lugar onde a incógnita está localizada, no entanto as três variações do problema se referem à mesma relação parte/todo. Para resolver o primeiro exemplo é comum que as crianças realizem a adição: 7 + 4 = 11. Já a subtração será utilizada na resolução do segundo e terceiro problemas. Embora seja a mesma operação utilizada, os problemas são de categorias diferentes: no segundo problema subtração refere-se a uma transformação, já o terceiro à comparação entre duas medidas de dois conjuntos de objetos concretos.

No livro "*El niño, las matemáticas y la realidad: problemas de la ensenhanza de las matemáticas en la escuela primaria"*, Vergnaud apresenta as principais categorias de problemas que envolvem o raciocínio aditivo. O autor comenta que existem números que expressam a medida de conjuntos de objetos concretos, porém ao utilizar o raciocínio aditivo para resolver problemas, surgem números que expressam transformações de medidas. Sendo assim estamos diante de dois tipos diferentes de números: os primeiros são chamados de números naturais e expressam a cardinalidade de conjuntos (portanto não são positivos nem negativos); já os números do segundo tipo são chamados de números inteiros e expressam transformações (ganho ou perda) e, portanto, são dotados dos sinais positivo e negativo.

Esquema de Flechas

Pensamos que os problemas explorados na nossa proposta utilizam um modelo onde dois elementos estão ligados por uma relação e essa relação também é considerada como um elemento. Para Vergnaud nesse modelo há a ideia de transformação, já que *"numerosas relações da realidade são de fato relações "dinâmicas", no sentido de que ligam estados sucessivos da realidade e não elementos simultâneos de uma dita realidade".* (1991, p. 46). Essas relações "dinâmicas" são transformações que ocorrem num período de tempo, portanto o *Esquema de Flechas* surge como a representação gráfica ideal para esse tipo de relação, já que evidência a transformação que leva de um Estado (inicial) à outro Estado (final). Por exemplo: Tendo uma reta numérica como referência, Nilce está na posição +7 e se desloca 4 posições para a direita. Qual será sua posição final?

$$\boxed{7} \xrightarrow{+4} \boxed{?}$$

Note que é uma relação dinâmica, já que num primeiro momento ela está na posição +7, desloca-se 4 posições para a direita (a posição sofre uma transformação) e para na posição 11. Segundo Vergnaud, o esquema de flechas é um modelo que representa muito bem as relações ternárias, visto que deixa explícita a transformação sofrida pelos elementos.

Acreditamos que a teoria de Campo Aditivo nos ofereceu subsídios teóricos para tentar entender as seguintes dificuldades apresentadas pelos estudantes:

1. <u>Indiferenciação entre o sinal da operação e dos números</u>: Vergnaud utilizou o esquema de flechas para diferenciar as composições entre medidas ou estados relativos. Ao estudarmos o Campo Aditivo visualizamos o esquema de flechas como um instrumento pedagógico com o objetivo de promover a coordenação entre os esquemas de ação e o sistema simbólico.
2. <u>Realização da subtração do tipo ***(a) – (+b)***</u>: ao definir a soma e a subtração como operações irmãs (já que fazem parte da mesma estrutura de raciocínio), o Campo Aditivo nos oferece uma justificativa pedagógica para equivalência entre as operações:

$$-(+b) = (a) + (-b)$$

Tal equivalência seria favorecida pela forma em que os problemas aditivos são apresentados, já que a operação utilizada na resolução depende do lugar onde a incógnita está localizada: Transformação Direta ou Indireta.

2.2 O Campo Multiplicativo

O Campo Multiplicativo é definido como um conjunto de problemas e situações que envolvem multiplicação ou divisão na sua resolução. O invariante conceitual do raciocínio multiplicativo é, segundo Nunes (2001, p. 78), a existência de uma relação fixa entre duas variáveis de grandezas (ou quantidades) diferentes.

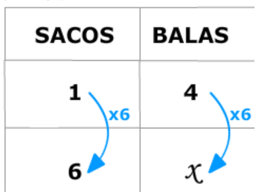
> "Ao resolver problemas de raciocínio multiplicativo, estamos buscando um valor numa variável que corresponda a um valor dado na outra variável. A relação constante entre as duas variáveis é que possibilita a dedução na resolução de problemas do raciocínio multiplicativo." (NUNES, p. 79, 2001)

Sendo assim os problemas do Campo Multiplicativo envolvem relações quaternárias (duas medidas de um tipo e duas de outro) ao invés das relações ternárias presentes na adição. Em função disso, no livro "*El niño, las matemáticas y la realidad: problemas de la ensenanza de las matemáticas en la escuela primaria*", Vergnaud afirma que a representação $a \times b = c$ é inadequada para representar as correspondências entre as quantidades envolvidas na multiplicação, "*pois não comporta mais que três termos*" (1991, p.197). Portanto se deve utilizar um esquema que deixe explícito essas relações quaternárias, ou seja, algo que torne visível as quatro quantidades envolvidas nos problemas do Campo Multiplicativo e, esse esquema, nada mais é do que uma tabela. O autor diz que o uso de tabelas não é um empecilho para as crianças já que na sua organização os dois tipos de variáveis e a correspondência existente entre as quantidades são identificadas facilmente. E isso só é possível, pois as tabelas traduzem o isomorfismos das medidas, ou seja, as operações realizadas num tipo de variável são equivalentes às operações do segundo tipo de variável envolvida no problema.

No quadro abaixo, perceba que a operação utilizada na resolução do problema depende do lugar onde a incógnita está localizada.

Transformação Direta

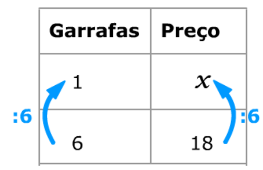
Tenho 6 sacos de balas. Há 4 balas em cada saco, quantas balas tenho?



Utiliza-se a multiplicação.

Transformação Inversa

Paguei R$18,00 por 6 garrafas de suco. Quanto custa uma garrafa?

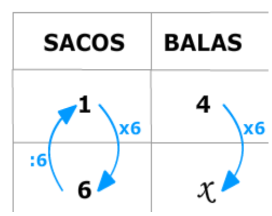


Utiliza-se a divisão.

Em suas pesquisas Vergnaud identificou que a maioria das crianças resolviam os problemas da transformação direta utilizando dois tipos de procedimentos para encontrar o valor da incógnita **X** e que veremos a seguir:

A Relação vertical

Na relação vertical realizam-se operações entre as grandezas de mesmo tipo (que estão na mesma coluna) e são estendidas às grandezas do outro tipo (segunda coluna). Como podemos observar na tabela ao lado, para determinar o valor de **X** balas, realizamos a multiplicação de 4 pelo operador (x6), isso nada mais é do que aplicar – na coluna das balas – a operação que expressa a passagem de 1 para 6 sacos da primeira coluna.



Note que os operadores verticais (x6) e (:6) não possuem dimensão (são um escalar). Além disso, são operadores inversos: o operador (:6) representa o operador inverso (x6) que fez passar de um saco para seis sacos. Vergnaud afirma que as crianças não apresentam dificuldades em relação às operações verticais.

A Relação horizontal

Diferentemente da relação anterior, os operadores horizontais possuem dimensão, já que, segundo Vergnaud, "*são funções que expressam a relação entre medidas de categorias diferentes*" (1991, p.203); tanto é que tal fato nos obriga a utilizar a relação verbal "*balas por sacos*".
Como podemos observar na tabela ao lado, para determinar o valor de **X** balas, aplicamos a função (*X4 balas por saco*) à quantidade 6 sacos.

Note que (*:4 balas por saco*) é sua função inversa, pois "desfaz" a transformação realizada por *(X4 balas por saco)*.

Vergnaud chama a atenção para o fato de que os dois procedimentos são equivalentes, mas distintos e por isso não podemos confundi-los e é só esta análise que permite compreender que, ao fazer 6x4 ou 4x6, não se multiplica sacos por balas ou balas por sacos, mas aplica-se a noção de proporção.

3. O Fórmula (–1)

Muitas vezes ao lermos artigos sobre a utilização das TICs em educação, identificamos a crença empirista de que é a utilização do ODA que permite a aprendizagem e a construção de conhecimento por parte do estudante. Dessa forma – tentando evitar que tal impressão seja atribuída ao nosso texto – afirmamos que, na nossa avaliação, a função de um ODA em educação é fomentar o desenvolvimento de estratégias. Mas essas são aplicadas e criadas pelo sujeito através da sua ação, portanto não podem ser ensinadas, já que é o próprio sujeito que constrói o conhecimento e desenvolve o seu raciocínio aditivo e/ou multiplicativo.

Sendo assim o *Fórmula (–1)* foi concebido "*como um objeto para pensar com*", ou seja, uma espécie de micromundo que tem como objetivo incitar diferentes tomadas de consciência por parte dos estudantes. E será a partir desse processo que os sujeitos desenvolverão estratégias de resolução de problemas, representações e propriedades aritméticas com números positivos e negativos. Nesse sentido, acreditamos que a nossa proposta se alinha à ideia apresentada por Kaput, onde ele afirma que um software deve ajudar os estudantes a estenderem o que sabem de um contexto familiar para um menos familiar, de um contexto concreto para um contexto abstrato (1995, pg. 133).

No endereço: http://mdmat.mat.ufrgs.br/formula_1 os ODAs e a proposta didática estão disponíveis para consulta.

O objeto digital de aprendizagem *Fórmula (-1)* é um jogo que visa promover o desenvolvimento do raciocínio aditivo e multiplicativo, através da ampliação e construção de novos significados para as operações com números positivos e negativos. O jogo possui cinco fases, sendo três voltadas para os problemas do Campo Aditivo e duas para os do Multiplicativo. Nas fases do campo aditivo o jogo apresenta duas lesmas que disputam uma corrida tendo como referência uma reta numérica, como mostra as figuras 1, 2 e 3.

Já nas fases do campo multiplicativo são duas pulgas que disputam a corrida, vence aquela que possui o maior somatório das distâncias saltadas (figura 4).

Figura 1. Primeira fase do Fórmula (-1)

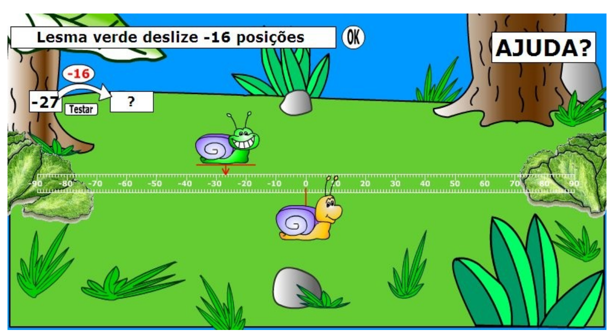


Figura 2. Segunda fase do Fórmula (-1)

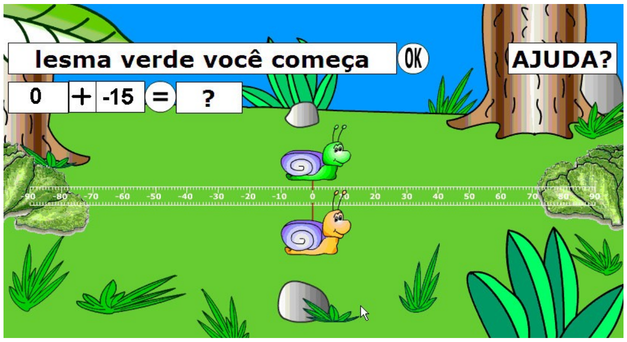


Figura 3. Terceira fase do Fórmula (-1)

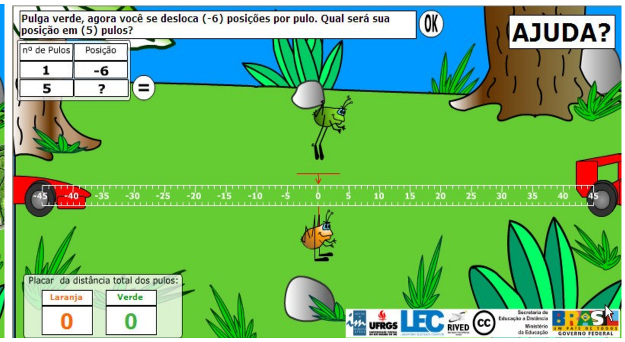


Figura 4. Quarta fase do Fórmula (-1)

Consideramos que as situações-problemas apresentadas no objeto digital de aprendizagem pertencem à quinta e sexta categorias do Campo Aditivo definidas por Vergnaud, tendo em vista que os *deslocamentos* das lesmas são transformações sofridas pelas medidas de distâncias e a *posição* das lesmas são estados relativos de um sistema referencial (Morais, Basso e Lima, 2008). Logo os problemas do *Fórmula (– 1)* são uma extensão das operações $\mathbb{N}$ para $\mathbb{Z}$.

4. Dados & Resultados

Temos a certeza de que, ao descrevermos como desenvolvemos o *Fórmula (–1),* estamos respondendo a pergunta proposta nessa pesquisa, visto que esse processo possui dois aspectos fundamentais: o primeiro foi o desafio de criar um ODA a partir da teoria de Campos Conceituais de Vergnaud - e que nos levaram a sua construção. Sendo assim, através de tal fundamentação começamos a entender o que observávamos na nossa prática e (também) a vislumbrar novas estratégias didáticas que contribuíssem para a aprendizagem. O segundo é que uma das etapas fundamentais da nossa proposta é seu caráter experimental, pois acreditamos que ao utilizar o ODA numa situação prática de sala de aula temos a oportunidade de analisar outros aspectos que são observáveis pelos estudantes, mas que não fomos capazes de prever ou imaginar. Nosso experimento foi aplicado em duas turmas de 6º série do Ensino Fundamental, uma delas pertence à rede federal de Porto Alegre e a outra, à rede privada de Guaíba/RS. Acreditamos que se não há esse momento no desenvolvimento de um ODA, existe o perigo de desenvolver uma proposta idealizada.

Como já relatamos em outros artigos, ao utilizarmos o *Fórmula (–1)* numa situação de sala de aula, produzimos uma série de questões que nos ajudaram a repensar a nossa proposta e realizar algumas implementações no ODA. Vejamos quais foram:

A principal modificação foi em relação a nossa concepção do *Fórmula (–1)*, onde sua função é servir como mais uma alternativa para fomentar a *coordenação entre Sistemas de Ação e Simbólicos*, possibilitando a extensão do raciocínio aditivo e multiplicativo para operações que envolvem operações com números negativos. Nesse sentido procuramos explorar diferentes tipos de representação simbólica através do ODA, o que nos levou a incorporar ao objeto duas formas de representação: o esquema de flechas para os problemas do Campo Aditivo (Morais, Basso e Lima, 2008) e a utilização de tabelas para o Campo Multiplicativo (Morais, Basso e Lima, 2009).

4.1 Fórmula (-1): Campo Aditivo

Quanto a interação com a utilização dos esquemas de flechas na segunda fase do ODA, observamos que ela privilegia o desenvolvimento de estratégias, pois o ato de contar é dificultado devido a escala utilizada reta numérica. Logo ficou claro para os jogadores, que o jogo não dependeria apenas de sorte, mas também exigia a habilidade de cálculo mental. Outro aspecto observado foi que os estudantes que tiveram maior dificuldade foram aqueles que insistiam em utilizar o esquema de ação de contar.

Também percebemos que a situação de jogo era estabelecida quando a dupla formada estava no mesmo nível de compreensão, portanto competiam de forma saudável, ou melhor, brincavam enquanto aprendiam matemática. Quando isso não ocorria os estudantes assumiam uma postura de cooperação, onde um ajudava o outro, sem competir. Nesses casos as experiências mais ricas foram quando um dos estudantes colocava-se na posição de ensinar o colega. Então pudemos observar que uma das estratégias utilizadas por eles era recorrer a primeira fase do jogo, para explicar com números pequenos, utilizando o esquema de contar.

Em relação a subtração de números positivos e negativos, presente na terceira fase do *Fórmula (–1)*, a noção de *"ao contrário"* foi uma estratégia didática interessante para os estudantes, sendo assim não apresentaram grande dificuldades de entender como funcionava essa novo significado. De início a maioria dos estudantes nem perceberam a presença da subtração e quando a identificavam recorriam ao botão Ajuda com o objetivo de sanar suas dúvidas. É importante ressaltar que tal facilidade não foi observada quando os estudantes realizavam as atividades escritas em sala de aula.

4. 2 Algumas Hipóteses e Generalizações Apresentadas

Após jogarem as diversas fases do ODA e resolverem diferentes problemas do campo aditivo, apresentamos a seguinte atividade:

Resolva as operações e responda questões seguintes: $\boxed{+15} \xrightarrow{+8} \square$ $\boxed{-7} \xrightarrow{-9} \square$ $\boxed{-7} \xrightarrow{+15} \square$ $\boxed{+5} \xrightarrow{-7} \square$	6) Estabeleça critérios para decidir quando é necessário *Somar* ou *Subtrair* os valores absolutos. 7) Estabeleça critérios para decidir quando o resultado será *Positivo* ou *Negativo*.

Tendo posse desses dados, conseguimos classificar suas respostas em três níveis cognitivos diferentes.

NÍVEL I: Indiferenciação

Nesse nível o sujeito resolve os problemas corretamente através da reta numérica, mas não identifica regularidades, afirmando que cada caso é um caso. Um exemplo é o sujeito AA que não conseguiu identificar regularidades para decidir quando se soma ou se subtrai, podemos observar que ele utiliza a reta para decidir se a resposta final é positiva.

6. Você tem que somar se der mesmo resultado e soma se não der é subtração.
7. Positivo é, para direita e negativo é para esquerda.

NÍVEL II: *A Soma/Subtração dos Valores Absolutos*

Fase A: Nesse nível o sujeito apresenta suas primeiras hipóteses, por exemplo, uma delas é que o sinal da transformação decide se devemos somar ou subtrair os valores absolutos. Como é o caso do sujeito CM.

6) Primeiro tiramos o sinal de + ou –.

7) Eu acho que depende do número inicial se + ou –, em relação ao número das transformações.

No entanto ao resolver situações-problemas, tal hipótese é desestabilizada, um conflito que o sujeito não consegue resolver.

Fase B: Nesse nível o sujeito estabelece relações parciais sobre a soma de números positivos e negativos. Por exemplo, consegue generalizar que devemos subtrair os valores absolutos quando o sinal da posição inicial e das transformações são diferentes e somá-los quando são iguais. Entretanto o sujeito não consegue fazer uma previsão de qual será o do estado final. Um exemplo dessa fase é o sujeito LS.

6) Eu vou somar quando o sinal é de + na transformação e o numero for positivo.
Vou subtrair quando o sinal for de – na tranbformação, e quando o número for positivo
7) Quando tiver o sinal de mais no estado final é positivo se for o de menos é negativo.

Além disso, nesse nível, alguns estudantes não generalizaram a soma dos valores absolutos para aquelas situações que envolviam números negativos na posição inicial e na transformação.

NÍVEL III*: A regra de sinais:*

Nesse nível o sujeito consegue, através de uma generalização, discriminar as condições necessárias para somar ou subtrair os valores absolutos e também as condições para decidir qual será o sinal do estado final. A estudante GP consegue descrever a regra de sinais da soma propriamente dita.

6 - Quando o estado inicial e a tranformação, tem o mesmo sinal (positivo ou negativo) é preciso somar e se subtrai qua os sinas são diferentes.

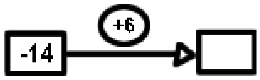
7- A resposta é negativa quando os númeres negativos são maiores que os positivos e vice-versa

A partir disso podemos constatar que a nossa proposta didática e a utilização dos ODAs contribuíram para o desenvolvimento do raciocínio aditivo dos estudantes, ao ponto deles próprios definirem a regra de sinais.

4.3 A Resolução de Equações do Tipo $x + a = b$

Ao trabalharmos com a ordem inversa do esquema de flechas, estaríamos explorando situações problemas que exploram a operação inversa e, implicitamente, a resolução de equações do tipo $x + a = b$. Como podemos observar no esquema abaixo.

Ordem Direta



(- 14) + (+ 6) = ?

Apesar do bom desempenho nesse tipo de questão quando envolviam a soma de números simétricos, esse fato não se repetiu nos outros casos. Durante a resolução dessas questões, observamos duas estratégias utilizadas pelos estudantes: A primeira delas é resolver a equação pelo método da substituição. Pudemos constatar que os estudantes – que acertaram todos os itens – resolveram os problemas substituindo o valor numérico no local da incógnita, ER é um exemplo, veja Figura 5. A segunda estratégia utilizada era Se o valor absoluto da resposta final era maior, significava que os sinais eram iguais, mas se tal valor fosse menor, então os números eram de sinais diferentes. Provavelmente foi a estratégia utilizada pela RG veja Figura 6.

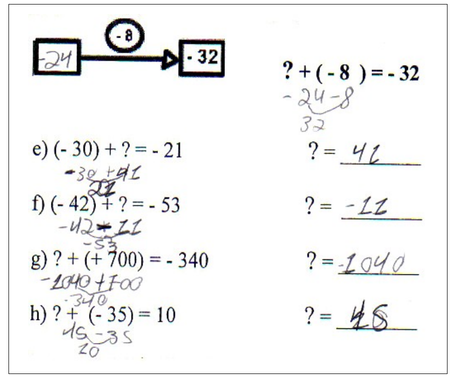


Figura 5. Soluções apresentadas por ER.

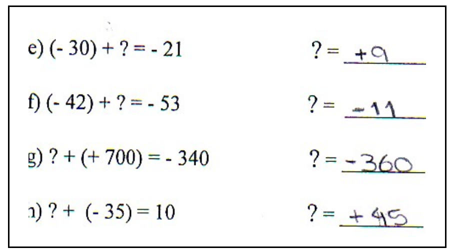
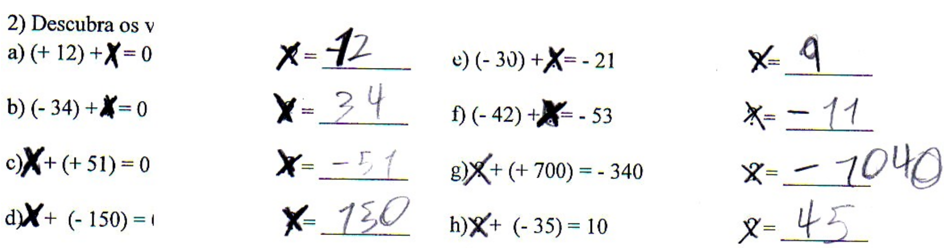


Figura 6. Soluções apresentadas por RG.

Queremos ressaltar que, para desenvolver a segunda estratégia, é necessário que antes o estudante tenha estabelecido as relações exigidas nas atividade da seção anterior, caso contrário não teria êxito.

Durante o desenvolvimento da atividade o estudante PV perguntou se poderia utilizar o x no lugar de ?:

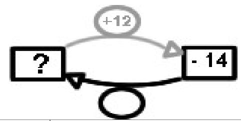


Após analisar as atividades realizadas até esse momento da proposta didática, interpretamos tais dados como evidências que apontam para a confirmação da nossa crença de que o desenvolvimento do raciocínio aditivo dos sujeitos segue as etapas do desenvolvimento epistemológico da matemática. Ou seja, observamos que o desenvolvimento das operações com números positivos se confunde com o desenvolvimento da álgebra, o que nos leva a crer que o raciocínio algébrico pode ser desenvolvido como a extensão raciocínio aditivo e multiplicativo.

4.4 A Subtração & o Esquema de Flechas

A estratégia didática de explorar a subtração de números positivos e negativos através do esquema de flechas não surtiu o resultado esperado. Talvez isso ocorreu por utilizá-la como um algoritmo a ser aplicado pelos estudantes. Reveja a estratégia:

Podemos representar com linguagem matemática o esquema de flechas abaixo de duas formas:



A flecha superior através de uma soma de números inteiros: **? + (+ 12) = – 14**	A flecha inferior através de uma subtração números inteiros visto que uma é o inverso da outra: **(– 14) – (+ 12) = ?**

1.

Mesmo que, na nossa avaliação, esse modelo seja teoricamente coerente, durante a coleta de dados constatamos que, para alguns estudantes nossa proposta não fez sentido e continuaram a resolver os problemas desconsiderando a subtração, portanto não acertaram as atividades propostas. Outros apenas colocaram (equivocadamente) o sinal de *menos* entre os números inteiros: **? – (+ 12) = – 14**

Diante desses fatos e do desafio que assumimos, resta-nos dar continuidade aos nossos estudos, buscando outras alternativas e criando novos ODAs para que contribuam de forma mais eficaz nesse processo de desenvolvimento.

4. 5 Fórmula (-1): Campo Multiplicativo

Na nossa avaliação a experiência com as fases anteriores do ODA auxiliou os estudantes nas fases do jogo que envolviam a multiplicação. De saída eles entendiam que o jogo apresentava um problema e a reta numérica como ferramenta de cálculo. Também observamos que os estudantes identificaram com facilidade os problemas do campo multiplicativo, manifestando tal conclusão com frases do tipo: *"Mas esse jogo é de multiplicação!"*.

A partir dos dados obtidos constatamos que o simples fato de aprender jogando o *Fórmula (–1): Pulgas* não significa que os estudantes irão "incorporar" o uso das tabelas para resolver o problemas do Campo Multiplicativo. Pudemos constatar tal fato ao analisarmos as mensagens que os estudantes enviaram durante a realização da segunda atividade do material, onde eles deveriam explicar (via e-mail) como funcionavam as novas fases do *Fórmula (-1)*: Pulgas.

Além disso, durante a interação com o ODA pudemos observar que os estudantes realizam os cálculos através de duas ações: 1ª decisão do sinal da resposta final e 2ª realização do cálculo da multiplicação envolvida. Tal cálculo era feito através do algoritmo ou utilizando a reta numérica. Abaixo apresentamos a mensagem apresentada por BL.

" *BL e LI jogavam o jogo das pulgas. BL era o Verde e LI o laranja. Ainda não sabíamos o que fazer, logo depois descobrimos. Na tabela estava:4x-5,mas não entendemos. Daí,eu descobri que, multiplicando os dois,dava alguma resposta (destino no qual a pulga deveria ir). Então,tiramos o menos para facilitar a conta...Colocamos o menos na resposta da conta e deu certo,DESCOBRÍMOS O JEITO CERTO!!!!"*

Quadro 1. E-mail enviado por BL

Como pesquisador foi uma surpresa observar que esse também é um aspecto da regra de sinais e parece ser consequência de um comportamento espontâneo dos sujeitos.

Outro fato observado é que, enquanto jogavam, os estudantes não tiveram dificuldade em realizar operações do tipo *positivo x negativo*, mesmo sendo o seu primeiro contato. Como podemos notar na mensagem da estudante AS.

o jogo é assim, o computador diz um numero que a pulga anda por pulo
exemplo
pulga verde anda (3) por pulo
5 X 3 = 15
_0__1_2_3_4_5_6_7_8_9_10_11_12_13_14_15
a pulga amarela anda (-2) por pulo
1 x -2 = -2
___-5__-4_-3_-2_-1_0_________"

Quadro 2. E-mail enviado por AS

Pelo o que pudemos observar durante a interação de AS com o jogo, para ela são essenciais duas características fundamentais para se jogar o Fórmula (–1): o invariante conceitual (presente nos problemas do campo multiplicativo) e a reta numérica. A tabela foi ignorada.

Abaixo apresentamos a mensagem do estudante FR, que foi o único a fazer uso de tabelas para explicar as regras do jogo.

Explique com as suas palavras como funciona o jogo dando exemplos:
O jogo é com a multiplicação de números negativos. exemplo

Numero de pulos	*Casas que pulou*
1	*-20*
4	*?*

Daí se usa um tipo diferente de regra dos 3.
1=20
4=?
4x20=80 então:

Numero de pulos	*Casas que pulou*
1	*-20*
4	*-80*

Quadro 3. E-mail enviado por FR

É importante ressaltarmos que nas atividades escritas o número de acertos nesse tipo de multiplicação era menor. Na nossa avaliação esse é um dos benefícios do contexto virtual e simbólico do *Fórmula (–1)* e que também nos justifica atribuir o significado de "ao contrário de" para "– n pulos". Embora artificial, ainda assim acreditamos que essa é uma estratégia que promove o desenvolvimento do raciocínio multiplicativo com números positivos e negativos.

5. Considerações Finais

Estamos convencidos de que um objeto digital de aprendizagem pode promover a aprendizagem das operações com números positivos e negativos sob a perspectiva dos Campos Conceituais de Vergnaud a medida que ele contribua para a coordenação entre os Sistemas de Ação e Simbólico, no entanto esse fato isolado não é suficiente. Durante a apresentação da nossa proposta tivemos inúmeros exemplos de situações em que, no contexto do ODA, os sujeitos da pesquisa não tiveram muitas dificuldades em realizar as operações com números positivos e negativos. Porém tal fato não se repetia no desenvolvimento das atividades da nossa proposta didática. Os motivos desse fato podem ser: 1) O caráter lúdico da nossa proposta; 2) As situações-problemas presentes no *Fórmula (–1)* exploram apenas as relações diretas; 3) Apesar de fomentar a coordenação dos Sistemas de Ação e Simbólico, no contexto do jogo os sistemas de ação são privilegiados, enquanto nas atividades da nossa proposta didática os diferentes Sistemas de Representação Simbólicos são priorizados;

Estamos convencidos que, através dessa investigação, realizamos avanços significativos na direção do desenvolvimento de um objeto digital de aprendizagem que promova o desenvolvimento do raciocínio aditivo e multiplicativo que envolva operações com números positivos e negativos sob a perspectiva de Campos Conceituais de Vergnaud. Já que ele nos foi fecundo tanto na definição de certezas e convicções teóricas, quanto no estabelecimento de dúvidas e questões que devem ser respondidas em novos estudos.

Bilbiografia e Referências

KAPUT, J. James; Creating cybernetic and psychological ramps from the concrete to the abstract: Examples from multiplicative structures. In Software goes to school: *Teaching for understanding with new technologies*, D. PERKINS, J. SCHWARTZz, M. WEST, and M. WISKE. Capítulo 8, p. 173 – 191. Oxford University Press. New York. 1995.

MORAIS, Anuar Daian de, BASSO, Marcus Vinicius de Azevedo; LIMA, Cristiano Lopes; Fórmula (-1): desenvolvendo objetos digitais de aprendizagem e estratégias para a aprendizagem das operações com números positivos e negativos. *RENOTE : Revista Novas Tecnologias na Educação* – Porto Alegre : UFRGS, Centro Interdisciplinar de Novas Tecnologias na Educação, dezembro de 2008; Disponível em: < http://www.cinted.ufrgs.br/renote/dez2008/artigos/11b_anuar.pdf >

MORAIS, Anuar Daian de, BASSO, Marcus Vinicius de Azevedo; LIMA, Cristiano Lopes; O Campo Multiplicativo a partir do Fórmula (-1): desenvolvendo objetos digitais de aprendizagem e estratégias para a aprendizagem das operações com números positivos e negativos. *RENOTE : Revista Novas Tecnologias na Educação* – Porto Alegre : UFRGS, Centro Interdisciplinar de Novas Tecnologias na Educação, julho de 2009; Disponível em: < http://www.cinted.ufrgs.br/renote/dez2008/artigos/11b_anuar.pdf >

MORAIS, Anuar Daian de, Dissertação: *Fórmula (-1): Desenvolvendo Objetos Digitais de Aprendizagem e Estratégias para a Aprendizagem das Operações com Números Positivos e Negativos.* UFRGS, 2010.

MOREIRA, Marco Antônio. A Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, o Ensino de Ciências e a Pesquisa nesta Área. *Investigações em Ensino de Ciências* – V7(1), pp. 7-29, 2002, Disponível em : < http://www.if.ufrgs.br/ienci/artigos/Artigo_ID80/v7_n1_a2002.pdf > Acesso em: 1 set. 2008.

NUNES, Terezinha. *Introdução à Educação Matemática: operações numéricas*. / Terezinha Nunes, Tânia M. M. Campos, Sandra Magina, Peter Bryant. - 1 ed, - São Paulo: Proem, 2001.

PCNs (Parâmetros Curriculares Nacionais). *Matemática*. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. 2006.

VERGNAUD, Gérard. *El niño, las matemáticas y la realidad: problemas de la ensenhanza de las matemáticas em la escuela primaria*. 1ed. México: Trillas, 1991. Tradução de: L'enfant, la mathématique et la realité.