Taller de Resolución de Problemas: "Hacia un pensamiento matemático"

Miguel Alejandro **Rodríguez** Jara
Universidad de Playa Ancha
Chile
mrodriguez@upla.cl

Estudiantes Colaboradores
Tamar **Muñoz** Ibaceta
Julio **Hernández** Manzano
Mauro **Mondaca** Escobar

Resumen

En el taller que se propone, se analizará un conjunto de problemas para resaltar estrategias y la relación de éstos con objetos matemáticos. Para ello se han considerado problemas de las olimpiadas de resolución de problemas de la quinta región cordillera en Chile (ORPMAT), destinadas a estudiantes de 7º Año Básico a 4º Año de enseñanza media, así como los planteados en los talleres de resolución de problemas en el marco de las actividades de extensión de la Universidad de Playa Ancha a la comunidad de profesores del segundo ciclo básico. Lo anterior será considerado para enriquecer el desarrollo del taller en función de las inquietudes o discusiones que se desprendan de éste. Otro aspecto a resaltar es la importancia de configurar un pensamiento matemático. La utilización de una rúbrica y el uso de fichas permitirá focalizar aquellos aspectos declarados y que se desean articular en el proceso de resolución. Por último, la utilización de TIC's, como recurso, permitirá incorporar la simulación o visualización al proceso de resolución.

Palabras claves: Resolución de problemas, pensamiento matemático, fichas didácticas, rúbrica.

La resolución de problemas y el pensamiento matemático

Probablemente, desde una perspectiva actual, nuestra misión como profesores de matemática no debe focalizarse sólo en el desarrollo conceptual de la disciplina en cuestión, sino que además, en el desarrollo de un pensamiento matemático (PISA, 2006). Pero ¿qué es pensar matemáticamente?, probablemente la respuesta a esta pregunta encuentre, como en muchos otros conceptos, distintas vertientes o énfasis. Para este taller, pensar matemáticamente será en esencia el poner de manifiesto tanto aspectos cognitivos como afectivos en situaciones diversas. El siguiente esquema nos ayudará a dar una mirada a algunos de esos componentes.

Figura 1. Esquema sobre algunos aspectos a fomentar en el pensamiento matemático

¿Cómo lograr perseverar, relacionar, inferir, argumentar, sorprenderse desde una matemática que a veces resulta ser, desde la forma como se la presenta, sólo mecánica y algorítmica? Siempre se percibe el mismo objetivo, llegar a una única respuesta utilizando una ecuación o fórmula (Rodríguez, 2006)

Probablemente, la resolución de problemas puede ayudarnos a dar respuesta a la interrogante planteada. En la actualidad, ésta es considerada una rama fundamental de la educación matemática y debe ser vista como el sustrato para el desarrollo tanto de capacidades como de actitudes. En definitiva, para fomentar competencias que permitan mejorar tanto el proceso de matematización en el colegio como la comprensión, interpretación y solución de situaciones problemáticas de la vida cotidiana. En este sentido se rescata los planteamientos de Schoenfeld en relación a las dimensiones a considerar en el proceso de resolución de problemas, incorporando tanto aspectos cognitivos como afectivos y meta-cognitivos (Schoenfeld, 1985).

Por otro lado, los cuatros pasos que propone Polya para resolver un problema, a saber: Comprender el problema, buscar un plan, ejecutar el plan y verificar la respuesta (Polya, 1990), permiten sistematizar el trabajo de los estudiantes en el aula en el proceso de resolución.

El primer paso, pone de relieve la importancia de la comprensión lectora y el uso de un vocabulario amplio y variado. Éste último, indispensable en la identificación de palabras que den cuenta de acciones, transformaciones y relaciones en la o las situaciones a resolver.

El segundo y tercer paso dicen relación con las estrategias necesarias para resolver el problema y la ejecución de éstas. Existe una amplia gama de estrategias que pueden o no asociarse a niveles de desarrollo cognitivo, es decir, pueden ser utilizadas a lo largo de la escolaridad tanto en la aproximación como en la resolución misma de un problema. Prueba y comprueba, haz una lista, haz un dibujo, reduce el problema a otro más simple, busca un patrón; son sólo algunas de las estrategias que se pueden trabajar con los estudiantes.

Problema: La fracción oculta
Considera la fracción y su representación decimal dada a su derecha. ¿Cuáles son los dígitos asociados a las letras E, V, N, O, C, A, S, I ?

$$\frac{EVE}{NON} = O,CASICASICASI\ldots$$

Solución

Este problema requiere del concepto de fracción y número decimal. Además, debemos recordar que un número decimal periódico se puede escribir como una fracción cuyo denominador tendrá tantos nueves como dígitos distintos tenga el período (regla). Luego, descompongamos el denominador en dos factores donde uno de ellos debe tener tres dígitos según el patrón NON. O,CASICASI...= $\frac{\quad}{9999} = \frac{\quad}{99\times 101} = \frac{\quad}{33\times 303}$

¿Por qué no nos sirve 99×101?

Luego se puede deducir que en el numerador uno de los factores debe ser 33, el otro factor debe tener tres dígitos según el patrón EVE. Asumamos, por simplicidad, O=0

Estrategia prueba y comprueba (Ensayo y Error)

$33\times 121 = 3.993$ (no sirve)

$33\times 141 = 3.993$ (no sirve)

:

$33\times$ 242=7986 (Es la respuesta)

Luego $\frac{242}{303} = \frac{7986}{9999} = 0,79867986...$

Otra manera de resolver el problema es utilizar el ensayo y error, ver Tabla 1, asumiendo resuelto el problema. La tabla 1 es un buen elemento que ayudará a visualizar y organizar los intentos.

Tabla 1

O	**C**	**A**	**S**	**I**	**E**	**V**	**N**
0					2	3	4
0					5	1	6
0					4	2	7
$\frac{242}{404} = 0,5742...$		$\frac{515}{606} = 0,849834983...$		$\frac{424}{707} = 0,59971711...$			

Al parecer este mecanismo, si bien fomenta la división o el uso de la calculadora, termina siendo engorroso. Por otro lado si asumimos, por ensayo y error, la expresión decimal dada según el patrón O, CASICASI… podríamos fortalecer la simplificación de fracciones, aunque seguiría siendo un proceso tedioso y engorroso.

De la rúbrica utilizada

La siguiente rúbrica, ver Tabla 2, nos ha permitido evaluar el desempeño de los estudiantes tanto en las olimpiadas de resolución de problemas como en talleres para los estudiantes de primer año de la carrera de pedagogía en matemática y computación.

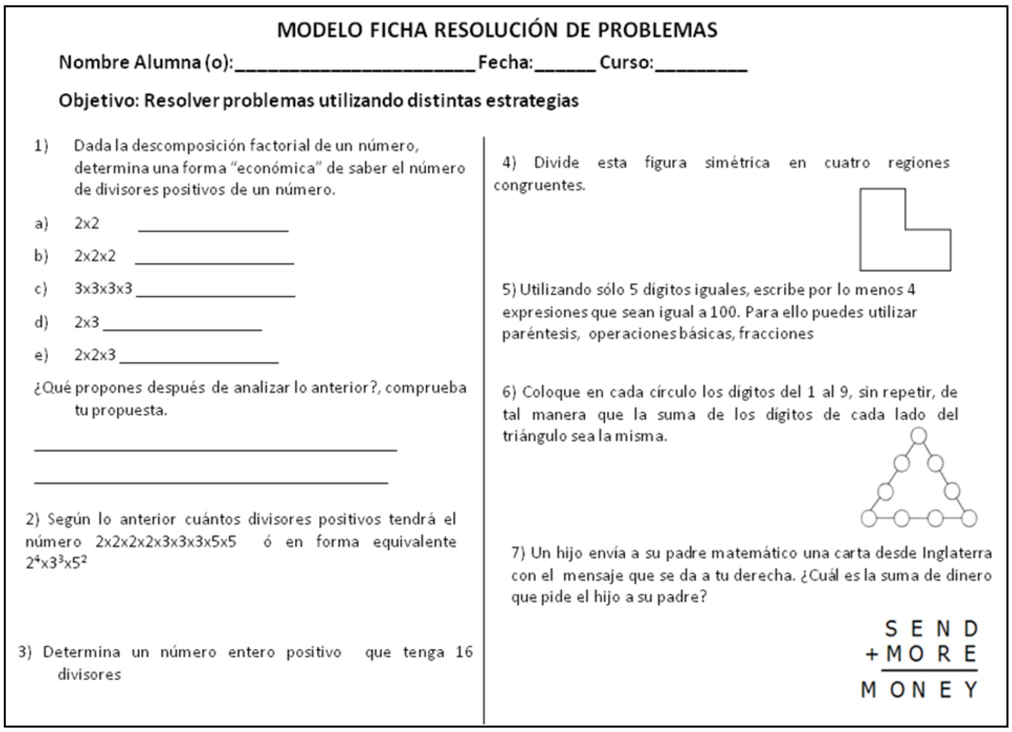
Tabla 2

	Aspectos a evaluar			
	Aspecto a Evaluar	**Bueno**	**Regular**	**Insuficiente**
Desarrollo y cálculos realizados	Cálculo escrito, esquemas y/o tablas	Planteamiento de cálculos coherentes y correctos en relación al enunciado. Presentación de tablas o esquemas en coherencia con el enunciado del problema. **(4ptos)**	Planteamiento de cálculos coherentes Presentación de tablas o esquemas en coherencia no relacionados con el enunciado del problema. **(2ptos)**	Planteamiento de cálculos incoherentes e incorrectos. Presentación de tablas o esquemas incoherentes y no relacionados con el enunciado del problema. **(0ptos)**
Verbalización de la respuesta	Secuencia verbal en el razonamiento de la resolución del problema	Describe, en forma escrita, secuencialmente el desarrollo justificando cálculos, esquemas o tablas. **(2ptos)**	Describe, en forma escrita, con coherencia pero no secuencialmente en relación al cálculo, esquemas o tablas. **(1pto)**	Descripción en forma escrita e incoherente sin relación a lo que se evidencia. **(0pto)**

Nuestra propuesta de trabajo incorpora el uso de fichas didácticas en el aula (Rodríguez, 2006). Dicha propuesta se fundamenta en algunas orientaciones teóricas que dicen relación con la forma de entender el proceso de matematización de manera amplia (Treffers, 1987), considerando el uso de fenómenos que permitan dar una carga de sentido y significado a los conceptos (Dewey1989, Soto 1993) y la necesidad de la adquisición de aprendizajes significativos por parte de los y las estudiantes (Coll, 1996). La resolución de problemas se percibe como un componente fundamental para el desarrollo gradual de un pensamiento matemático (Fernández, 2003).

Ficha de resolución de Problemas

Es importante destacar que la idea de usar esta ficha, ver figura 2, es fomentar en los y las estudiantes la resolución de problemas, destacando el aprendizaje visual (contar figuras bajo ciertas regularidades geométricas), el razonamiento lógico y la búsqueda de patrones, todo esto en relación a los conceptos trabajados en la ficha explicativa o de ejecución respectiva (Rodríguez, 2006) o simplemente situaciones problemáticas de índole diverso: problemas de ingenio, puzles matemáticos (Perelman, 1982)



MODELO FICHA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Nombre Alumna (o):______________________ Fecha:______ Curso:________

Objetivo: Resolver problemas utilizando distintas estrategias

1) Dada la descomposición factorial de un número, determina una forma “económica” de saber el número de divisores positivos de un número.

a) 2x2 ______________

b) 2x2x2 ______________

c) 3x3x3x3 ______________

d) 2x3 ______________

e) 2x2x3 ______________

¿Qué propones después de analizar lo anterior?, comprueba tu propuesta.

____

____

2) Según lo anterior cuántos divisores positivos tendrá el número 2x2x2x2x3x3x3x5x5 ó en forma equivalente $2^4x3^3x5^2$

3) Determina un número entero positivo que tenga 16 divisores

4) Divide esta figura simétrica en cuatro regiones congruentes.

5) Utilizando sólo 5 dígitos iguales, escribe por lo menos 4 expresiones que sean igual a 100. Para ello puedes utilizar paréntesis, operaciones básicas, fracciones

6) Coloque en cada círculo los dígitos del 1 al 9, sin repetir, de tal manera que la suma de los dígitos de cada lado del triángulo sea la misma.

7) Un hijo envía a su padre matemático una carta desde Inglaterra con el mensaje que se da a tu derecha. ¿Cuál es la suma de dinero que pide el hijo a su padre?

S E N D
+M O R E
M O N E Y

Figura 2. Imagen de una ficha explicativa

En este sentido, la ficha de resolución de problemas nos permite abordar de manera gradual problemas que pueden ser versátiles, como por ejemplo, ver figura 3, el problema de los rebotes:

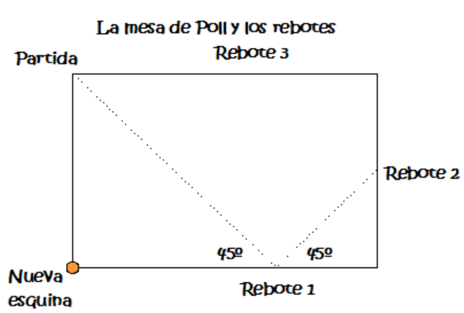


Figura 3. Esquema de una mesa de billar

Problema LAR

Desde el punto de vista de la determinación del número de rebotes, el uso de las construcciones geométricas elementales está en juego. Además, la relación entre el número de rebotes, el largo y ancho de la mesa puede permitir a quienes lo resuelvan, la enunciación de teoremas “LAR” en la perspectiva de como lo haría un matemático, como por ejemplo: “Si L=A, entonces R=0” o bien “Si L=2·A, entonces R=1”. Si bien es posible enunciar “teoremas” en el fenómeno LAR, es también posible abordar su argumentación o demostración, si así fuese necesario. La profundización del problema LAR y sus aristas lo dejamos reservado para el desarrollo de este taller.

La utilización de un problema abierto nos dará la posibilidad de optimizar o discutir respuestas desde la realidad particular de los participantes. A continuación un ejemplo de un tipo de problema que se abordará.

Problema

Un campesino posee una parcela cuadrada en la que hay 4 pinos, situados cada uno a la misma distancia y formando una línea desde el centro del cuadrado hacia la mitad de uno de los lados. En su testamento, un padre hereda la parcela a sus cuatro hijos, dividiéndola en cuatro partes iguales, cada una con un pino. ¿Cómo deberán dividir los hijos la parcela para cumplir el testamento?

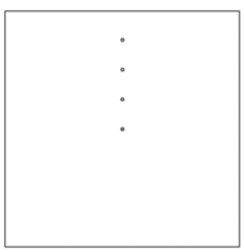


Figura 4.Terreno a repartir y los pinos

A cada uno de los participantes de este taller se le obsequiará un CD con fichas didácticas para el trabajo de conceptos aritméticos del segundo ciclo básico y talleres de resolución de problemas desde la perspectiva planteada. Además de los archivos en Excel y en Flash que se han elaborado para enriquecer el taller.

Bibliografía

Abrantes, P. y otros Autores, La resolución de problemas en Matemáticas, Editorial Graó, 2002

Alcalá, M. y otros Autores, Matemáticas Recreativas, Editorial Graó, 2004

Byrkit, D.; Pettofrezzo, A., Introducción a la teoría de Números. Editorial Prentice/Hall International.

Coll, C., Aprendizaje Escolar y construcción del conocimiento. Editorial Paidós, 1996

Clemens, S; O’daffer, P.; Cooney, T. , Geometría. Editorial Addison Wesley Logman de México 1981, pág.480-483.

Dewey, J., Cómo pensamos: nueva exposición de la relación entre pensamiento reflexivo y proceso educativo. Editorial Paidós, 1989

Emmet, E, Juegos para devanarse los sesos. Editorial Gedisa, 1998

Fernández José, Técnicas creativas para la resolución de problemas matemáticos, Editorial Praxis, 2003

Isoda, M.; Olfos, R. El enfoque de resolución de problemas en la enseñanza de la matemática a partir del estudio de clases. Ediciones Universitarias de Valparaíso. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. 2009.

Karlson, P., La magia de los números. Editorial Labor, 1966

PISA, 2006, Rendimientos de estudiantes de 15 años en Ciencias, Lectura y Matemáticas. Unidad de Curriculum y Evaluación. Chile. 2007

Paenza, A., Matemática…¿Estás ahí? Sobre números, personajes, problemas y curiosidades. Siglo XXI Editores Argentina S.A., 2005.

Perelman, Y., Matemáticas Recreativas, Editorial Latinoamericana, 1982

Pólya, G. (1990). Cómo plantear y resolver problemas. México: Trillas

Pozo, J.; Pérez M.; Domínguez, J., La solución de problemas. Aula XXI/Santillana. España, 1994.

Recamán, N, El palacio de los precisos cristales. Divertimentos matemáticos. Editorial GEDISA, 2006.

Rodríguez, M., Una revisión didáctica de los conceptos de razón y proporción. Paideia Revista de educación Nº27. Universidad de Concepción, 1999.

Rodríguez M., Sobre la enseñanza de conceptos matemáticos: Una reflexión pedagógica. Revista RECHIEM 2, Volumen 1, 2006, pág61-68.

Segarra Luis, Problemates, Editorial Graó, 2001

Soto, I., “La didáctica Fenomenológica propuesta por H. Freudenthal”. 1993.

Treffers, A. (1987) Three Dimensions: A Model of Goal and Theory Description in Mathematics: The Wiskobas Project. Dordrecht, The Netherlands: Reidel