



O uso de um recurso de geometria dinâmica no ensino e na aprendizagem de produtos de vetores

Alexsandro Soares **Candido**

Universidade Bandeirante de São Paulo- UNIBAN
Brasil

alexprofmath@hotmail.com

Monica **Karrer**

Universidade Bandeirante de São Paulo- UNIBAN
Brasil

mkarrer@uol.com.br

Resumo

Este artigo expõe parte de um estudo sobre vetores no $\mathbb{R}^3$. A pesquisa, realizada com base na teoria dos registros de representação semiótica de Duval (2000, 2003, 2006), objetivou elaborar, aplicar e analisar situações sobre vetores nos ambientes papel&lápis e *Cabri 3D*, explorando as relações entre suas diversas representações, com foco no registro gráfico. Com base na metodologia de *Design Experiment* de Cobb et al. (2003), um experimento de ensino foi elaborado e aplicado a dois estudantes do curso de Licenciatura em Matemática. Neste artigo, apresenta-se a análise de duas tarefas sobre propriedades do produto escalar. Concluiu-se que o uso do *Cabri 3D* favoreceu a análise simultânea das relações entre os diversos registros e a investigação da generalidade das propriedades. Tal fato contribuiu para que os estudantes tivessem um contato não usual com o objeto matemático em questão, o que gerou reflexões diferenciadas das comumente obtidas no ensino deste conteúdo.

Palavras-chave: cabri 3D, produto escalar, conversões de registros de representação semiótica, design experiment, registro gráfico.

Introdução

Este artigo expõe parte de um trabalho de dissertação de mestrado sobre produtos de vetores (escalar e vetorial), conteúdos normalmente desenvolvidos na disciplina de Cálculo Vetorial e Geometria Analítica dos cursos superiores de ciências exatas.

A teoria dos registros de representação semiótica de Duval (2000, 2003, 2006, 2009) fundamentou a pesquisa. Nesta teoria está destacada a relevância de um trabalho com as diversas representações semióticas no ensino de um conteúdo matemático.

A intenção do estudo foi desenvolver situações no ambiente *Cabri 3D*, explorando tarefas envolvendo principalmente os registros gráfico, simbólico e da língua natural. Tal motivação surgiu diante das dificuldades apresentadas pelos estudantes com conversões envolvendo gráficos em conteúdos de Geometria Analítica e Álgebra Linear, constatadas por Pavlopoulou (1993) e Karrer (2006) e também pelo fato de o ensino de vetores na disciplina de Geometria Analítica não privilegiar o registro gráfico, conforme pesquisa realizada por Karrer e Barreiro (2009) e por Karrer, Baggi e Candido (2010). Ainda, os estudos de Bittar (1998) apontaram que em uma abordagem usual de vetores, as conversões são exploradas de modo mecânico, ou seja, apenas como uma forma de treinamento. Com isso, foram elaboradas situações que requeriam reflexões, evitando, assim, o estabelecimento automático de relações entre representações de registros distintos.

Ainda, foi identificada, por meio do estudo realizado por Celestino (2000) sobre o estado da arte da Álgebra Linear, a necessidade de pesquisas referentes ao ensino e à aprendizagem de Geometria Analítica e Álgebra Linear, uma vez que seu trabalho revelou uma alta taxa de reprovação nessas disciplinas em uma amostra de universidades brasileiras.

O experimento de ensino elaborado foi composto de nove atividades. Neste artigo, em particular, são apresentados os resultados da aplicação de uma atividade sobre propriedades do produto escalar, a qual envolveu a conversão do registro simbólico para o gráfico, tendo como ferramenta o *Cabri 3D*. Com este *software* foi possível apresentar aos estudantes novas formas de contato com o objeto e, conseqüentemente, favorecer a construção e o desenvolvimento do pensamento matemático, conforme destacam Noss e Hoyles (1996, 2009) e Hoyles e Noss (2003). Estes pesquisadores apresentam a importância do uso do computador no ensino e na aprendizagem de Matemática e defendem o uso de *softwares* que tragam inovações pedagógicas. Ainda, Balacheff & Kaput (1996) destacam a necessidade de elaboração de pesquisas e novas abordagens que insiram recursos computacionais, tendo em vista o impacto do uso dessas ferramentas nas últimas décadas.

Diante dessas pesquisas, teve-se o objetivo de elaborar um experimento de ensino que procurou trazer inovações pedagógicas por meio do uso do *software Cabri 3D*, propiciando explorações não usuais no ensino de vetores, principalmente aquelas referentes às conversões com o registro gráfico.

Referencial Teórico e Metodologia

Essa pesquisa foi fundamentada na teoria dos registros de representação semiótica de Duval (2000, 2003, 2006, 2009), o qual afirma que o acesso a objetos matemáticos requer necessariamente a utilização de registros de representação semiótica. Segundo este pesquisador, as representações semióticas são importantes não somente como um sistema de comunicação, mas também para organizar cognitivamente as informações a respeito do objeto matemático representado.

Para Duval (2006), há três tipos de atividades cognitivas: as atividades de *formação*, de tratamento e de conversão. A atividade de formação é aquela que tem por finalidade revelar uma representação mental ou evocar um objeto real. Já as atividades de tratamento e conversão prevêem transformações entre duas representações. Para o pesquisador, um registro de representação semiótica é um sistema que admite estas três atividades cognitivas.

Quando estas transformações são realizadas entre representações no interior de um mesmo registro, Duval (2003) as denomina de tratamentos. No entanto, quando as transformações são feitas entre representações provenientes de registros distintos, têm-se as conversões.

Exemplificando, tomando por base a resolução de uma equação polinomial de primeiro grau, a transformação $2x + 3 = 5 \Rightarrow 2x = 5 - 3$ constitui-se em uma operação entre representações no interior de um mesmo registro. No caso, é realizado um tratamento no registro simbólico-algébrico.

Já a atividade de conversão é considerada pelo autor como ponto forte de sua teoria, dado que uma aprendizagem centrada neste tipo de atividade constitui condição primordial para o acesso à compreensão matemática, promovendo o aumento da qualidade nas produções dos estudantes. Um exemplo de conversão pode ser ilustrado pela obtenção do gráfico de uma função polinomial de primeiro grau a partir de sua lei de formação.

No exemplo seguinte, apresenta-se uma conversão de uma representação do registro da língua natural para uma representação do registro gráfico.

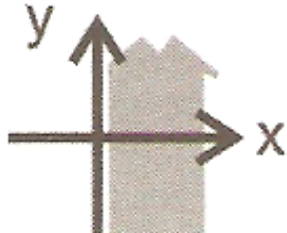
Registro da Língua Natural	Registro gráfico
Conjunto dos pontos do plano que têm abscissa positiva	

Figura 1. Exemplo de conversão - Adaptado de Duval (2009, p. 76).

Segundo Duval (2003), a atividade de conversão é classificada em congruente ou não congruente. Há congruência quando a transformação ocorrer de forma espontânea. Neste caso, três condições devem ser atendidas: correspondência semântica entre as unidades significantes que as constituem, uma mesma ordem possível de apreensão das unidades das duas representações e conversão de uma unidade significativa da representação de partida para uma unidade significativa correspondente no registro de chegada. Quando pelo menos uma dessas condições não acontecer, trata-se de uma conversão não-congruente.

A seguir, apresenta-se um exemplo clássico da análise da congruência desse tipo de transformação apresentado por Duval (2000).

Tipo de conversão	Registro da escrita natural	Registro simbólico- algébrico
Conversão congruente	Conjunto de pontos com ordenada maior que abscissa.	$y > x$
Conversão não congruente	Conjunto de pontos cujas ordenadas e abscissas têm o mesmo sinal.	$x, y > 0$

Quadro 1. Exemplo de análise da congruência da atividade de conversão

Fonte: DUVAL, 2000, p. 63

Duval (2006) afirma que a grande dificuldade dos estudantes reside nas conversões não-congruentes, o que foi constatado por vários pesquisadores, dentre eles Pavlopoulou (1993) e Karrer (2006). Na visão do autor, é necessário que o professor de Matemática proporcione aos estudantes situações que envolvam diferentes representações e conversões, promovendo um ambiente favorável para que o sujeito seja capaz de realizar transferências e atividades de reconhecimento de um objeto por meio de qualquer uma de suas representações.

Partindo do fato de que o estudo da Geometria Analítica requer frequentemente o estabelecimento de relações entre representações simbólicas e gráficas e, considerando que o *software Cabri 3D*, devido ao seu dinamismo, permite avaliar as propriedades com certo grau de generalidade, foram elaboradas situações que exploraram este tipo de transformação utilizando esse ambiente.

Foi adotada no presente estudo, tanto para a construção como para a condução do experimento de ensino, a metodologia de *Design Experiment* de Cobb et al. (2003), a qual objetiva promover um modelo que seja dinâmico e mutável, sendo possível remodelar as atividades frente à produção dos alunos. Isto faz com que ela tenha um caráter cíclico e iterativo, permitindo o *redesign*.

Será apresentada, a seguir, apenas uma pequena amostra de tarefas sobre propriedades de produto escalar, as quais envolveram conversões de representações do registro simbólico para o gráfico. Conforme já relatado, estas situações compuseram um experimento mais amplo, com nove atividades sobre vetores, produto escalar e produto vetorial entre vetores.

Será descrita a análise das produções apresentadas por dois estudantes voluntários do curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade privada de ensino do estado de São Paulo. No momento da aplicação do experimento, os sujeitos conheciam apenas o conteúdo introdutório de vetores, sem qualquer contato com os produtos entre vetores.

Neste caso, antes do trabalho no *Cabri 3D*, foram apresentadas as definições e os cálculos dos produtos escalar e vetorial. Posteriormente, as propriedades desses produtos foram exploradas com o uso dessa ferramenta. Como eles não conheciam o *software*, também foi realizada uma atividade preliminar envolvendo seus principais comandos.

Apresentação das tarefas

O quadro seguinte contém duas tarefas que solicitaram a interpretação de propriedades do produto escalar no ambiente *Cabri 3D*.

Considerando os vetores dados em relação ao sistema de coordenadas $S=(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, abra uma tela no *Cabri 3D* e interprete, neste ambiente, as seguintes propriedades:

Tarefa a) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}, \forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in R^3$ *Tarefa b)* $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2, \forall \vec{u} \in R^3$

Quadro 2. Tarefas sobre propriedades do produto escalar

O objetivo geral destas tarefas consistiu em explorar a interpretação de propriedades de produto escalar, utilizando um enfoque gráfico. Para resolver a *Tarefa a*, esperava-se do estudante a construção e a nomeação de três vetores no *Cabri 3D*. Em seguida, pretendia-se verificar se uma dada sentença fornecida no registro simbólico poderia ser interpretada no ambiente computacional, efetuando uma conversão não usual do registro simbólico para o gráfico e deste para o numérico.

Para investigar neste ambiente que $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ era válido para outros vetores diferentes dos inicialmente estabelecidos, esperava-se que os estudantes manipulassem as extremidades dos vetores, observando a manutenção da igualdade. Neste caso, eles fariam relações entre representações dos registros gráfico e numérico.

Na resolução da *Tarefa b*, esperava-se que o estudante determinasse o produto escalar $\vec{u} \cdot \vec{u}$ e o módulo de $\vec{u}$, utilizando para isto o comando “comprimento” do Cabri. Neste caso, ele faria conversões do registro simbólico para o gráfico e deste para o numérico.

Utilizando a calculadora do *software*, seria possível observar que $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2$. Novamente, utilizando o aspecto dinâmico da ferramenta, por meio da alteração da extremidade do vetor, observar-se-ia a manutenção da propriedade para diversos vetores.

Nestas situações, o *Cabri 3D* permitiria certo grau de generalidade, porém, para constatar que as propriedades eram válidas para $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in R^3$ na *Tarefa a* e $\forall \vec{u} \in R^3$ na *Tarefa b*, os estudantes foram solicitados a mostrar algebricamente as conclusões observadas experimentalmente.

Optou-se pela apresentação dos resultados de duas tarefas, porém houve outras situações de interpretação que promoveram resultados significativos, dentre elas a interpretação da propriedade $(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = |\vec{u}|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2, \forall \vec{u}, \vec{v} \in R^3$. Pretendia-se, com este tipo de tarefa, promover uma abordagem que desse significado a essas propriedades, por meio de sua interpretação gráfica. Eram esperadas dificuldades por parte dos estudantes nestas tarefas, uma vez que não é usual um trabalho envolvendo este tipo de conversão nos livros didáticos, conforme constatado por Karrer e Barreiro (2009).

Análise dos resultados

O experimento global foi aplicado em um laboratório de informática de uma Universidade Particular da cidade de São Paulo a dois alunos, os quais serão identificados neste texto por *Aluno A* e *Aluno B*. Foram coletados os seguintes instrumentos de análise: produções escritas dos estudantes, dados provenientes das capturas das telas dos computadores e a áudio-gravação das falas dos sujeitos e do professor-pesquisador. No momento da aplicação das tarefas apresentadas neste artigo, os alunos já conheciam o

conteúdo introdutório de vetores, já haviam realizado a familiarização no *software* e algumas atividades do produto escalar presentes no experimento.

Os sujeitos foram voluntários e participaram de uma familiarização com o *software* e de uma breve introdução ao conteúdo de produto escalar, antes do trabalho com as propriedades no *Cabri 3D*. A atividade foi desenvolvida em dupla e os alunos mostraram-se motivados com o trabalho neste ambiente. Nesta atividade em particular, o *Aluno B* manipulou o *software* e o *Aluno A* o auxiliou, porém, estes papéis foram freqüentemente trocados durante o experimento.

Na resolução da primeira tarefa, eles construíram dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ no plano de referência. Já o terceiro vetor, nomeado por $\vec{w}$, foi construído fora do plano de referência, por solicitação do *Aluno A*. O *Aluno B* teve dúvidas com relação à ordem da operação. O *Aluno A* afirmou que primeiro deveriam fazer $\vec{v} + \vec{w}$. Ao executar a tarefa, o *Aluno B* realizou o produto escalar dos vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$, obtendo assim um número. Ao notar que a dupla não havia observado o equívoco, em consonância com a metodologia adotada, o professor-pesquisador forneceu o seguinte questionamento: “O que ocorre quando somamos dois vetores?” Os sujeitos relataram que a soma daria um novo vetor. O professor-pesquisador solicitou aos alunos que verificassem o resultado obtido na tela. O *Aluno A* prontamente observou o equívoco e que era necessário solicitar primeiro a soma e não o produto escalar. Tal ocorrência denota uma nova forma de contato com o objeto matemático, uma vez que o aluno pôde estabelecer reflexões críticas sobre os resultados com base em aspectos visuais da construção realizada. O *Aluno B*, ao refazer a tarefa, cometeu um pequeno equívoco e, ao invés de construir $\vec{v} + \vec{w}$, clicou primeiro na extremidade do vetor $\vec{u}$ e em seguida na extremidade do vetor $\vec{v}$, obtendo a soma $\vec{u} + \vec{v}$. Sem necessidade de questionamento por parte do professor-pesquisador, a dupla notou, de forma independente, o equívoco cometido e refez corretamente sua construção, concluindo, para os vetores construídos, que $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$. A dupla alterou as extremidades dos vetores visando avaliar a generalidade da propriedade. Tal fato ocorreu sem qualquer indicação do professor-pesquisador, o que denota autonomia no uso da ferramenta.

Salienta-se que essa autonomia surgiu somente após o trabalho com atividades anteriores que compuseram o experimento global. Inicialmente, os estudantes requisitavam constantemente a presença do professor-pesquisador.

Notou-se que o caráter dinâmico do *Cabri 3D* permitiu aos alunos a observação de que os resultados encontrados se adaptavam ao movimento realizado no vetor, sendo a igualdade $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ sempre válida, independente das alterações realizadas. A dupla também tentou alterar o vetor $\vec{v} + \vec{w}$, mas notou que não era possível, uma vez que este vetor era um elemento dependente. Tal fato não gerou dúvidas, tendo em vista que a dupla já conhecia o funcionamento da versão *Cabri Plus*, que só admitia a manipulação de elementos independentes.

A figura seguinte ilustra a situação construída pelos estudantes.

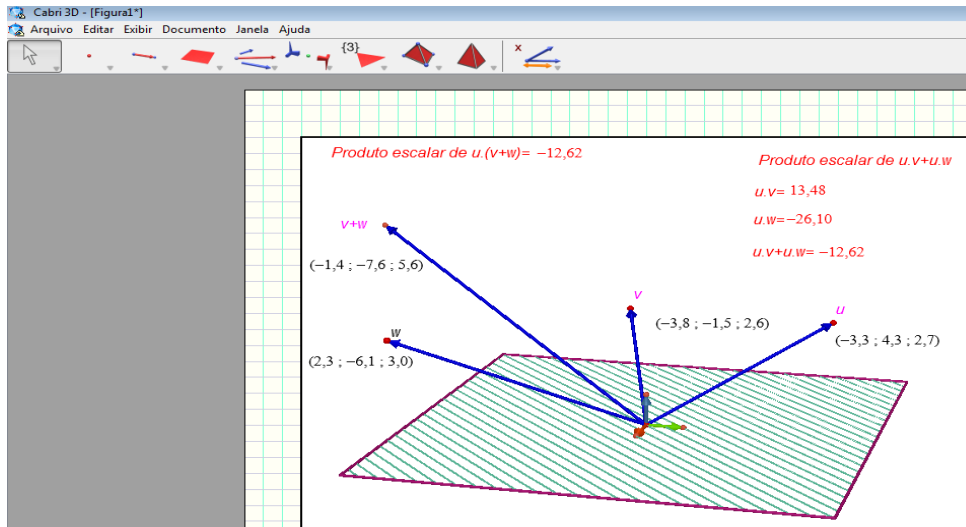


Figura 2. Interpretação da propriedade realizada pelos alunos no Cabri 3D

A figura seguinte ilustra uma das alterações realizadas pelos estudantes nas extremidades dos vetores, com a conseqüente adaptação dos resultados, graças ao aspecto dinâmico do *software*.

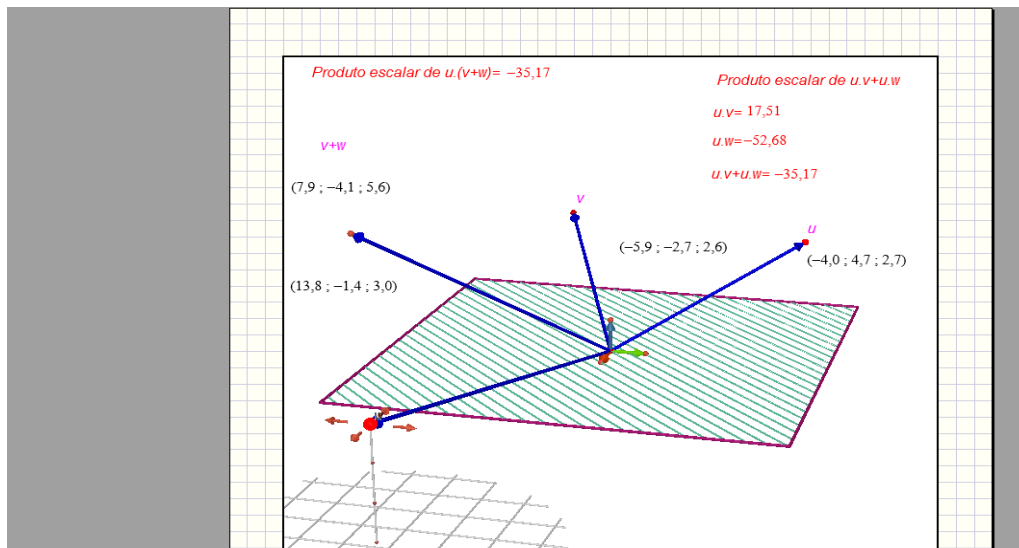


Figura 3. Manipulação realizada pelos alunos nos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$

Para realizar a *Tarefa b*, a dupla criou um vetor $\vec{u}$ em um novo arquivo com origem na origem do sistema e com a extremidade fora do plano de referência. O *Aluno B* começou a criação de um novo vetor quando foi alertado pelo *Aluno A* que teria que fazer o produto escalar do vetor com ele mesmo. Tal fato denota que o diálogo entre os membros da dupla favoreceu a resolução da tarefa. Para encontrar o módulo do vetor $\vec{u}$ os estudantes tiveram dificuldades. Eles não lembravam o significado do módulo de um vetor e buscaram, de forma independente, informações na atividade de familiarização. Com isso, notaram que se tratava do comprimento do vetor. A partir daí, com o auxílio da calculadora do *software*, os alunos relacionaram rapidamente que $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2$ e, alterando a extremidade do vetor, observaram certa generalidade da propriedade. Foi observado que o aspecto dinâmico do *software* contribuiu na verificação e na validação das propriedades apresentadas.

Os estudantes apresentaram dificuldades na análise algébrica das propriedades, apesar de compreendê-las. Problemas nos tratamentos de representações do registro simbólico-algébrico foram freqüentes e, nestas situações, foi necessária uma maior interferência do professor-pesquisador.

Conclusão

Com a apresentação dessas tarefas específicas de produto escalar, buscou-se apresentar neste artigo parte de um experimento de ensino sobre vetores, o qual representou uma abordagem diferenciada da usualmente proposta em sala de aula sobre esse conteúdo. Isto porque houve a preocupação de explorar a relação entre representações de diversos registros, com a integração de um recurso de geometria dinâmica, possibilitando um trabalho com conversões nas quais os estudantes apresentaram dificuldades, conforme destacado pelas pesquisas de Pavloupoulou (1993) e Karrer (2006). Ainda, procurou-se integrar efetivamente o registro gráfico na proposta, uma vez que se constatou uma reduzida exploração do mesmo nos livros didáticos, conforme apontado por Karrer e Barreiro (2009) e Karrer, Baggi e Candido (2010). Além de favorecer uma apreensão significativa do conteúdo proposto, a ferramenta adotada permitiu um contato diferenciado com o objeto matemático “produto escalar”, pois possibilitou aos estudantes a verificação, a validação e certo grau de generalização de propriedades, ainda que experimental.

As conseqüências dos movimentos realizados nas extremidades dos vetores eram observadas e discutidas pelos estudantes, gerando conjecturas que poderiam ser experimentalmente testadas. Desta forma, em consonância com as pesquisas de Balacheff e Kaput (1996), Noss e Hoyles (1996, 2009) e Hoyles e Noss (2003) o experimento elaborado representou um ambiente favorável para acessar o objeto matemático de uma forma não usual, permitindo, conseqüentemente, reflexões diferenciadas das comumente realizadas no ensino deste tópico. Ainda, ele permitiu que os estudantes avaliassem suas produções de forma independente, sendo necessárias apenas intervenções pontuais do professor-pesquisador.

Apesar de os estudantes compreenderem o significado das propriedades presentes nestas tarefas, quando solicitados a avaliar a generalidade das mesmas, eles apresentaram muita dificuldade nos tratamentos de representações no registro simbólico-algébrico.

Tal estudo, ainda que pontual, revelou a importância de um trabalho de experimentação favorecido por um software de geometria dinâmica, o qual permitiu relacionar representações gráficas, numéricas e simbólicas, gerando um novo significado às propriedades apresentadas.

Referências

- Balacheff, N.; Kaput, J.J. (1996). Computer-Based Learning Environments in Mathematics. *International Handbook in Mathematics Education*. London: Kluwer, 469-501.
- Bittar, M. (1998). *Les vecteurs dans l'enseignement secondaire*. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Universidade Joseph Fourier Grenoble I, França.

- Celestino, M. R. (2000). *Ensino-Aprendizagem da Álgebra Linear: as pesquisas brasileiras na década de 90*. São Paulo. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.
- Cobb, P.; Confrey, J.; Disessa, A.; Lehrer, R.; Schauble, L. (2003). Design experiments in education research. *Educational Researcher*, Washington, 1, 9-13.
- Duval, R. Basic Issues for Research in Mathematics Education. (2000). In: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 24, 2000, Hiroshima. *Proceedings of the 24th PME*, 1, 55-69.
- Duval, R. (2003). Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). *Aprendizagem em Matemática: Registros de representação semiótica*. Campinas: Papirus, 11-33.
- Duval, R. (2006). A cognitive analysys of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, Springer, 61, 103-131.
- Duval, R. (2009). *Semiósis e Pensamento Humano: registros semióticos e aprendizagens intelectuais*. São Paulo: Livraria da Física.
- Hoyles, C; Noss, R. (2003). What can digital technologies take from and bring to research in mathematics education? *Second International Handbook of Mathematics Education*, Dordrecht. Disponível em: <<http://www.lkl.ac.uk/rnoss/papers/WhatCanDigitalTechnologies.pdf> >. Acesso em: 02 ago. 2010.
- Karrer, M. (2006). *Articulação entre Álgebra Linear e Geometria: um estudo sobre as transformações lineares na perspectiva dos registros de representação semiótica*. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.
- Karrer, M.; Barreiro, S.N.(2009). Introdução ao estudo de vetores: análise de dois livros didáticos sob a ótica da teoria dos registros de representação semiótica. In: IV ENCONTRO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DE OURO PRETO, 1, 2009, Ouro Preto. *Anais do IV Encontro de Educação Matemática de Ouro Preto*. Ouro Preto: UFOP, 1, 484-507.
- Karrer, M.; Baggi, B.; Candido, A.S. (2010). Produto de vetores no R^3 : um estudo baseado na teoria dos registros de representação semiótica. In: X ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 1., 2010, Salvador. *Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática*. Salvador: SBEM, 2010. 1 CD-ROM.
- Noss, R.; Hoyles, C. (1996). *Windows on Mathematical Meanings: Learning Culture and Computers*, v. 17, Mathematics Education Library.
- Noss, R.; Hoyles, C. (2009). The technological mediation of Mathematics and its learning. *Human Development: giving meaning to Mathematical signs: Psychological, Pedagogical and Cultural Processes*, Basel, v. 52, 2, 129-147.
- Pavlopoulou, K. (1993). Un problème décisif pour l'apprentissage de l'algèbre linéaire: la coordination des registres de représentation. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, Strasbourg, v.1, 5, 67-93.