



## **Resolviendo problemas de multiplicación con el cilindro Rubik, hacia la caracterización de esta operación como un producto cartesiano**

Cindy Catalina **Cristancho** Castiblanco  
Universidad Distrital Francisco José de Caldas  
Proyecto curricular de Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas  
Colombia.

[cata\\_pila@hotmail.com](mailto:cata_pila@hotmail.com)

Miguel Andrés **Gutiérrez** Vargas  
Universidad Distrital Francisco José de Caldas  
Proyecto curricular de Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas  
Colombia.

[filosofoloco07@hotmail.com](mailto:filosofoloco07@hotmail.com)

### **Resumen**

En el proceso de formación como futuros educadores matemáticos del proyecto curricular L.E.B.E.M de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas de Bogotá, se desarrollan acciones tendientes a la creación y aplicación de secuencias de actividades en colegios estatales. Se expondrá una experiencia de aula en el grado cuarto de primaria, en el cual se trabajó el concepto multiplicación interpretado como un producto cartesiano. La metodología de la secuencia fue la resolución de problemas, donde se propusieron situaciones fundamentales de acuerdo al contexto sociocultural, estas implementadas con un dispositivo didáctico llamado cilindro de Rubik; aquí surgieron diversos sistemas de representación de la multiplicación utilizados como herramienta para la resolución de las actividades y la construcción de significados. Se desarrollaron principalmente habilidades argumentativas en la resolución, sustentación y explicación de sus acciones, a partir del tránsito por los diferentes tipos de representación y la manipulación del dispositivo didáctico.

*Palabras clave:* resolución de problemas, dispositivo didáctico, sistemas de representación, didáctica, secuencia de actividades.

### **Introducción**

*XIII CIAEM-IACME, Recife, Brasil, 2011.*

Como parte del desarrollo de la asignatura práctica intermedia IV del proyecto curricular Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas (L.E.B.E.M.) de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, y una de las actividades propias de formación llevadas a cabo en este espacio, se realizó una secuencia de actividades para la enseñanza y el aprendizaje de la multiplicación como producto cartesiano para estudiantes de grado cuarto del Colegio Reino de Holanda en Bogotá, Colombia. Para ello se creó un equipo de trabajo conformado por dos estudiantes de la asignatura y el docente titular de matemáticas en este grado, con el fin de generar situaciones problema que estuviesen cercanas al contexto de las estudiantes; es decir, para el diseño de esta propuesta se tuvo en cuenta que el contexto socio – cultural al cual pertenecen las estudiantes determina sus formas de actuar y de afrontar la matemática como una herramienta útil para la solución de problemas no sólo en el contexto académico, sino como auxiliar para la vida.

De acuerdo a esta percepción se elaboró y ejecutó una secuencia de actividades que vinculaba situaciones problema contextualizadas de acuerdo a características observadas en el reconocimiento realizado a las estudiantes; es decir, las situaciones poseen un carácter cercano a la población. En este tipo de problemas primaron los procesos de creación, exploración, interpretación y sobre todo representación, con el fin de establecer una caracterización de la multiplicación diferente a la de suma reiterada. Es importante mencionar que además de las situaciones planteadas se elaboró un instrumento (dispositivo didáctico) que permitió consolidar la interpretación de la multiplicación como producto cartesiano a partir de su manipulación.

La estructura de este trabajo se basó en la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau, dando gran importancia a las situaciones problema y ubicándolas como eje central de interacción entre el saber y los estudiantes, orientada por la gestión de los docentes. Por otro lado, debido a que el conocimiento matemático incluye tanto conceptos como sistemas de representación simbólica y procedimientos de desarrollo y validación de nuevas ideas matemáticas, fue preciso contemplar en la secuencia varios tipos de situaciones: de acción, formulación, validación e institucionalización.

De la ejecución y análisis de las actividades se destacaron algunos aspectos en cuanto a las cualidades, ventajas y desventajas del dispositivo utilizado y la relación de este con los diversos tipos de representación que surgieron en el proceso de resolución de las situaciones problema llevado a cabo por las estudiantes; finalmente la utilidad de caracterizar de esta manera la multiplicación en la formación en matemáticas del grupo.

### **Descripción de la experiencia**

La experiencia de aula fue realizada como una de las actividades propias del proyecto curricular L.E.B.E.M de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, el cual busca contribuir a la formación de docentes comprometidos con la construcción y producción de conocimientos en la pedagogía como disciplina fundante, en los saberes disciplinares y de referencia y con el estudio, transformación e innovación de las prácticas educativas y pedagógicas, (que asume su función docente y profesional como una acción social y cultural, cuyo ejercicio requiere de acciones- reflexiones, un saber, unas competencias específicas); además, pretende que estos maestros puedan establecer a partir de sus prácticas docentes procesos de investigación e innovación que incidan en las comunidades donde se desarrollan.

Es así como en el espacio de formación práctica intermedia IV, ubicado en el semestre sexto de la licenciatura y luego de tres experiencias de aula anteriores, se proponen e implementan secuencias de actividades estructuradas en las ideas de Brousseau, específicamente en la teoría de las situaciones didácticas y la resolución de problemas como metodología de clase

(las cuales se profundizarán más adelante). Estas secuencias se aplican en colegios estatales, donde a partir del reconocimiento de las características sociales de los grupos de estudiantes se plantean situaciones problema, que a su vez sean coherentes con el concepto matemático que se pretende construir.

De acuerdo a lo anterior, se realizó en primera instancia una actividad de reconocimiento y una de diagnóstico, las cuales permitieron conocer tanto las relaciones sociales dadas en el aula como las concepciones previas sobre la temática a trabajar; éstas, con el fin de orientar y estructurar la secuencia de acuerdo a las características culturales y cognitivas de este grupo específico (grado 403). A continuación mostraremos algunas de las características relevantes de la población para el proceso de elaboración de la propuesta.

### **Descripción general de la población**

El Colegio Reino de Holanda se encuentra ubicado en la localidad Rafael Uribe de Bogotá, Colombia. El curso correspondiente para la realización de esta secuencia de actividades fue el cuarto grado de primaria, conformado por 31 estudiantes. Dado que en el curso solo hay niñas, se pueden destacar las siguientes características:

**Sociales:** Las edades oscilan entre 10 y 11 años, el estrato socioeconómico está entre 1 y 2, buen trato tanto con los docentes como con sus pares académicos, el trabajo en grupo es mejor que el trabajo individual, pero los dos permiten el desarrollo de las diversas actividades.

**Académicas:** Orden y estética en la presentación de los trabajos escritos, el nivel de comprensión en temas matemáticos es bueno, los aportes matemáticos en las socializaciones son de gran importancia para la construcción de los significados del grupo.

**Descripción de tiempos y espacios:** Durante la práctica se contó con 9 sesiones de clase en el periodo académico 2009-2 (segundo semestre del año), las primeras 6 se realizaban en el transcurso de 1 bloque o 90 minutos y las últimas en 45 minutos. La totalidad de clases se desarrolló dentro del aula de manera individual o grupal, de acuerdo a los objetivos y criterios de cada actividad.

Luego de la ejecución de las actividades de reconocimiento y diagnóstico, se realizó una posterior revisión teórica, buscando suplir tres necesidades del proceso de construcción de la secuencia: el primero referido a la construcción matemática del concepto, el segundo a las interpretaciones establecidas desde la didáctica y el tercero referido a la metodología y a la teoría de las situaciones didácticas; esto con el fin de puntualizar las acciones de intervención en los procesos de enseñanza y aprendizaje. A continuación se expondrán aspectos relevantes de cada uno de los anteriores ítems:

### **Referentes teóricos**

#### **Referente matemático**

**Concepto matemático desde teoría de conjuntos.** Para el desarrollo de la secuencia de actividades se tuvo en cuenta el producto usual en el conjunto de los números naturales  $(\mathbb{N}, \cdot)$ ; con el fin de garantizar que la operación está bien definida en este conjunto, se debe probar:  $\cdot$  es función en los naturales y  $\cdot$  es cerrada en lo naturales.

#### **Referentes didácticos**

**Producto de medidas (función bilineal).** El concepto matemático multiplicación se define a partir de la teoría de conjuntos, mediante el producto cartesiano. Si se consideran los números a

y b como cardinales de los conjuntos A y B, respectivamente, la multiplicación de a por b se define como el cardinal del producto cartesiano de los conjuntos A y B. Naturalmente, este proceso se hace impracticable en el aula dado que el docente, basándose en los conocimientos previos del alumno suele fundamentar la multiplicación en la suma iterada; donde el principal problema está en que la definición matemática y la práctica van por caminos diferentes, lo que conlleva a conflictos cognitivos.

En este caso, se pueden identificar tres espacios de medida, por ejemplo el siguiente enunciado: “en un baile hay 3 niños y 5 niñas ¿Cuántas parejas distintas se pueden formar?”. Se puede identificar los espacios de medida niños, niñas y parejas, que se vería como  $m_1 * m_2 \rightarrow m_3$ ; lo cual no es un operador escalar ni un operador función, más bien expresa una relación funcional doble entre cada espacio de medida del primer miembro con el del segundo. De ahí que corresponda, más exactamente, a una función bidimensional.

La característica importante de este tipo de problemas multiplicativos es el hecho de que, al no ser resolubles por la suma iterada, no otorgan distinto papel a los dos factores en juego. Si el isomorfismo es una operación asimétrica, en este caso la multiplicación resulta ser simétrica.

Por otra parte, se tuvo en cuenta los modelos intuitivos que tienen los estudiantes y que aparecen cuando se presentan tareas relacionadas con la resolución de problemas referidos a la estructura multiplicativa, como son: la multiplicación da un resultado mayor que cualquiera de los dos factores, la división produce un número (el cociente) menor que el dividendo y la división solo es posible si el dividendo es mayor que el divisor.

**Marco legal.** De acuerdo a los Estándares Curriculares de Matemáticas para grado cuarto en el pensamiento numérico y sistemas numéricos, se tomaron aquellos objetivos que enmarcaran las acciones y decisiones para la secuencia de actividades: “*Resuelvo y formulo problemas cuya estrategia de solución requiera de las relaciones y propiedades de los números naturales y sus operaciones*” y “*Uso diversas estrategias de cálculo y de estimación para resolver problemas en situaciones aditivas y multiplicativas*” (MEN, 2006).

## Referentes metodológicos

**Fundamento en el enfoque de las Situaciones Didácticas (TSD).** La Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) fue propuesta por Brousseau quien se dio cuenta de la necesidad de crear un modelo práctico para la actividad matemática; cuando ésta es escolar se presenta la necesidad de modelizar la noción o el concepto a enseñar a través de la situación fundamental; la cual es un conjunto de situaciones específicas de conocimiento que generan un campo de problemas, estas situaciones llegan a ser situaciones a-didácticas, por lo tanto es importante recordar que la didáctica fundamental de acuerdo a Godino (2006) “tiene en cuenta la evolución del individuo que gestiona un saber matemático concreto en un “medio” específico, de forma que dichas evoluciones son irreductibles al comportamiento psicológico del sujeto”

Al hacer uso de la teoría de las situaciones didácticas es relevante diferenciar entre saber y conocimiento, debido a que Brousseau (1986) expresa que el saber es “una asociación entre buenas preguntas y buenas respuestas” y comenta que el conocimiento es la representación interna o la “expresión de modelos implícitos”

El proceso de aprendizaje en la teoría de situaciones didácticas se presenta en cuatro situaciones diferentes, las cuales son:

- **Las situaciones de acción:** Los estudiantes deben tomar decisiones que les permitan organizar su actividad de resolución del problema planteado.
- **Las situaciones de formulación:** Su objetivo es que los estudiantes comuniquen e intercambien ideas, esta fase permite que el estudiante modifique su lenguaje usual al precisar el conocimiento que desea transmitir.
- **Las situaciones de validación:** El fin es tratar de convencer a los demás acerca de los planteamientos y la validez de los mismos para dar respuesta a la situación planteada, en esta fase los estudiantes explican y demuestran que sus afirmaciones son correctas aunque el docente rechazará una justificación que él considere es falsa probándolo.
- **Las situaciones de institucionalización:** Se reconoce de manera grupal el conocimiento que se ha adquirido.

Dado que esta secuencia de actividades está basada en la resolución de problemas se tuvo en cuenta lo planteado por los Estándares Curriculares, donde se muestran algunas características de las competencias en matemáticas, a continuación mostraremos los cinco procesos generales de la actividad matemática: formulación, tratamiento y resolución de problemas, modelación, comunicación, razonamiento, formulación, comparación y ejercitación de procedimientos.

Además, es importante mencionar que para el desarrollo de la secuencia se retomó las ideas expuestas por Brousseau en cuanto a situación didáctica y situación a-didáctica, distinguiéndolas como: La situación didáctica es una situación construida intencionalmente con el fin de hacer adquirir a los alumnos un saber determinado y el término de situación a-didáctica designa toda situación que, por una parte no puede ser dominada de manera conveniente sin la puesta en práctica de los conocimientos o del saber que se pretende y que, por la otra, sanciona las decisiones que toma el alumno (buenas o malas) sin intervención del maestro en lo concerniente al saber que se pone en juego.

Para finalizar, en la planeación de esta secuencia de actividades se diseñaron actividades tendientes a la aparición de los diversos sistemas de representación de una situación multiplicativa, pues los diferentes tipos de representaciones (numérico, tabular, gráfico, algebraico, verbal) dan al objeto matemático un sentido, permitiendo que el estudiante tenga una mayor comprensión acerca del concepto que está trabajando; de forma que:

- “Cree y use representaciones para organizar, memorizar y comunicar ideas matemáticas.
- Desarrolle un repertorio de representaciones matemáticas que puedan usarse de forma útil, flexible y apropiada.
- Use representaciones para modelizar e interpretar fenómenos físicos, sociales y matemáticos”. (NCTM, 2000).

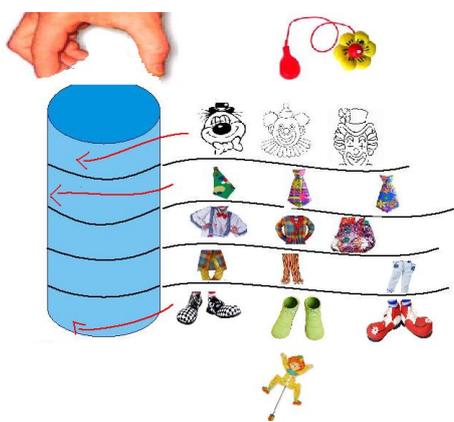
### **Material didáctico**

Como un instrumento de respaldo a las diversas situaciones problema que se plantearon en esta secuencia de actividades, se diseñó un material didáctico llamado cilindro de Rubik, el cual fue elaborado con la ayuda de las estudiantes en una de las actividades, eso con el fin de hacer un reconocimiento del mismo y de familiarizar a las estudiantes con el manejo y reglas de uso.

Este material consta de un cilindro el cual cumple la función de base, alrededor de este se encuentran una serie de anillos los cuales giran alrededor del cilindro y están ubicados en un orden específico, este orden está dado por los elementos del vestuario de un personaje (en este

caso un payaso); el cilindro tiene una marca que hace las veces de referencia o centro, esta para que las estudiantes puedan llevar un orden en la construcción de las diversas pintas (vestuario completo del personaje). Los anillos giran en cualquier sentido y en forma individual, de tal forma que los estudiantes pueden dejar de base gran parte del vestuario e ir intercambiando un solo elemento, lo cual facilita el registro de las combinaciones creadas.

Este material fue utilizado en las actividades referidas a la primera situación fundamental, desde la construcción, manipulación y registro de los cambios; esto dirigió las ideas de las estudiantes a la construcción de la interpretación de la multiplicación como un producto cartesiano; además de propiciar diversas representaciones de cada situación en los procesos de resolución tanto individual como grupal. A continuación se mostrará una imagen (gráfico 1) donde se puede ver la representación del material didáctico diseñado.



*Figura 1.* Cilindro Rubik. Gráfico del material didáctico diseñado para la ejecución de la secuencia de actividades.

### **Secuencia de actividades**

Luego de la revisión teórica se llevó a cabo la construcción de la secuencia de actividades, en esta se tuvo en cuenta una situación fundamental, dos situaciones didácticas y cada una de ellas con sus respectivas situaciones a-didácticas; a continuación se mostrarán algunos de los elementos tenidos en cuenta en cada una de la actividades, la descripción de las mismas, además de los resultados y análisis obtenidos tras su aplicación.

#### **Situación didáctica N°1 (sesiones 1 a 5)**

En el parque de diversiones Diver Holanda hay un grupo de payasos que cuentan con ciertos accesorios para formar vestuarios diferentes para cada día. Ayúdale a tu payaso a solucionar los problemas que se le presenten con las pintas que usará.

**Descripción sesión 1: Diagnóstico y Situación a-didáctica 1 – Acción.** Para el reconocimiento del material a cada niña se le entregó una plantilla con la silueta del vestuario del payaso, el cual colorearon; posteriormente diseñaron una pinta, siguiendo el enunciado:

“Se ha decidido llevar a la lavandería todos los implementos, pero para el día sábado tan solo estarán listos: el sombrero de piñata, la peluca crespada, el sombrero de viejito, la nariz redonda, el corbatín de rayas, el pantalón de corazones, la pantaloneta y los zapatos puntiados. Forma una pinta para el día sábado y ponle un nombre”.

**Estrategias y análisis** En cuanto a la utilización de la suma reiterada se encontró que a pesar de que las estudiantes en la mayoría de los casos establecieron los parámetros de la suma y los representan gráficamente, no logran dar una respuesta; algunas de ellas realizaban de forma adecuada las agrupaciones pero el resultado de la suma no es correcto; esto por fallos en la comprensión del sistema decimal, al sobrepasar la centena suelen confundir la decena con la unidad (al sumar 120, obtuvieron 102). Por otra parte, al realizar la notación de la adición (algoritmo) se presentó el error de utilizar como sumando la respuesta inmediatamente anterior ( $20+40+60+\dots+140=160$ ), esto evidencia que las estudiantes realizaban los cálculos mentalmente, obteniendo sumas acumuladas y una respuesta correcta, pero la representación numérica fue confusa. Otra estrategia para llegar a la respuesta fue el conteo de uno en uno, de tres en tres, de veinte en veinte (dependiendo el caso) y este está apoyado en la representación gráfica. En cuanto a las estrategias referidas a la interpretación de la multiplicación como producto cartesiano, se encontró que las estudiantes buscaron establecer los factores con los cuales pueden obtener el valor del producto, para esto crearon nuevos accesorios; la dificultad en este punto se generó al realizar las combinaciones, puesto que en ciertos casos dejaron de lado algunos de los elementos o no tienen un orden para realizarlas, este hecho es un punto de partida para el proceso de resolución, ya que se partió de las ideas intuitivas de las estudiantes y luego del trabajo como resolutores, se llegó a diversos sistemas de representación (visualización) tanto del producto cartesiano como de la suma reiterada y el establecimiento de redes conceptuales que permitieron el tránsito por estos sistemas de representación, como se evidenciará más adelante.

**Logros y fracasos.** Estas actividades permitieron confirmar las ventajas del uso de un material concreto en el aula de clase. Específicamente, el dispositivo didáctico diseñado cilindro Rubik, que permitió la identificación de posibles combinaciones a partir de la rotación de vestuarios; esto motivó enormemente a las estudiantes, las dispuso para el trabajo como resolutores de las diversas situaciones durante la secuencia y les generó expectativas respecto al funcionamiento y utilidad del material. La gran cualidad de este recurso es la visualización de las combinaciones que permitieron la posterior comprensión de la multiplicación como producto cartesiano a partir de la generación de sistemas de representación. Ya que esta actividad buscaba ubicar el estado o nivel de comprensión en el que se encontraban las estudiantes con respecto al objeto matemático, se puede afirmar que los resultados encontrados fueron el soporte y base para el desarrollo y construcción de las siguientes actividades.

**Descripción sesión 2: Situación a-didáctica 2 – Acción.** Para esta actividad se preguntó: ¿Cuántas pintas diferentes tendría el payaso para ponerse el día sábado? ¿Cuántas pintas diferentes ha dejado el payaso en la lavandería? Esto con el objetivo de generar en las estudiantes la necesidad de realizar las combinaciones que permitan dar respuesta a cada situación

**Estrategias y análisis.** Algunas de las estrategias encontradas fueron: realiza lista de manera ordenada, realiza dibujo, realiza lista y dibujo, multiplica numéricamente (una estudiante).

Se pudo reconocer la reversibilidad, entendida como una capacidad propia del pensamiento operatorio, donde es posible seguir las transformaciones sucesivas de la realidad a través de todos los caminos posibles, y en vez de proceder de un punto de vista único, llegar a coordinar los diferentes puntos de vista, lo cual supone poder desenvolverse de manera reversible por inversión o reciprocidad; pues al plantearle a las estudiantes la restricción del problema (implementos en la lavandería) lograron establecer la lista de los implementos permitidos y sus combinaciones. Este hecho se convirtió en uno de los argumentos para validar el resultado

obtenido después de realizar los procedimientos, esto evidente en la afirmación de una de las estudiantes: “se pueden realizar más pintas pero con los implementos que están en la lavandería”

La estrategia más usual fue el diseño del dibujo (a pesar de tener el material), esto se presentó por la preferencia de las estudiantes de crear y diseñar pintas; mientras que en la segunda situación al tratarse de diseñar más de un vestuario las estudiantes decidieron realizar listas, pues es una estrategia de resolución más efectiva y rápida.

Para la solución del problema solo una estudiante empleó como estrategia la representación numérica de la multiplicación, además del dibujo y las listas. Esto nos indica la comprensión del producto cartesiano y su capacidad para adaptarlo a diversas representaciones.

**Logros y fracasos.** Se realizó una socialización donde se identificó las estrategias de las estudiantes para la resolución de la primera situación problema, de esta surgieron hechos importantes como: de los argumentos de las estudiantes se lograron establecer dos reglas generales para la actividad, el primero “para que dos pintas sean diferentes deben tener por lo menos un accesorio distinto” y “para considerar una combinación como pinta, debe contener la totalidad de accesorios”, premisas relacionadas directamente con la comprensión del producto cartesiano. Esta actividad además permitió la confrontación de estrategias entre pares académicos a través de argumentos, la intervención de los docentes se centró en la regulación de este debate lo cual fortalece el proceso de resolución de problemas causando apropiación de las acciones y decisiones.

**Descripción sesión 3: Situación a-didáctica 3 y 4 - Formulación – Validación.** Se pidió a las niñas que le ayudaran al payaso a organizar la totalidad de los vestuarios diferentes que puede formar con los sombreros y las narices que tiene disponibles. Se pidió que lo realizaran apoyadas en el material y que lo plasmaran de alguna manera diferente al dibujo de los accesorios. Entonces se indica: El payaso ha decidido usar su corbata y su pantalón de corazones, pero aún no decide que peluca y nariz usará este día, muéstrale al payaso qué opciones tiene; y, el jefe de los payasos está molesto con ellos porque son muy desordenados, como castigo les ha pedido que le muestren cuántas pintas diferentes tienen. Ayúdale al payaso a organizar todas las pintas.

Los objetivos de estas situaciones se centraron en representar la multiplicación que genera este tipo de combinaciones, de manera que se propicie una primera comprensión frente a una interpretación de producto cartesiano y modificar y/o mejorar el sistema de representación diseñado anteriormente, de manera que se visualicen todas las combinaciones posibles.

**Estrategias y análisis.** Se fortalece el proceso de resolución de problemas a partir de la optimización de las estrategias y la manipulación más ágil del material, ya que por ejemplo en la construcción de listas se pasó de no tener en cuenta el orden, a establecer estrategias de registro más eficaces como realizar las listas ordenadas que a su vez generaron subgrupos de listas, estos con características como compartir un mismo accesorio; este hecho permitió la visualización del concepto de combinación al tiempo que posibilitó el análisis de la situación tendiente a establecer la interpretación de la multiplicación como producto cartesiano. Se consideró importante para el análisis didáctico identificar la estrategia usada por las estudiantes, para establecer un abanico de posibles estrategias de solución que dieran cuenta de las representaciones del producto cartesiano.

**Logros y fracasos.** Hasta entonces no se logró que las estudiantes utilizaran una estrategia más eficaz para resolver las situaciones; a pesar de presentarles situaciones a-didácticas donde el número de combinaciones a realizar es alto; sin embargo la orientación docente permitió la consolidación de listas ordenadas.

**Descripción sesión 4: Situación a-didáctica 5 - Validación – Institucionalización.** El mago de Diver Holanda ha dicho, si eres payaso y has olvidado tu sombrero de abuelo tendrás para cambiarte 55 pintas. ¿El mago tiene razón?; el objetivo de esta es utilizar una estrategia para validar el modelo ya establecido.

**Estrategias y análisis.** Las estrategias empleadas fueron: realiza lista empleando las iniciales de los objetos de manera ordenada, empleo de símbolos (dibujos del accesorio) de manera ordenada, empleo de símbolos de manera desordenada y construcción de diagrama de árbol con las iniciales de cada palabra. Al presentarse la construcción del diagrama de árbol como la estrategia más utilizada, se reconoció un hecho relevante como es el aporte de esta representación en la construcción de significados ya que permite visualizar de una manera diferente las combinaciones (producto) y las magnitudes.

**Logros y fracasos.** La situación a-didáctica toma sentido en la medida que al generar una cantidad grande de pintas, permitió que las niñas recurrieran al diagrama de árbol como estrategia óptima de validación.

En la socialización final además de evidenciarse los errores, aciertos y variantes de las estrategias, las estudiantes reconocieron la importancia de llevar un orden en la representación usada, ya que fue evidente que la mayoría no lo contemplaba.

**Descripción sesión 5: Situación a-didáctica 7 - Formulación.** Si contratan 1, 7, 10 y 21 payasos ¿Cuántas pintas les corresponden? El objetivo es generar un primer acercamiento a la idea de división basada en la partición de cantidades discretas iguales.

**Estrategias y análisis.** Al no comprender de la tarea, las estudiantes optaron por estrategias que no daban solución al problema, entre ellas: arma pintas y las representa con listas, completa pintas comprando accesorios, realiza una resta, realiza división o representa a través de diagrama con flechas

**Logros y fracasos.** No se completó la actividad porque la sesión se centro principalmente en la explicación de la tarea propuesta. Esto causó estrategias de intervención de los docentes; entonces se reorientó la secuencia y se planearon situaciones contextualizadas de acuerdo a aspectos del grupo.

### **Situación didáctica N°2 (sesiones 6 y 7)**

En una fiesta hay niños y niñas que quieren bailar. Cada niño quiere bailar con cada niña y cada niña con cada niño.

**Descripción sesión 6: Situación a-didáctica 1 - Acción – Formulación.** Tres niños y seis niñas quieren bailar. Cada niño quiere bailar con cada niña y cada niña con cada niño. ¿Cuántas parejas posibles hay? ¿Cómo mostrarías las parejas que se pueden conformar? El objetivo de esta actividad es posibilitar la utilización de diversas estrategias para resolver situaciones multiplicativas y la comparación entre ellas.

**Estrategias y análisis.** Las estrategias utilizadas fueron: diagrama de árbol, suma reiterada, diagrama de flechas, multiplicación y conteo. Además de la estrategia utilizada, algunas niñas justifican de manera verbal describiendo el algoritmo y su funcionalidad; esto evidencia una comprensión de sus acciones o procedimientos. Por otra parte apareció el algoritmo del producto, este utilizado para comprobar resultados obtenidos en el diagrama de árbol o de flechas; en este punto algunas estudiantes establecen correlaciones de dos tipos: situaciones - concepto (multiplicación) y entre tipos de representación lo cual hace evidente la aparición del proceso de comparación.

Las estudiantes que optaron por el diagrama de árbol tomaron como referencia al niño, etiquetado de diferentes formas: nombres propios, letra inicial o sustantivo común acompañado

*Resolviendo problemas de multiplicación con el cilindro Rubik, hacia la caracterización de esta 10 operación como un producto cartesiano.*

con un número que denota orden; esto debido a: el cardinal de los niños era más pequeño, por tanto el número de diagramas de árbol es menor; además el entorno sociocultural de las estudiantes tiene tendencia machista, por tanto se da prioridad al niño en la representación.

En el material la disposición de las figuras en forma horizontal generó la aparición de una nueva estrategia: el diagrama de flechas; en este para dar respuesta a la situación las estudiantes realizaban un conteo de las líneas (flechas) que salían de cada imagen.

**Logros y fracasos.** La actividad permitió que las estudiantes mostraran diversas estrategias para resolver el mismo problema y las compararan. Además de utilizar sistemas de representación, algunas estudiantes lograron justificar y/o relacionarlos con la multiplicación numérica (algoritmo), puesto que se caracterizó las situaciones a-didácticas como problemas de multiplicación.

**Descripción sesión 7: Situación a-didáctica 2 - Institucionalización - Validación.** Se realizó una socialización exponiendo las diversas representaciones empleadas y se presentó el plano cartesiano; en esta socialización se establecieron las ventajas y desventajas de cada una de ellas. Se buscó elegir el sistema de representación óptimo para dar respuesta a las situaciones problema.

**Estrategias y análisis.** Esta situación didáctica buscó el desarrollo de competencias comunicativas, las estrategias identificadas fueron: expone la representación utilizada y cómo se desarrolla según la situación; expone la representación y la traslada a situaciones diferentes, solo da ejemplos de algunas representaciones; y, logra relacionar varias representaciones identificando factores comunes.

Un hecho relevante de esta actividad fue el establecimiento de relaciones entre estrategias; es decir, representaciones diferentes en una misma situación llegan a resultados idénticos ya que siempre se tienen en cuenta todas las combinaciones, esto analizado desde las ideas de Duval (1999) se entiende como mayor comprensión y estructuración de un sistema cognitivo del concepto. Por otra parte los procesos de validación de resultados se centraron en las estrategias de solución (obtención de combinaciones) y en la ejemplificación con situaciones similares.

**Logros y fracasos.** La metodología empleada para la institucionalización permitió la participación, el avance grupal y la construcción colectiva, a partir de los aportes de las estudiantes a cada uno de los debates; además, la orientación de los docentes permitió compilar las diversas estrategias propuestas durante la secuencia y reconocer fortalezas y debilidades de las mismas.

### **Situación didáctica de evaluación**

Para el día de amor y amistad en el colegio Reino de Holanda los profesores de los cursos 402 y 403 les proponen a sus estudiantes escribir mensajes de amistad a los compañeros del otro curso.

**Descripción sesión 8: Situación a-didáctica 1 - Formulación – Validación (evaluación final).** Hay un grupo de 19 amigos 12 niños del curso 402 y 7 niñas del curso 403. Los niños del grupo deciden darle tarjetas a cada una de sus amigas. ¿Cuántas tarjetas se escribirán en total para este día? Muestra de dos maneras diferentes y explica cómo obtienes el número de tarjetas realizadas. El objetivo de esta situación es evaluar la noción de multiplicación (producto cartesiano) que han construido las estudiantes tras la secuencia de actividades y las diversas estrategias empleadas en la resolución de situaciones multiplicativas.

**Estrategias y análisis.** Se observaron siete estrategias diferentes de solución de este tipo de situaciones multiplicativas: Árbol, flechas, listas ordenadas, dibujo, plano cartesiano, multiplicación y suma iterada. Las estudiantes implementaron en la mayoría de los casos más de

*Resolviendo problemas de multiplicación con el cilindro Rubik, hacia la caracterización de esta 11 operación como un producto cartesiano.*

una de estas representaciones, además de utilizarlas lograron describir relaciones entre las estrategias e identificaron en ellas herramientas diversas para la resolución de las situaciones. En esta fase se evidenció comprensión de las representaciones, ya que fueron capaces de reproducirlas en las diversas situaciones. Además, se convirtieron en algoritmos eficaces y que requieren de menos tiempo para su desarrollo.

Un hecho relevante en esta actividad fue la aparición de la estrategia suma reiterada, pues no había sido utilizada anteriormente; ésta no fue vista tan solo como una adición repetida, por la justificación verbal se evidenció su relación con la multiplicación (producto cartesiano), pues se argumenta la aparición de los sumandos como la combinación de los elementos.

Al aparecer la estrategia del plano cartesiano, se dedujo que el grupo realizó una aproximación a la comprensión o caracterización de la multiplicación como un producto cartesiano, ya que en la elaboración de esta representación, se tuvo en cuenta los parámetros de la situación; esto generó la relación de esta estrategia con las desarrolladas en el semestre. Se llegó a la relación entre la combinación o producto cartesiano y el algoritmo de la multiplicación, evidente en la relación: combinación de los grupos en las diversas representaciones y la relación de dos cantidades tomando, por ejemplo tres veces la segunda ( $3 \cdot n$ ).

**Logros y fracasos.** El avance a nivel procedimental de las estudiantes como resolutoras y con lo referido al concepto y los tipos de representación es notable, ya que consolidaron estrategias como el diagrama de flechas y el de árbol. En este trabajo lograron hacer efectivos los procesos de construcción de combinaciones y optimizar los tiempos de solución. Además de forma natural emergieron estrategias no contempladas como la suma iterada y la multiplicación algorítmica.

Finalmente es destacable mencionar que la comprensión del modelo presentado (plano cartesiano), no fue complicado gracias al trabajo con los demás sistemas de representación, permitiendo la comprensión de las relaciones entre las demás estrategias y esta; por otra parte la representación del plano fue ejemplificado (estudiantes) con algunas de las situaciones trabajadas en la secuencia.

### **Conclusiones**

Luego del proceso llevado a cabo se realizó un análisis didáctico a los logros obtenidos por estudiantes y docentes, a continuación se mencionarán los aspectos más relevantes:

Al concebir la matemática como una herramienta o auxiliar para el desenvolvimiento del individuo en su comunidad (entendiendo esta en todos los niveles como: familiares, escolares, laborales, etc.), sin perder la formalidad o rigurosidad que caracteriza a los elementos de esta disciplina, se logra establecer parámetros para su desarrollo en el aula, que busquen la creación de modelos propios que den cuenta de las formas de pensar de los estudiantes, de la comprensión que tienen ellos de los conceptos y de la visión de mundo que están construyendo.

En la teoría de las situaciones didácticas el papel del profesor es de gran relevancia, debido a que debe proponer situaciones que causen en el estudiante la necesidad de adquirir un saber que le permita: establecer soluciones óptimas al problema planteado, la reflexión frente al trabajo propio y el de las compañeras en los momentos de socialización; además los conocimientos adquiridos son una construcción propia cuyo fin debe ser la consecución de aprendizaje significativo.

Al trabajar la metodología de resolución de problemas la evaluación deja de ser una tarea, para convertirse en un proceso, que no solo busca clasificar o evaluar a los estudiantes; además, esta se convierte en la herramienta de regulación de procesos, un puente de comunicación entre lo enseñado por el maestro y lo construido por el estudiante (competencias alcanzadas frente al

*Resolviendo problemas de multiplicación con el cilindro Rubik, hacia la caracterización de esta 12 operación como un producto cartesiano.*

objeto matemático) en cada una de las fases de trabajo, también permite observar la práctica docente para su análisis y reconstrucción.

La interpretación de la multiplicación como producto cartesiano permite la superación de los obstáculos cognitivos presentes en la enseñanza de ésta como una adición reiterada, ya que por ejemplo al cambiar de conjunto numérico y pasar a los decimales los estudiantes pueden derrocar fácilmente la noción de que esta operación siempre agrada.

Es importante el desarrollo de actividades tendientes a la aparición de los diversos sistemas de representación de una situación multiplicativa, pues los diferentes tipos de representaciones (numérico, tabular, gráfico, algebraico) dan al objeto matemático un sentido, permitiendo que el estudiante tenga una mayor comprensión acerca del concepto que está trabajando y desarrolle habilidades como un pensamiento crítico y reflexivo, establezca comparación, verbalizase ideas matemáticas, domine conceptos, sea creativo, adquiera diversas formas de expresión, desarrolle interpretaciones y respuestas basándose en argumentos y razones matemáticas, Duval (1999) menciona que un aspecto en el desarrollo de un sistema cognitivo para comprender y manipular el objeto matemático, parte de la relación y transformación de los sistemas de representación y el tránsito entre ellos.

Es clave idear con antelación lo que se va a trabajar en una clase, desde los contenidos con una buena preparación teórica, la forma en que se van a trabajar, con qué recursos, lo que se espera, hasta la forma en que se va a evaluar. Éstos ítems ayudan a prever la forma de solucionar momentos inesperados (variables didácticas) y a organizar de una manera rigurosa, pero cómoda toda la atmosfera para la enseñanza y aprendizaje.

Es importante destacar que los recursos didácticos pueden favorecer aprendizajes; sin embargo, no son suficientes por sí solos, quienes confieren utilidad al material son por una parte el maestro que propone, orienta y motiva, y por otra los estudiantes con su actuación y manejo de estos. En este sentido el material diseñado (cilindro de Rubik) fue un dispositivo demasiado afortunado, ya que no solo propició la aparición de diversos sistemas de representación que a la postre se convirtieron en las estrategias de resolución, sino que contribuyó a la interpretación de combinación y de producto cartesiano, todo esto acompañado del componente motivacional, ya que las estudiantes disfrutaron la actividad matemática y el uso de este material.

### **Referencias y bibliografía**

Duval (1999) Sistemas de Representación. Representaciones Ejecutables. Recuperado el 16 de Septiembre de 2009 de <http://cumbia.ath.cx:591/pna/Archivos/LupianezJ00-2705.PDF>

Maza, C. (1991) Enseñanza de la multiplicación y división. Editorial Síntesis. Madrid, España

Ministerio de educación, (2006). *Estándares Básicos de Calidad*. Primera edición (pp. 20). Bogotá, Colombia

Muñoz. J.M., (2002) *Introducción a la Teoría de Conjuntos*, Facultad de Ciencias Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia

Pieget J. (1964) Seis estudios de psicología. [versión electrónica] Recuperado el 15 de Agosto de 2009, en [http://ficus.pntic.mec.es/~cprf0002/nos\\_hace/desarrol2.html](http://ficus.pntic.mec.es/~cprf0002/nos_hace/desarrol2.html)

Willard, S.,(1970) *General Topology*, editorial Addison-Wesley Publishing Company, United States of America

Vergnaud. G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Récherches en Didactique des Mathématiques*, 10 (23): 133-170.