XIII CONFERENCIA INTERAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
CIAEM 2011
26 - 30 Junio, 2011
Recife, Brasil
50 años del Comité Interamericano de Educación Matemática

Fenomenología histórica del concepto de ecuación y potencialidades de su uso en la escuela

Ligia Amparo **Torres** Rengifo
Universidad del Valle
Colombia
liamtore@yahoo.es
liamtore@univalle.edu.co

Resumen

Este trabajo de investigación parte del reconocimiento de una problemática general que se presenta en la escuela, en el paso del pensamiento aritmético al algebraico; allí se advierte tanto un corte didáctico que se presenta cuando hay necesidad de operar lo representado (la incógnita, para el caso de la ecuaciones), como la necesidad de rebasar ideas aritméticas que se oponen a la construcción del pensamiento algebraico. Esta problemática se valida con el estudio y análisis de literatura fundamental de la didáctica del álgebra. A partir de la ubicación de esta problemática, en el marco de la teoría de Fenomenología didáctica propuesta por Hans Freudenthal, se hace un estudio histórico-epistemológico del concepto de ecuación algebraica, es decir, un estudio de fenomenología histórica en tres momentos fundamentales del desarrollo de las ideas algebraicas relacionadas con este objeto matemático: el álgebra árabe en los trabajos de Al-khwarizmi, el álgebra del Renacimiento en el trabajo de Cardano y la del Siglo XVII en los trabajos de Descartes. A partir de éstos, se retorna a la problemática inicial y se hacen algunas reflexiones didácticas que aportan a la discusión y que permiten potenciar la introducción del concepto de ecuación en la escuela, a través de un campo semántico amplio.

Problema de investigación y antecedentes

Este trabajo asume como punto de partida algunas investigaciones representativas (desde el punto de vista de las referencias que en didáctica del álgebra se hacen de ellas), los análisis de las últimas propuestas curriculares colombianas y los resultados de pruebas de evaluación externas en la instituciones educativas colombianas.

Con relación a las investigaciones revisadas, inicialmente se centró la atención en las que abordan el paso de la aritmética al álgebra en el ámbito escolar (Chevallard, 1985; Filloy y Rojano, 1985; Gallardo y Rojano, 1988; Kieran y Filloy, 1989; Kieran, 1984; Filloy, 1998), las cuales dan cuenta de las dificultades u obstáculos que se oponen a la comprensión y al aprendizaje del álgebra escolar. Entre estas dificultades sobresalen las experimentadas por los alumnos cuando se avanza a un sistema de representación más abstracto, en el cual aumenta tanto el poder del lenguaje simbólico como el grado de generalización. Tal circunstancia se da, por ejemplo, cuando las letras comienzan a sustituir a los números, es decir cuando estos elementos concretos que han sido básicos en el trabajo matemático, pasan a ser representados por letras como incógnitas, números generalizados, parámetros o variables. Estas dificultades se manifiestan, entre otras, en: errores usuales de sintaxis cuando se trabaja operativamente con las expresiones algebraicas, errores de conversión cuando se utiliza el álgebra para resolver problemas escritos en el lenguaje cotidiano, e interpretaciones erróneas de expresiones algebraicas.

La problemática del paso de la aritmética al álgebra va más allá de un hecho curricular en tanto el inicio del estudio de una etapa simbólica del álgebra ha sido caracterizado por varias investigaciones (*p.e.*, Gallardo y Rojano, 1988) como la localización de un corte didáctico en el momento en que aparece como necesario operar “lo representado”; en el caso de la resolución de ecuaciones, operar las incógnitas. Lo anterior significa que el acercamiento a un dominio algebraico requiere operar no solo los datos, sino también la cantidad a encontrar; por ejemplo, en ecuaciones de la forma $Ax \pm B = Cx \pm D$ se debe operar tanto con los parámetros (*A*, *B*, *C* y *D*) como con la incógnita (*x*). Este corte didáctico se describe como un obstáculo didáctico de origen epistemológico. A partir de estos estudios sobre el tratamiento de ecuaciones y su conceptualización relacionada con la introducción de un lenguaje particular (como es el algebraico) en la escuela, en este trabajo de investigación se decidió asumir el concepto de ecuación[1], como objeto de estudio.

Esta decisión indujo a la revisión de otro tipo de investigaciones (Bednarz, Kieran, y Lee, 1996) que tienen su atención, ya no en caracterizar esta etapa, sino en proponer alternativas que permitan la continuidad entre el pensamiento numérico y el algebraico, o que superen los obstáculos ya caracterizados en las investigaciones de la década del ochenta. Estas alternativas y propuestas de aproximaciones al álgebra en la escuela, parten del hecho de que el álgebra elemental, por su carácter más abstracto y en la cual las habilidades sintácticas requieren de un buen grado de competencia, demanda de la presencia de conceptos provenientes de la semiótica y de análisis cercanos a la historia de las ideas algebraicas, entre otras disciplinas (Filloy, 1998). El análisis de estas investigaciones ofrece una reflexión profunda sobre importantes características del pensamiento algebraico, sobre las dificultades que los estudiantes encuentran en el paso al álgebra y sobre las situaciones que pueden facilitar su desarrollo y presentan estudios (Bednarz, Kieran, y Lee, 1996; Warren, 2006) que examinan la aparición y el desarrollo del álgebra desde diferentes perspectivas, a saber: generalización, histórica, resolución de problemas, modelación y funcional.

[1] Este concepto es fundamental desde las matemáticas en cuanto articula la teoría de ecuaciones que se consolida en el Teorema fundamental del álgebra y en su desarrollo sostiene la relación con el concepto de número en la dialéctica raíces y número. Desde la perspectiva escolar es un concepto que emerge desde el tratamiento mismo de relaciones numéricas en los grados iníciales de la escolaridad (ecuaciones numéricas en los naturales, enteros y racionales), es organizador de fenómenos de distinta naturaleza (relaciones de magnitudes en ámbitos cotidianos, matemáticos y de otras disciplinas), entre otros aspectos que este trabajo muestra.

En esta dirección, el estudio de expresiones algébricas y la resolución de ecuaciones desde la perspectiva histórica (Rojano y Sutherland, 1991; Charbonneau, 1996; Radford, 1996 y Filloy, 1998), aparece como propuesta para la introducción al álgebra en la escuela; en ésta se valoran situaciones importantes en el desarrollo histórico de las ideas algebraicas en la construcción escolar de estos conceptos. Sin embargo, en la revisión propuesta hasta aquí, no se encuentran investigaciones que provean de elementos, según los estudios históricos, para comprender los fenómenos de enseñanza de los objetos algebraicos y particularmente de las ecuaciones de manera integral; es decir, que aborden los distintos componentes que involucra un estudio de las ecuaciones algebraicas desde la configuración misma de la teoría de ecuaciones. Por lo anterior, en esta investigación se propone y hace, un análisis fenomenológico del concepto de ecuación, como concepto fundamental de las Matemáticas, que evidencia fenómenos y problemas importantes a tener en cuenta en la enseñanza y aprendizaje de ese concepto.

Otro aspecto que ratifica, a nivel nacional y en nuestro medio local, los problemas en el aprendizaje del álgebra y de las ecuaciones (como objeto de estudio fundamental de esta área escolar y su tratamiento), concierne al estudio de las propuestas curriculares actuales colombianas (Colombia, 1998 y 2008) y a los resultados de la evaluación de los desempeños algebraicos de los estudiantes colombianos en las pruebas externas como TIMSS, Censales y Saber (Colombia, 1993, 1997). En estos documentos se validan las problemáticas encontradas en la revisión de la investigación internacional y sus procesos de acometida.

Teniendo como referencia los resultados en álgebra del Tercer Estudio Internacional de Matemáticas y Ciencias-TIMSS (Colombia, 1997), de las pruebas SABER (*p.e.*,1993) y de las pruebas Censales (*p.e.*,2002), se evidencia el bajo nivel de desempeño de los estudiantes en los aspectos evaluados; éstas a su vez han permitido visualizar dificultades y errores en el aprendizaje del álgebra y potenciar la propuesta de este proyecto que aporta elementos para una comprensión y significación relevante para la construcción de las ecuaciones en la escuela.

Las propuestas curriculares colombianas, coherentemente con los desarrollos en didáctica del álgebra, proponen articulaciones entre conocimientos básicos estructurados en el estudio de los sistemas algebraicos y analíticos para el desarrollo de un pensamiento algebraico y variacional, donde los conceptos de ecuación y función son fundamentales; igualmente proponen el trabajo en torno a procesos generales de pensamiento (como los de resolución de problemas, la modelación algebraica, el uso de conceptos y procedimientos) en diversos contextos (específicos de las matemáticas, cotidianos y de otras disciplinas).

Es así como la revisión de la literatura fundamental sobre la enseñanza y aprendizaje del álgebra en la escuela y el estudio de algunos resultados de pruebas externas (realizadas por organismos nacionales o internacionales en Colombia), provee de problemáticas centrales, como: la falta de apropiación de los sistemas matemáticos de signos en relación a la manipulación acertada de una sintaxis propia del álgebra, la permanecía en un pensamiento numérico que se opone a una nueva forma de concebir los objetos algebraicos (por ejemplo no reconocer el signo igual como relación de equivalencia), o la deficiente conceptualización del concepto de ecuación que favorezca el acercamiento a la resolución de problemas algebraicos. Igualmente, esta revisión permite potenciar la intervención de la Historia de las Matemáticas, pues hace que se acuda a ésta con esos lentes de problemas y se analice cómo en ésta se dan estas situaciones, apoyados con un marco teórico que aporta elementos metodológicos, para hacerlo.

En esta dirección interesó determinar tanto:

¿Qué elementos relativos a la conceptualización y operatividad de las ecuaciones se reconocen a partir de un estudio fenomenológico de este concepto en tres periodos de la historia del álgebra: el álgebra árabe (al-Khwarizmi), del Renacimiento (Cardano) y del Siglo XVII (Descartes)?

Así como:

¿Qué potenciales implicaciones tendrían los elementos surgidos de esta fenomenología, para los procesos de enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones en ámbitos escolares?

Marco teórico de referencia

El marco teórico de referencia para el estudio histórico- epistemológico y didáctico del concepto de ecuación en este proyecto está determinado, por la teoría de la Fenomenología Didáctica de Hans Freudenthal (1983), analizada y reinterpretada por Luis Puig (1997).

En esta dirección, Freudenthal plantea que la fenomenología de un concepto matemático, de una estructura o idea matemática significa describir el objeto de pensamiento en relación con los fenómenos para los cuales es medio de organización. Es decir, el análisis fenomenológico consiste pues en describir, cuáles son los fenómenos, para los que es medio de organización el concepto (en nuestro caso el concepto de ecuación). Esta descripción ha de considerar la totalidad de los fenómenos en su uso actual, así como para cuáles fue creado y a cuáles se extendió.

En el análisis Fenomenológico de un concepto o estructura Matemática, Freudenthal plantea que se deben distinguir varios tipos de fenomenología y que hay un orden de prioridades entre ellos: fenomenología (fenomenología pura): se trata de los fenómenos relacionados con las matemáticas en este momento y con su uso actual. Las relaciones que se estudian son las que en este momento están establecidas y los conceptos o estructuras se tratan como "productos" cognitivos; fenomenología histórica: examina los fenómenos para cuya organización fue creado el concepto, a cuáles puede ser extendido, de qué manera actúa como medio de organización y de qué poder nos dota sobre esos fenómenos; fenomenología didáctica: se trata de describir fenómenos presentes en los sistemas educativos donde se estudia el concepto, es decir cómo se adquiere esa relación concepto-fenómeno en un proceso de enseñanza y aprendizaje y fenomenología genética: Se trata de describir los fenómenos relacionados con el desarrollo cognitivo donde interviene el concepto y la relación entre estos (fenómeno- concepto).

En el análisis Fenomenológico de un concepto o estructura matemática el orden propuesto es: Fenomenología, Fenomenología histórica, Fenomenología didáctica y en todo caso en último lugar la Fenomenología genética. Sin embargo, dadas las características del conocimiento algebraico, en este trabajo se estudia la fenomenología histórica donde aparecen elementos fundamentales de la fenomenología pura y la didáctica, donde hacen aparición elementos de la fenomenología genética.

Metodología

Para el estudio de la fenomenología histórica, realizado con el objetivo de determinar y estudiar los fenómenos para cuya organización se creó el concepto de ecuación y cómo se extiende este concepto a otros fenómenos, se determinó tanto algunas condiciones iniciales, como varios momentos fundamentales, materializados en las obras de varios matemáticos, a saber: el álgebra árabe y las obras algebraicas de Cardano y Descartes.

En cuanto a las *condiciones iniciales*, el estudio histórico tiene en cuenta, de una parte, que los conceptos son algo que no preexiste a nuestra experiencia sino que es la actividad matemática la que los crea (en particular la actividad matemática de los matemáticos) y, de otra, el interés de preservar, en lo posible, el sentido original que tienen los sistemas de signos en la obra matemática, incorporando, cuando esto permite algún tipo de claridad, sólo los sentidos que se les dan a los conceptos y sus expresiones en el álgebra elemental actual. Para el estudio se retoman las ideas de Rashed (1984), Høyrup (1990) y Puig (1998) en cuanto a la importancia de contar la historia de las matemáticas *de otra manera* y, en consecuencia, hay una apropiación de sus descubrimientos y reorganizaciones de las matemáticas árabes, particularmente de los aspectos que tienen que ver con el álgebra. En una versión tradicional de la historia de las matemáticas, las matemáticas árabes no se han presentado como uno de sus capítulos fundamentales, aunque en dicha versión no se puede evitar su aparición en escena; sin embargo, esta puesta en escena no ha variado mucho desde que se empezó a escribir la historia de las ciencias, a principios del siglo XIX. Por otra parte, las matemáticas árabes usualmente se presentan bajo la designación de “matemáticas no occidentales”, lo cual ha invitado a subvalorar y hasta esquivar estas matemáticas, como si no fueran verdaderamente parte integrante de la historia de las matemáticas; si bien esta presunción ha sido superada por muchos historiadores, ésta aún persiste en algunos ámbitos. Existe también una presunción que sobrevalora el papel de las matemáticas árabes y hace una apología de éstas, seguramente apoyada en un interés sin precedentes en su estudio y en una abundante producción sobre éstas.

Este estudio se ubica en un punto intermedio entre tales posturas, reivindicando sí el papel de la historia del álgebra árabe clásica en la historia del álgebra. Precisamente, la historia usual del álgebra suele tomar la forma del relato del progreso, en el descubrimiento de técnicas y fórmulas para la resolución de ecuaciones y en el descubrimiento de un lenguaje que permita que esas técnicas y fórmulas, al final de la historia, aparezcan verdaderamente expresadas. Bajo esta versión, la historia del álgebra se ha periodizado en álgebra retórica, álgebra sincopada y álgebra simbólica (sin dejar de lado la llamada álgebra geométrica de los griegos); si la historia se narra de esta manera, el álgebra árabe clásica desaparece o queda relegada al papel de mera intermediaria entre Alejandría y la repúblicas italianas.

Por lo tanto, de los estudios tomados como referencia interesa la reconstrucción de algunos hechos hasta ahora ignorados y develar algunos aspectos teóricos ocultos, como la identificación de las estructuras del álgebra árabe. Para ello, se sitúa el desarrollo del álgebra en relación con el de la aritmética y de la geometría, reconociendo una doble dialéctica, entre aritmética y álgebra, y entre geometría y álgebra, expresada en un movimiento de reorganización y de estructuración recíproca de estas disciplinas; esta perspectiva permite captar el papel capital y radicalmente nuevo del álgebra en la formación de la racionalidad matemática. Asimismo, para dar cuenta de una fenomenología amplia del concepto de ecuación y de la teoría que la sustenta, se estudia la noción de álgebra, del sistema matemático de signos, la noción de ecuación y resolución, los problemas que se plantea resolver, su forma de organización y el método de análisis para resolver estos problemas.

En relación con los *momentos fundamentales*, como ya se citó, se seleccionaron el álgebra árabe y las obras algebraicas de Cardano y Descartes.

En el primer momento se ha restituido un acontecimiento, la aparición del libro de al-Khawarizmi en álgebra, pues es en esta obra de principios del siglo IX cuando por primera vez en la historia el álgebra aparece como una disciplina autónoma y en posesión de su nombre, marcando así toda una corriente de investigación posterior. Es decir, usando el texto de al-Khawarizmi se da cuenta de aspectos del origen del álgebra.

A propósito de este momento, Rashed (1984) plantea que a pesar de que se ignore todo sobre los predecesores de al-Khawarizmi —y por consecuencia la génesis de este primer comienzo del álgebra—, se sabe que se inscribe en una tradición aritmética no-helenista. En la época de al-Khawarizmi, las matemáticas se adueñan de esta nueva disciplina para desarrollar el cálculo algebraico, la teoría de las ecuaciones y el análisis indeterminado, todo esto antes de la traducción de la aritmética de Diofanto. En este aspecto se toman los estudios de Høyrup, quien ha realizado una nueva lectura de los textos algebraicos árabes para fundamentar esos antecedentes en la cultura "subcientífica" de la Antigua Babilonia, contando para ello con la evidencia del texto árabe *liber mensuratinum*, escrito por Abu BaKr y conocido sólo a través de una traducción al latín por Gherardo de Cremona.

Un segundo momento fundamental en el desarrollo de las ideas algebraicas corresponde al Renacimiento; los trabajos de Del Ferro, Tartaglia, Ferrari y Cardano centran la atención en la solución de ecuaciones con grado mayor a 2, fundamentalmente en las ecuaciones de tercer grado. En este trabajo tomamos la obra del *Ars Magna* de Cardano de 1545, considerado el libro matemático más importante del Siglo XVI puesto que hace públicos los métodos de resolución de ecuaciones, las cúbicas y las cuárticas, acompañados de demostraciones geométricas de estos métodos, para dar cuenta de los fenómenos que organiza el concepto de ecuación a través del estudio de la naturaleza de las raíces, los métodos de solución de ecuaciones, los problemas que soluciona y la tensión del campo numérico.

La versión del texto de Cardano utilizada para el estudio de la fenomenología histórica corresponde a la traducción inglesa de T. Richard Witmer (1968) *Ars Magna or The Rules of Algebra*. Adicionalmente consideramos el texto de Vasco (1983), denominado *El Algebra Renacentista*, y el de Acevedo y de Lozada (1997) sobre teoría de ecuaciones.

En el trabajo que hace Descartes en relación con las ecuaciones, el cual constituye el tercer momento, fundamentalmente aquí se analizan los fenómenos que organizan el concepto de ecuación en este periodo importante de la historia de las matemáticas expuesto a través de la obra de este filósofo francés. Para ello se toma como referencia el texto de *La Geometría*, apéndice del texto del *Discurso del Método* (1673), en la versión electrónica en francés del Proyecto Gutenberg[2] y la traducción española de Espasa-Calpe[3], como también algunos textos de Álvarez (2000).

En una lectura del trabajo de Descartes, se podría afirmar que los fenómenos que organiza el concepto de ecuación, son los problemas geométricos con magnitudes de diferente naturaleza. Sin embargo, el problema fenomenológico va más allá del hecho eminente que relaciona el concepto, lo que quiere decir que se complejiza este hecho, en tanto se determina de qué manera se organizan esos problema, bajo qué formas, qué tipo de simbolización está presente, cuáles son

[2] Proyecto para la divulgación de obras científicas (http://www.gutenberg.org/).

[3] Compañía Editora Argentina, Buenos Aires (1947).

los procesos para llegar a estas ecuaciones, etc.; en fin, se trata de describir todos los aspectos que determinan las ecuaciones en el trabajo cartesiano. Para abordar esta tarea se tuvieron en cuenta dos elementos de análisis; el primero se relaciona con cómo Descartes determina una manera de poner un problema en ecuaciones, para lo cual establece el método analítico de resolución de problemas matemáticos. Un segundo aspecto, alude al tratamiento mismo que hace de las ecuaciones relacionado con las curvas geométricas.

Teniendo como base este estudio se hace un contraste con el análisis documental de las problemáticas tratadas por las investigaciones en didáctica del álgebra para hacer una reflexión sobre la implicaciones que tienen para la enseñanza y aprendizaje del álgebra elementos como la relación entre magnitudes, números y ecuaciones, las ecuaciones y los sistemas matemáticos de signos, el papel de la operaciones algebraicas en la resolución de ecuaciones y la naturaleza de la raíces y los campos numéricos.

Discusión de resultados y conclusiones

Fenomenología histórica del concepto de ecuación vs. Enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones en la escuela

La relación fenómeno-medios de organización o fenómenos- conceptos, en este caso fenómenos-ecuación, no es única, esta relación puede presentar varios niveles en su vínculo, lo que es medio de organización en un nivel puede ser fenómeno en otro. El estudio histórico desarrollado permite apreciar esto y establecer relaciones didácticas con la enseñanza de este objeto matemático.

Un primer nivel se presenta en la tradición subcientífica de la antigua Babilonia correspondiente a los antecedentes del álgebra, en la cual las relaciones se establecen entre magnitudes conocidas y desconocidas representadas por objetos geométricos o cantidades numéricas y las técnicas para solucionar estas relaciones, es decir, para encontrar el valor o la cantidad de magnitud desconocida se basa en procesos geométricos como las técnicas de cortar y pegar y completar cuadrados. Las relaciones numéricas entre superficies y lados están determinadas por la medida de estas magnitudes y esa noción de ecuación está determinada por esas relación que expresa una condiciones de tratamiento de los lados de un cuadrado y el área de este, por ejemplo. Los tratamientos para encontrar el lado o el área, son propiciados por los objetos geométricos y sus propiedades y las técnicas de cortar y pegar para completar cuadrados, desde la perspectiva física eminentemente.

Se puede afirmar, en este caso, que la noción de ecuación tiene un vínculo directo con el mundo de la cantidad y la magnitud como objeto de experiencia matemática cuyo proceso de abstracción está dado por el tipo de problemas que son resueltos con esta relaciones, como son problemas de acertijos y sin vinculo especifico con una realidad concreta, de herencia o agrimensión, pero que a su vez permiten el tratamiento de este tipo de problemas.

En el tratamiento que hace la Escuela Escriba, desde la perspectiva de los objetos que se operan se valora la búsqueda de sistematización en la organización en listas y series de los tipos de problemas resueltos, lo que no parece pertinente en un medio de acertijos o problemas recreativos propuestos en término de competencia. Entre las relaciones que se establecen entre lados y cuadrados se muestran, entre varios cuadrados y fracciones de la longitud de los lados. Se introducen problemas en los cuales no basta la técnica de cortar y pegar como procedimiento para su solución sino que se hace necesario normalizarlos, es decir hacer ciertas transformaciones para ponerlos en términos de casos de problemas ya conocidos.

Este tipo de relación entre fenómeno y concepto, tiene otro sentido, puesto que las acciones llevan a una relación entre series de problemas organizados en ciertas formas normales en tablas cuyos tratamientos para su solución están dados, no para un caso sino para los similares, máxime que aquellos que no tienen esa forma normal hay que llevarlos a los casos organizados, haciendo cierto tratamiento de ellos. Lo que significa, que la organización de problemas en grupos de problemas, hace que se vayan refinando técnicas de tratamiento para esos casos más generales de problemas. Es este sentido la relación determinada por la actividad matemática de organizar y agrupar en tablas, genera una nueva relación con la noción de ecuación.

En el caso del trabajo Al-Khwarizmi la noción de ecuación aparece desde el comienzo, por sí misma, y, podemos decir, que de manera genérica, en la medida que no surge simplemente a lo largo de la solución de un problema, sino que es deliberadamente llamada a designar una clase infinita de problemas, puesto que se introduce la noción de forma normal. Al-Khwarizmi exige reducir, sistemáticamente, cada ecuación a la forma normal correspondiente. La fórmula de la solución es justificada, matemáticamente, con la ayuda de una demostración geométrica. En este caso los fenómenos que organiza la relación entre cantidades conocidas y desconocidas tiene un estatus diferente a los casos precedentes, puesto que Al-Khwarizmi, parte de unos términos (tesoro, raíces y simple números), fenómenos de la misma matemáticas representados por un lenguaje extraído del lenguaje cotidiano pero con un estatus matemático. Estos entes producen según se combinen unas formas canónicas específicas, que puesto un problema en ellas permite su solución.

La relación fenómeno-ecuación, está dada por un nivel de abstracción y generalización amplia, donde la ecuación precede al problema y permite la solución de todos los problemas que se pueden expresar en estas formas, para lo cual se dan las operaciones y se presentan las reglas generales para su solución. Estamos en un mudo eminentemente teórico. Las magnitudes geométricas, en este caso, son utilizadas para validar y probar las reglas de resolución de estas ecuaciones. Por lo tanto las seis formas normales organizan relaciones numéricas y se relacionan con un mundo empírico a través del tipo de problemas que pueden modelar.

En Cardano, las ecuaciones organizan tipos de relaciones (lineales, cuadráticas, de tercer o cuarto grado), su interés está puesto en cómo son estas relaciones determinadas por una forma de expresión particular y cuyos componentes se comportan de unas determinadas formas, es decir, por ejemplo, existe una relación entre el grado de la ecuación y el número de las raíces, entre los coeficientes y las raíces. Por lo tanto, la relación entre fenómeno y concepto, determinada por la relación contenido – expresión, corresponde a la equivalencia de relaciones numéricas de distinto orden que implican soluciones diferentes, en este sentido trabaja con expresiones generales aunque no llegue a procesos generales de solución. Esto trae como consecuencia su preocupación expresa por la naturaleza de las raíces que van a determinar una relación directa entre álgebra y aritmética, pues las raíces son números, algunas de las cuales no puede aceptar (negativas e imaginarias) pues no está determinada su naturaleza numérica.

Un salto cualitativo en el concepto de ecuación esta dado, en el trabajo de Descartes, donde de una parte se consolida la ecuación general de segundo grado y el álgebra se convierte en una herramienta potente para describir problemas geométricos. Una relación entre geometría y álgebra distinta a la dada en los momentos anteriores. Las ecuaciones organizan problemas geométricos y a su vez adquieren una independencia conceptual al llegar a un nivel de generalización, donde se subsumen todos los casos que ellas describen. Se establece una correspondencia entre los elementos que componen las expresiones de las ecuaciones y los elementos de las curvas geométricas.

Descartes requiera del recurso del álgebra para la construcción de los problemas geométricos, para lo cual necesita una designación de las líneas, la clasificación de las curvas y la forma analítica de razonamiento. Es así como Descartes imprime un nuevo sello al análisis al involucrar esta forma de razonamiento en la producción de ecuaciones a partir de un análisis problémico eminentemente. Esto es posible pues puede dar el mismo estatus a las cantidades conocidas y desconocidas al tratar a todas las magnitudes a través de la representación de éstas por los segmentos; este es uno de los rasgos fundamentales del carácter algébrico del método. Lo que garantiza la operatividad entre esta cantidades y por lo tanto su forma de expresarse mediante dos maneras diferentes y así obtener una expresión que establezca la relación de dependencia de una con otras. Además, de garantizar la existencia de las raíces de la ecuación y la cantidad de ellas. Todo esto forma parte de los aspectos fenomenológicos del concepto de ecuación en Descartes.

La resolución de problemas, aparece como la forma de producción de conocimiento en estos trabajos, no obstante la naturaleza de los problemas y la relación entre la teoría de ecuaciones y estos es diferente. Argumentar la solución y/o verificar que se cumplen las condiciones del problema pone de manifiesto que en los problemas hay prueba.

Hasta aquí sobresalen algunos elementos importantes para la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones en la escuela, de una parte la relación entre magnitudes geométricas, números y álgebra que se expresan de distinta forma en la historia y que pude ser fuente de contextualización de las ecuaciones en la iniciación de su estudio. De otro, la resolución de problemas como ámbito de producción de conocimiento.

El primer aspecto lleva replantearse la forma de asumir la relación entre sistemas concretos y los aspectos sintácticos o de expresión de las relaciones dadas en un mundo sensible, es así como la técnicas de cortar y pegar y completar el cuadrado aparecen en un primer nivel, donde lo concreto se relaciona con las manipulaciones de las magnitudes mismas, como las superficies y la operaciones como añadir y quitar; es decir, las acciones permitidas en la búsqueda de la solución de los problemas representados en esas relaciones cuadráticas, dependen de lo permitido por la geometría de figuras planas. Explorar este tipo de situaciones en la escuela puede permitir una primera significación de la solución de ecuaciones, no obstante es importante introducir actividades y estrategias que tal como se ve en el proceso histórico, lleve a procesos de abstracción de las operaciones, cundo los sistemas de signos así lo permitan.

Otro aspecto importante a resaltar, es que si bien es necesario modificar algunas nociones aritméticas para adquirir un nuevo conocimiento como el algebraico, es el ámbito de lo numérico, como espacio conocido por los alumnos el que propicia un contexto de ecuaciones numéricas que se pueden ir complejizando esa operatividad ya conocida por los estudiantes.

El sistema matemático de signos surge en la interrelación con los elementos teóricos del concepto, en este caso en la relación fenómenos – concepto, contenido – expresión. Es decir, los sistemas matemáticos de signos están implicados en la producción de conceptos, en la relación fenómenos-medios de organización, y les dan su existencia material al describirlos y crearlos.

Es así como en la tradición subcientífica, en la escuela escriba y en el álgebra árabe, el lenguaje vernáculo es el vehículo de descripción de fenómenos o problemas que se tratan para su solución por medios geométricos o algebraicos. Sin embargo en Al- Khwarizmi hay un nuevo vocabulario técnico destinado a designar objetos y operaciones específicos. La naturaleza de los términos primitivos, su carácter monetario, parece develar, que ante la carencia de un sistema de signos más sintético, son un recurso teórico para designar elementos esenciales de una teoría. Lo que significa que la designación de términos y operaciones están asociadas a unos contenidos que permiten acciones sobre las formas normales determinadas en esta algebra árabe.

En Cardano, los avances en el sistema de numeración decimal y en formas de representación de algunos símbolos de operaciones y relaciones matemáticas permiten que represente las ecuaciones en un lenguaje sincopado. Además, la interacción entre formas algebraicas y magnitudes geométricas esta dada como forma de validar la reglas dadas para la solución de las ecuaciones, donde estas magnitudes describen estas relaciones ligadas a lo dimensional.

En Descartes el lenguaje simbólico aportado por Vieta, que como lo hemos dicho antes, representa una manera de concebir los objetos geométricos, es redimensionado por éste al introducir el concepto de unidad, clasificar las curvas y poner en relación los elementos de las expresiones algebraicas con los elementos de las curvas geométricas y así, poder dar cuenta de problemas geométricos en expresiones algebraicas. Es decir, el sistema matemático de signos del álgebra clásica se pone en correspondencia con el lenguaje de las cónicas y curvas geométricas en general.

Todo lo anterior para poner problemas geométricos en ecuaciones, es decir, en términos algebraicos, alude a esa transición del trabajo con el objeto mismo, que ya se ha visto en el apartado anterior, que tiene su primer acercamiento al determinar los segmentos como la forma general de las magnitudes, y que ahora se trata de romper con este designándolos con letras para hacer un tratamiento que no tiene que volver al objeto sino que permite la manipulación de este a través de sus representación algebraica: proceso de designación de magnitudes a través de las letras. Es así, como el proceso de objetivación de este medio de organización de las ecuaciones para convertirse en fenómeno tiene su expresión en un Sistema de Signos cada vez más abstracto.

Desde el punto de vista didáctico esta forma de emerger formas de representación de las ecuaciones cada vez más abstractas, es fundamental para la construcción escolar del concepto, puesto que las prácticas educativas han instalado como forma de hacerlo partir de la sintaxis propia del algebra para luego irla dotando de contenido (poner el concepto antes de los fenómenos). Aspecto que en esta perspectiva fenomenológica y según lo muestra este estudio debe de ir a la par de la construcción conceptual pues es fundamental mantener la pareja, contenido – expresión en la constitución de objetos mentales con campos semánticos amplios. Lo que quiere decir que en el proceso de construcción escolar de este concepto las formas de expresión de problemas o relaciones algébricas pasa por el uso de lenguaje numérico, retorico y sincopado en este proceso de producción de saberes algebraicos.

En conclusión, un estudio del concepto de ecuación escolarmente debe interactuar con los conceptos y procedimientos interconectados con: las relaciones entre magnitudes geométricas, relaciones entre cantidades y las curvas geométricas que describe una ecuación; los niveles de designación de estas relaciones a través de los sistemas matemáticos de signos; el papel de las operaciones algébricas en la resolución de ecuaciones; la naturaleza de las raíces y los conjuntos numéricos; las relaciones entre grado de la ecuación, coeficientes de la ecuación y raíces y, el sentido del método analítico en el razonamiento algebraico.

Limitaciones del estudio y prospectiva

El estudio aquí referenciado es un punto de partida importante para un estudio fenomenológico completo del concepto de ecuación tal como lo platea Freudenthal, puesto que aquí se hace el estudio de fenomenología histórica y algunos aspectos de la didáctica pero falta hacer un estudio de fenomenología pura en el cual se determinen los fenómenos que organiza hoy este concepto en la teoría algébrica actual y sus usos, así mismo el estudio de fenomenología genética en el cual en distintos niveles de la escolaridad se determinen los fenómenos que organiza del concepto según las tareas y experiencias propuestas a los estudiantes en el sistema escolar colombiano, en este caso.

Referencias

Acevedo, M. y Falk, M. (1997). Recorriendo el álgebra. De la solución de ecuaciones al álgebra abstracta. Santafé de Bogotá. Editorial Universidad Nacional.

Álvarez, C. (2000). Descartes lector de Euclides. En: Descartes y la ciencia del Siglo XVII. México: Siglo veintiuno editores. pp. 15-68.

Bednarz, N., Kieran, C. y Lee, L. (1996). Approaches to algebra: perspectives for research and teaching. En: N. Bednarz et al (eds). Approaches to Algebra. Netherlands: Kluwer Academics Publisher. pp. 15-38.

Cardano, G. (1993). Ars Magna or The Rules of Álgebra. Translated and Edited by T. Richard Witmer. New York, Dover Publications, Inc.

Charbonneau, L. (1996). From Euclides to Descartes: algebra and its relation to geometry. En: Bednarz et al. (eds). *Approaches to Algebra.* Netherlands: Kluwer Academics Publisher. pp.15-38.

Chevallard, Yves. (1985). Le passage de l'Arithmetique a l'Algebrique dans l'Enseignement des mathematiques au college. Premiere Partie. L'évolut ion de la transposition didactique. *«petix» 5*, 51-94.

COLOMBIA. MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL (1993). SABER. Sistema Nacional de Evaluación de la Calidad de la Educación. Primeros Resultados: Matemáticas y Lenguaje en la Básica Primaria. Santafé de Bogotá, D. C.

COLOMBIA. MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. (1997). Análisis y resultados de las pruebas de matemáticas. –TIMSS – Santafé de Bogotá, D. C.

COLOMBIA. MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. (1998). Matemáticas. Lineamientos curriculares. Santafé de Bogotá, D. C.

COLOMBIA. MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL (2002). Matemáticas. Programa Nuevo Sistema Escolar. Evaluación Censal de la Calidad de la Educación. 9º Grado Educación Básica.

COLOMBIA. MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. (2008). Estándares básicos de competencias. Santafé de Bogotá, D. C.

Filloy, E. y Rojano, T. (1985). Operating the unknown and models of teaching (a clinical study with 12–13 year olds with high proficiency in pre- algebra), in S. K. Damarin and M. Shelton (eds.) *Proceedings of the Seventh Annual Meeting for the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter.* Columbus, Ohio.

Filloy, E. (1998). *Aspectos teóricos del álgebra educativa*. México: Editorial Iberoamérica.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*.Dordrecht/Boston/Lancaster: Reidel Publishing Company

Gallardo, A. y Rojano, T., (1988). Áreas de dificultad en la adquisición del lenguaje aritmético - algebraico. *Recherches en didactique des mathématiques 9*(2),155-188.

Heid, Kathleen. (1996). Reflections on mathematical modeling and the redefinition of algebraic thinking. En: Approaches to algebra. Perspectives for Research and Teaching. By A. J. Bishop et al (eds). Kluwer Academic Plublishers, Printed in the Netherlands.

Høyrup, Jens. (1990). »OXFORD« AND »CREMONA«. ON THE RELATION BETWEEN TWO VERSIONS OF AL-KHWARIZMI'S ALGEBRA. Alger. Revised contribution to the 3erd Magheribian Symposium on the History of Arabic Mathematics.

Janvier, C. (1996). Modeling and the initiation into algebra. En: Approaches to algebra. Perspectives for Research and Teaching. By A.J. Bishop et al (eds). Kluwer Academic Plublishers, Printed in the Netherlands. p. 225-239.

Kieran, C. (1984). A comparison between novice and more-expert algebra students on tasks dealing with the equivalence of equations. In J. M. Moser (Ed.), *Proceedings of the Sixth Annual Meeting of PME-NA* (pp. 83-91). Madison: University of Wisconsin.

Kieran, C. y Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. En: Enseñanza de las Ciencias. vol. 7(3). p.229-240.

Mason, J. (1996). El futuro de la aritmética y del álgebra: utilizar el sentido de generalidad. UNO. Revista de didáctica de las matemáticas. N° 9.

Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. En: L. Rico, (ed). *La Educación Matemática en la enseñanza secundaria*. Barcelona: ICE/Horsori.

Puig, L. (1998). Componentes de una historia del álgebra. El texto de al-Khwarizmi restaurado. Investigaciones en matemática educativa II. Universitat de Valencia. Detartament de Didáctica de la matemática. pp. 109-131. Ed. Hitt, F., Grupo Editorial Iberoamérica.

Radford, L. (1996). The roles of geometry and arithmetic in the development of algebra: historical remarks from a perspective didactic. En: International Handbook of Mathematics Education. By A.J. Bishop et al (eds). Kluwer Academic Plublishers, Printed in the Netherlands. p.39-54

Rashed, R. 1984. L'idée de l'algèbre chez al-Kwārizmī. En: Entre Arithmétique et algèbre. Recherches sur L'Histoire des Mathématiques arabes. Chapitre I: Les commencements de l'algèbre. Société d'édition. Les Belles Lettres. Paris.

Rojano, T. y Sutherland, R., (1991). La sintaxis algebraica en el proyecto viético. En: Rojano et al (eds.) *Historia de las ideas algebraicas. Memorias del Tercer Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática*. pp. 117-130.

Rosen, F. 1986. The algebra of Mohammed Ben Musa. London. Oriental Translation Fund.

Smith, David Eugene and Latham, Marcia L. (1954). The geometry of René Descartes. Traducción del francés y del latín. New York. Dover Publications, Inc.

Vasco, Carlos E. (1983). El álgebra renacentista. 2ª Edición. Santafé de Bogotá, Empresa Editorial Universidad Nacional.

Warren, E. (2006). Teacher actions that assist young students write generalizations in words and in symbols. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká & N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of MathematicsEducation* (Vol. 5, pp. 377-384). Prague, Czech Republic.

Wheeler, David. (1996). Backwards and forwards: reflections on different approaches to algebra. En: Approaches to algebra. Perspectives for Research and Teaching. International Handbook of Mathematics Education. By A. J. Bishop et al (eds). Kluwer Academic Plublishers, Printed in the Netherlands.