



Integración de ciencias, tecnología, ingeniería y matemática Modelización de sistemas de la vida real

Horacio E. Bosch

FRGP, Universidad Tecnológica Nacional
Argentina

hbosch@funprecit.org.ar

Mercedes S. Bergero

INSPT, Universidad Tecnológica Nacional
Argentina

msbergero@gmail.com.ar

Leonor Carvajal

INSPT, Universidad Tecnológica Nacional
Argentina

le.carvajal@gmail.com

Mario A. Di Blasi Regner

FRGP, Universidad Tecnológica Nacional
Argentina

mario.diblasi@gmail.com

Noemí S. Geromini

INSPT, Universidad Tecnológica Nacional
Argentina

noegero@gmail.com

Resumen

Vistos los fracasos de los estudiantes en las pruebas internacionales es preciso que haya un corrimiento de paradigma de la didáctica de Matemática de los Siglos XIX y XX a la didáctica de la Matemática del XXI, ligando a ella las didácticas de otras ciencias y sus aplicaciones. Nuestra concepción de transversalidad se encuadra en el estudio integrado de Ciencias, Tecnología, Ingeniería y Matemática (Sciences, Technology, Engineering and Mathematics – STEM). Con este enfoque, es posible partir de un estudio experimental de un sistema, concebir un modelo de su comportamiento, desarrollar el algoritmo matemático, obtener la predicción del modelo y validarla con los datos experimentales obtenidos. Esta es la metodología empleada hoy en el estudio de los problemas de la vida real.

Palabras claves: Enseñanza – Matemática – Tecnología – Vida real

Introducción

Son bien conocidas las dificultades que tienen los alumnos en comprender las complejas fórmulas matemáticas, particularmente en álgebra y Cálculo. Ello se debe, en parte, a que los métodos convencionales de enseñanza de matemática son anticuados y conducen a la frustración de la gran mayoría de los alumnos. En particular, el Programa PISA (PISA 2010) ha analizado la respuesta de estudiantes argentinos de 15 años calificándolos en el ranking 58 entre 65 países.

Los libros clásicos, ejercicios y métodos tradicionales de enseñanza de matemática, todavía omnipresentes en la primer década del Siglo XXI, enseñan cómo se resuelven las ecuaciones, pero en general no explican porqué se plantean y mucho más importante, qué uso tienen en el mundo real (REMATH, 2010). Este “gap” entre cómo se enseña y su relación con la vida real todavía se ha ampliado más con la introducción de herramientas informáticas en la Sociedad, las cuales han dejado a la enseñanza tradicional totalmente anticuada y fuera de lugar, pues la validación de la solución matemática debe relacionarse con el mundo real de hoy (PRIMAS, 2010). Este es el paradigma que ha subsistido durante 150 años aproximadamente (Crombie, 2008).

Este corrimiento de paradigma de la didáctica de Matemática trae aparejado un cambio drástico en la propuesta de cómo deben enseñarse los capítulos de Matemática, orientados a la modelización de sistemas de la vida real. Con este enfoque, es posible partir de un estudio experimental de un sistema, concebir un modelo de su comportamiento, desarrollar el algoritmo matemático, obtener la predicción del modelo y validarla con los datos experimentales obtenidos. Esta es la metodología empleada hoy en el estudio de los problemas de la vida real.

Modelo descriptivo del movimiento de caída de un cuerpo de masa m por atracción de la fuerza gravitatoria de la tierra

Atracción gravitatoria

Se parte del conocimiento previo sobre la interacción gravitatoria entre dos cuerpos, particularmente la tierra de masa M y un cuerpo cercano a su superficie, de masa m . La distancia entre sus centros geométricos, supuestos esferas, es el radio terrestre R .

La fuerza que ejerce la tierra sobre el cuerpo de masa m se expresa por un vector cuya dirección es el eje que determinan sus centros y sentido hacia el centro de la tierra. El módulo de la fuerza es proporcional al producto de las masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia. La constante de proporcionalidad es la constante de gravitación universal G

$$F = \frac{G \cdot M \cdot m}{R^2} \quad (1)$$

El producto $\frac{G \cdot M}{R^2} = g$, llamado aceleración de la gravedad, tiene el valor $g = 9,806 \frac{m}{s^2}$ a 45° de latitud y nivel del mar.

De esta manera queda definido el peso P del cuerpo de masa m , atraído por la masa gravitatoria de la tierra a una distancia R

$$P = m \cdot g \cdot u_r. \quad (2.a)$$

Descripción cinemática del movimiento de caída del cuerpo de masa m

Se parte de la definición de la aceleración (constante) g de un cuerpo en movimiento de caída libre con rozamiento del aire despreciable, como la derivada de la función velocidad v del cuerpo respecto del tiempo, para cualquier instante t es:

$$g = \frac{dv}{dt} \quad (3.a)$$

Queda de esta manera planteada la primer ecuación diferencial con condición inicial para $t = 0$, es $v = v_0$.

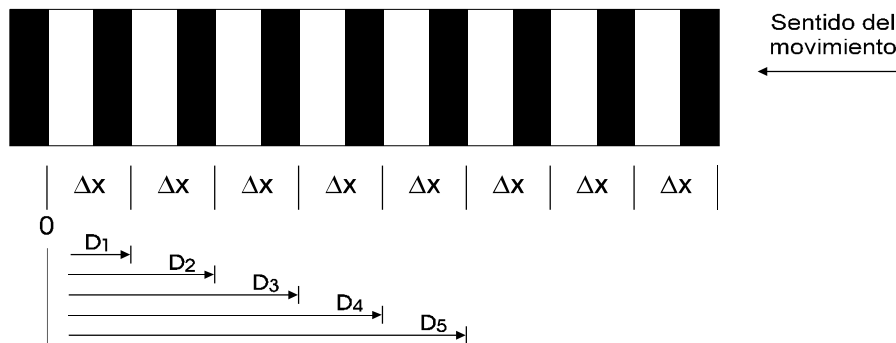


Figura 1. Placa de plástico transparente con bandas negras igualmente espaciadas (persiana). Distancias Δx entre flancos de las bandas negras (todas iguales). Distancias D_i de los flancos de las bandas negras, referidas al flanco de la primera banda

Consecuentemente
$$v(t) = v_0 + g \cdot t \quad (3.b)$$

Se parte también del conocimiento que la función velocidad es igual a la derivada de la función desplazamiento del cuerpo hacia la tierra

$$v(t) = \frac{dz}{dt} \quad (4.a)$$

Con lo cual queda planteada la segunda ecuación diferencial con la condición inicial para $t = 0$, es $z = z_0$, distancia del punto de lanzamiento del cuerpo respecto del origen de un sistema de coordenadas situado a una distancia arbitraria de la tierra.

Se integra este algoritmo entre el tiempo $t = 0$, al cual le corresponde un desplazamiento inicial z_0 , y el tiempo t , para un desplazamiento $z(t)$.

Por lo tanto
$$z(t) = z_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \quad (4.b)$$

Mediante las dos integraciones sucesivas se ha obtenido la expresión matemática que describe el desplazamiento escalar del cuerpo hacia la tierra, a partir de un instante $t = 0$ con velocidad v_0 y

Predicción del modelo

El desplazamiento de caída libre de un cuerpo en el aire con rozamiento despreciable está representado por una función cuadrática, tal que el coeficiente del término cuadrático es igual a la mitad de la aceleración constante de la gravedad.

Desarrollo de una experiencia de caída libre de un cuerpo. Obtención de registros de velocidad y desplazamiento

Se dispone de un sistema de registro, procesamiento y representación de datos automático, constituido por una foto compuerta y una interfaz ligada a una computadora. Como cuerpo se utiliza una persiana de plástico con bandas negras y transparentes igualmente espaciadas. (Ver Fig. 1). En la Fig. 2 se muestra la posición de la foto compuerta y la persiana, que se deja caer libremente.



Figura 2. Diseño experimental para medir intervalos de tiempo t_i , $t_i + \Delta t_i$ entre dos flancos sucesivos de bandas de la "persiana" que cae libremente y pasa a través del haz infrarrojo de la foto compuerta. Fuente. Taller de Investigación Educativa FRGP-U. Tecnológica Nacional, Argentina. 2010.

En la Fig. 3 se muestra el registro de velocidades medias de cada intervalo Δx entre dos bandas negras sucesivas en función del tiempo. Se ajustan estos valores con una recta obteniéndose el valor de la pendiente. En esta figura se muestran los valores experimentales ajustados con una recta de pendiente $9,75 \pm 0,02$.

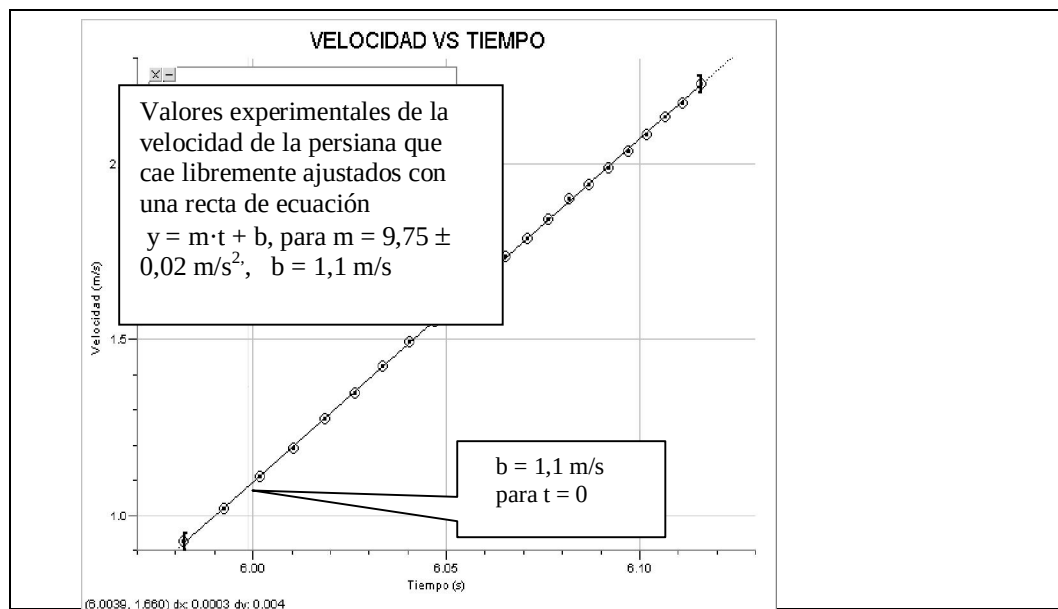


Figura 3. Gráfica de los valores de las velocidades medias correspondientes a cada intervalo de tiempo $t_i, t_i + \Delta t_i$, ajustados con una recta de pendiente positiva $m = 9,75 \pm 0,02 \text{ (m/s}^2\text{)}$, según el movimiento experimentado por la caída libre de la persiana. Velocidad inicial $b = 1,1 \text{ m/s}$ al pasar la primera banda negra por la foto compuerta.

A continuación se muestra el registro de los valores del desplazamiento de las diferentes bandas de la persiana respecto de la primera banda, en función del tiempo.

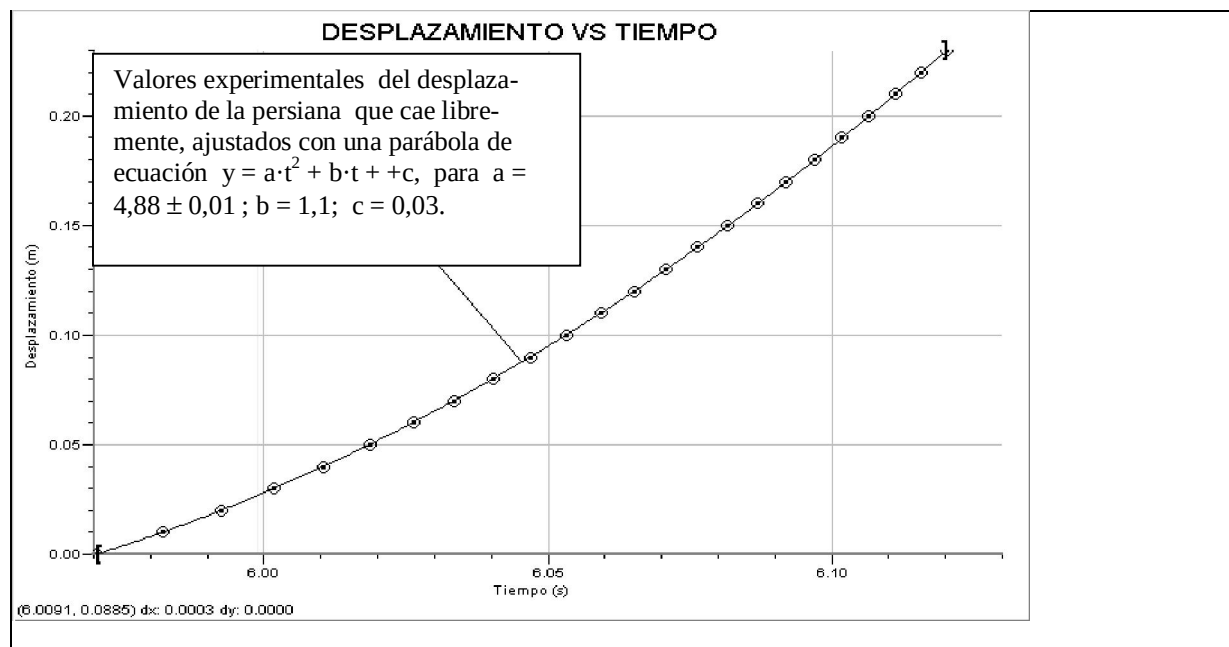


Figura 4. Gráfica de los desplazamientos D_i de las sucesivas bandas negras respecto de la primera, en función del tiempo, para el tiempo total del pasaje de la persiana por la foto compuerta en su movimiento de caída libre.

Validación de las predicciones del modelo con la experiencia

Se ha verificado que la aceleración de la persiana es constante y positiva, con valor próximo al de la aceleración de la gravedad.

Por lo tanto, la velocidad resulta una función lineal respecto del tiempo para todo el intervalo de tiempo de caída del cuerpo. Para $t = 0$ es $v = v_0$; para t es v , luego

$$v(t) = v_0 + g \cdot t = 1,1 + 9,75 \cdot t \quad (5)$$

La función desplazamiento es una función cuadrática

$$z(t) = z_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = 0,03 + 1,1 \cdot t + 4,88 \cdot t^2. \quad (6)$$

De acuerdo con los datos experimentales, el desplazamiento vertical del cuerpo está representado por una función cuadrática tal que el coeficiente del término cuadrático es igual a la mitad de la aceleración constante de la gravedad g ; el coeficiente del término lineal es igual a la velocidad inicial y el término independiente es igual a la posición inicial del borde de la persiana respecto de la compuerta.

Modelo descriptivo de la atenuación de un haz de luz al pasar por un medio absorbente homogéneo

Se parte del diseño de una experiencia de hacer pasar un haz de luz colimado a través de varias placas de plexiglass coloreadas. Para ello se requiere una fuente de luz, placas de plexiglass coloreado, lentes convergentes y un foto detector acoplado a una interfaz y computadora que registra los datos de intensidad de luz.

A medida que se interponen placas de plexiglass de espesor constante Δx , se registra la intensidad de luz $I(x)$ con el foto detector. Se mide la intensidad $I(x)$ cada vez que se introduce una placa de plexiglass, obteniéndose los datos numéricos de la Tabla 1.

Tabla 1

Cuadro de valores de intensidades luminosas medidas y valores $\frac{I(x+1) - I(x)}{I(x)}$ (cuarta columna). Quinta columna: Modelo exponencial tomando el promedio de valores de la cuarta columna

x	I(x)	I(x+1) - I(x) = ΔI	$\frac{I(x+1) - I(x)}{I(x)}$	Exp (- 0,344*x)
0	1			1
1	0,7	-0,25	-0,357	0,71
2	0,45	-0,13	-0,289	0,50
3	0,32	-0,1	-0,313	0,36
4	0,22	-0,07	-0,318	0,25
5	0,15	-0,05	-0,333	0,18
6	0,1	-0,045	-0,450	0,13
7	0,06	-0,019	-0,345	0,09
8	0,04	-0,036		
Promedio:				- 0,344

Fuente: Grupo UTN de Investigación Educativa en Ciencias Básicas. 2010.

Se analizan los datos y se reagrupan de acuerdo con las operaciones indicadas, obteniéndose la columna 4. Es decir, la relación de la pérdida de intensidad de luz

$$-\Delta I(x) = I(x+1) - I(x) \quad (7)$$

respecto de la intensidad incidente I(x), por el espesor Δx, independientemente del espesor x que ha atravesado la luz

$$-\frac{\Delta I}{I(x)} = \lambda \cdot \Delta x, \quad (8)$$

La constante λ , positiva, es llamada constante de transparencia del plexiglass utilizado.

Se puede considerar espesores diferenciales de plexiglass, obteniéndose una estructura algorítmica que representa el comportamiento del sistema físico planteado

$$-\frac{dI(x)}{I(x)} = \lambda \cdot dx \quad (9)$$

con la condición inicial para x = 0 la intensidad de luz es I(0) = 1.

El método de integración de la ecuación diferencial es simple, no siendo necesaria la utilización de Sistemas Algebraicos Computacionales (Wolfram, 2010), (GeoGebra, 2010), como en casos más complejos. Se obtiene la función

$$I(x) = I(0) \cdot e^{-\lambda \cdot x}. \quad (10)$$

La Fig. 5 muestra la gráfica de la predicción del modelo para diferentes placas interpuestas al haz de luz colimado, conjuntamente con los valores experimentales de intensidad de luz dados

en la Tabla 1. Puede observarse un ajuste apropiado de la predicción del modelo con los valores experimentales.

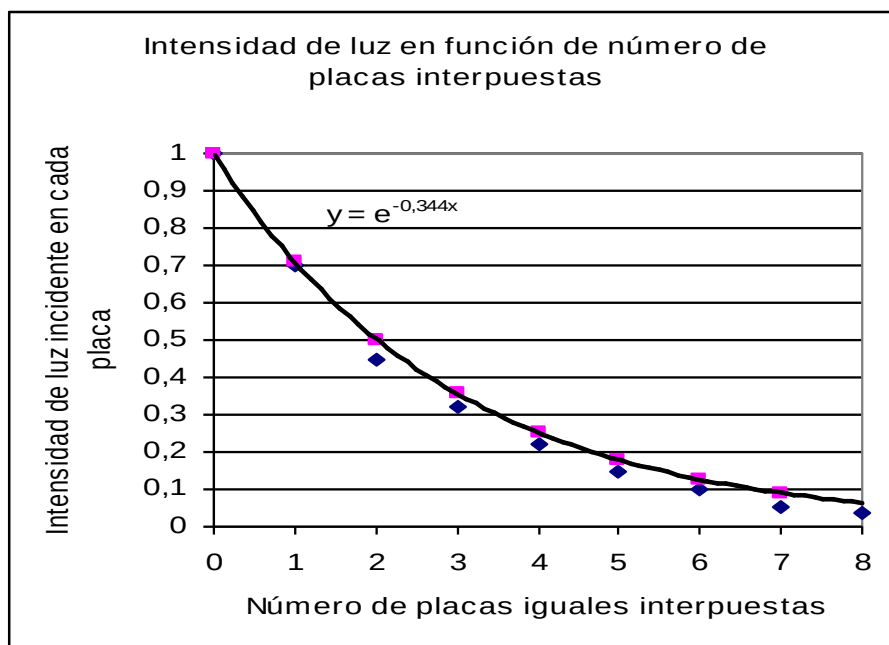


Figura 5. Ajuste de valores experimentales con una exponencial $\text{Exp}[-0,344 \cdot x]$. Predicción del Bee Modelo Beer -Lambert a partir de la construcción de la constante $\lambda = 0,344$.

Es importante destacar la estructura del algoritmo (9) y la interpretación física de la constante λ , positiva; expresa que la intensidad del haz de luz, al pasar del espesor x al espesor $x + dx$ pierde una cantidad $-dI$, tal que el cociente $-\frac{dI(x)}{I(x)}$ es constante para cualquier espesor x .

Conclusiones

Con los ejemplos se ha demostrado el proceso transdisciplinario seguido para modelizar fenómenos de la vida real. Se enfatiza que este debería ser el procedimiento para el planteo y resolución de algoritmos matemáticos, pues siempre ellos provienen de la concepción de un modelo de comportamiento de un fenómeno dado.

Si bien por razones de espacio hemos presentado dos ejemplos de cómo modelizar comportamientos de sistemas físicos mediante un enfoque transdisciplinario experimental, hemos desarrollado una serie numerosa de problemas de este tipo. Hemos aprendido que el encuadramiento STEM es el verdadero camino que debemos seguir para resolver los problemas que nos presenta día a día la Sociedad del Conocimiento del Siglo XXI.

Esperemos que con la irrupción del nuevo paradigma en la comunidad educativa de matemática se editen nuevos libros, nuevos ejercicios y se realicen Workshops, de tal manera que el resultado sea contar con más alumnos orientados a las ciencias y matemática, que es la consigna de este Siglo.

Referencias y bibliografía

- Crombie, William (2008). Algebra and Foundations of University Calculus: A theoretical reconstruction. ICME XI. 11th International Conference on Mathematical Education, Querétaro, Julio 15-18, Mexico.
- GAO (2005). U.S. Government Accountability Office. Federal Science, Technology, Engineering, and Mathematics Programs and Related Trends, GAO-06-114, Oct. 2005.
- GEOGEBRA (2004). Steigung und Ableitung einer Funktion mit GeoGebra. < www.geogebra.org.> .Acceso: 20 de octubre 2008.
- GAO (2005). U.S. Government Accountability Office. Federal Science, Technology, Engineering, and Mathematics Programs and Related Trends, GAO-06-114, Oct. 2005.
- GEOGEBRA (2004 en adelante). Steigung und Ableitung einer Funktion mit GeoGebra. < www.geogebra.org.> .Acceso: 20 de octubre 2008.
- NEU (2010). Northeastern University – The Center for STEM Education, 360 Huntington Avenue, Boston, Massachusetts 02115. USA. <<http://www.stem.neu.edu>.>. Acceso: 13 de septiembre de 2010.
- PRIMAS (2010). <<http://www.nottingham.ac.uk/education/documents/research>>. Acceso: 10 de octubre de 2010.
- REMATH (2010). <<http://remath.cti.gr>.>. Acceso: 12 de marzo de 2010.
- Singapore (2010). 9th Annual ASEE Global Colloquium on Engineering Education. October 18-21, 2010.
- Whitehouse (2010).<http://www.whitehouse.gov/issues/education/educate-innovate>. Acceso: 2 de noviembre de 2010.
- Wolfram Research Institute (2010). <www.wolfram.com>. Acceso: 5 de noviembre de 2010.

Apéndice A

Región segura

A los efectos de ejemplificar el tratamiento matemático de problemas de la vida real, se plantea el conocido problema de lanzamiento de un proyectil, sujeto a dos variables, el ángulo de inclinación α respecto de un plano horizontal y la velocidad inicial v_i . La Fig. 6 muestra el gráfico correspondiente al desplazamiento horizontal y vertical del proyectil lanzado bajo un ángulo $\alpha = 72^\circ$ con una velocidad inicial $v_i = 75$ m/s. Para esta graficación se ha utilizado el Sistema Algebraico Computacional GeoGebra, con el cual se obtienen cambios dinámicos en las representaciones gráficas al variar la posición de los botones ángulo y velocidad.

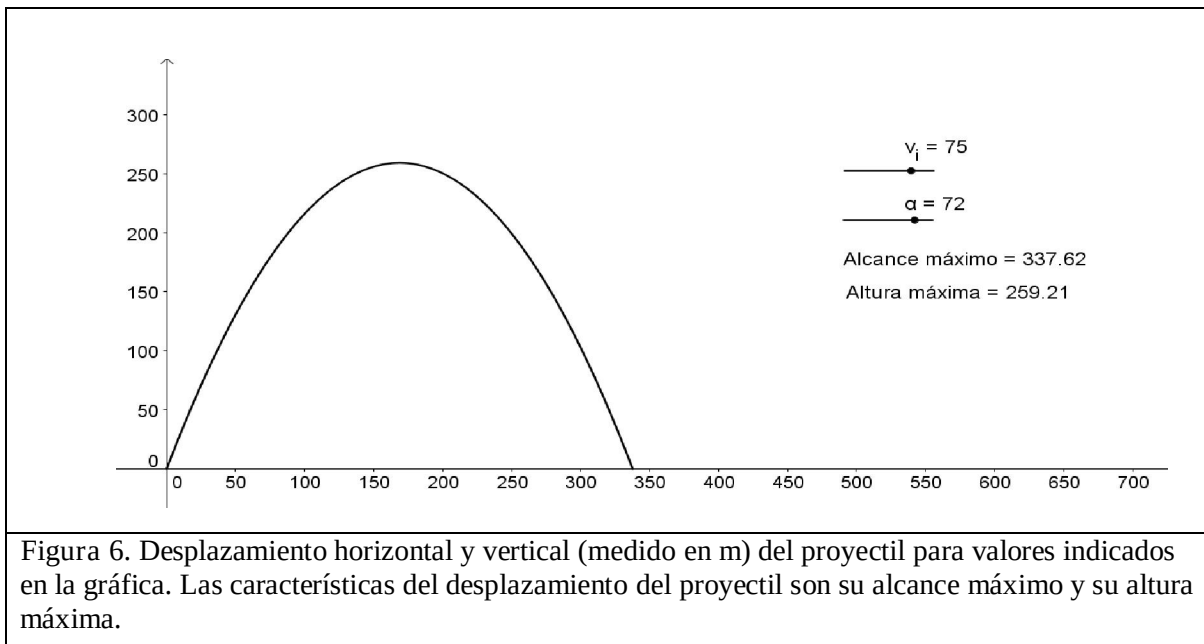


Figura 6. Desplazamiento horizontal y vertical (medido en m) del proyectil para valores indicados en la gráfica. Las características del desplazamiento del proyectil son su alcance máximo y su altura máxima.

Si se mantiene fijo un parámetro, por ejemplo velocidad inicial, es posible hacer un barrido con el otro parámetro y representar las sucesivas parábolas, obteniéndose:

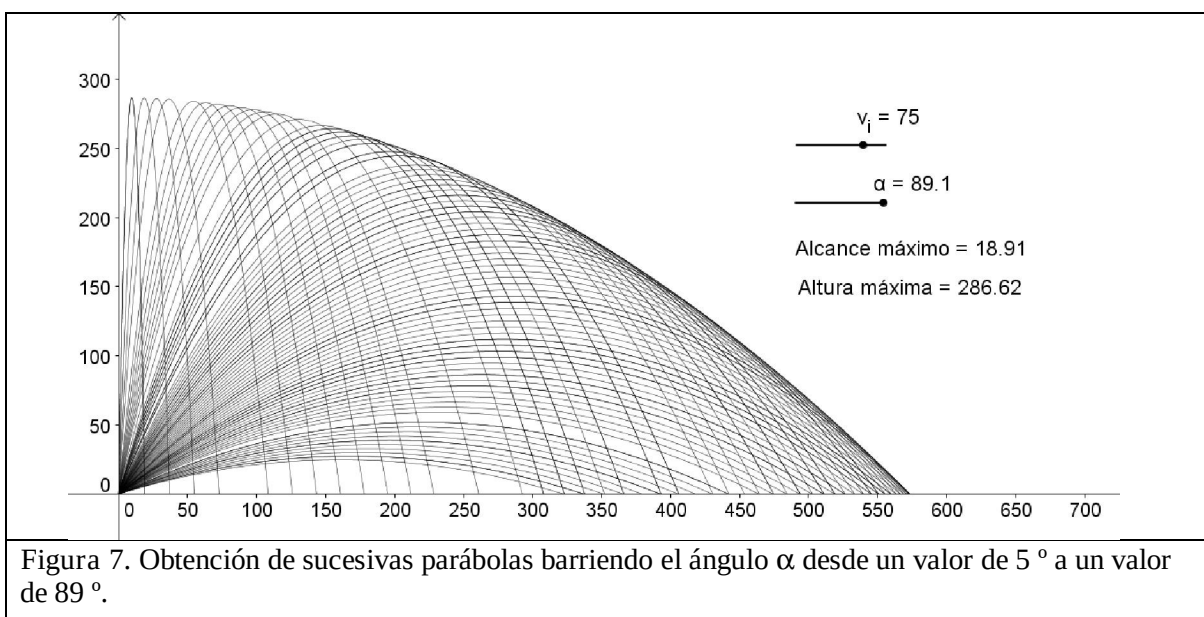


Figura 7. Obtención de sucesivas parábolas barriendo el ángulo α desde un valor de 5° a un valor de 89° .

Se observa un hecho que se pone al descubierto mediante la graficación, que existe una curva envolvente a todas las parábolas, que también resulta un arco de parábola, llamada curva de seguridad para la cada velocidad inicial del proyectil.

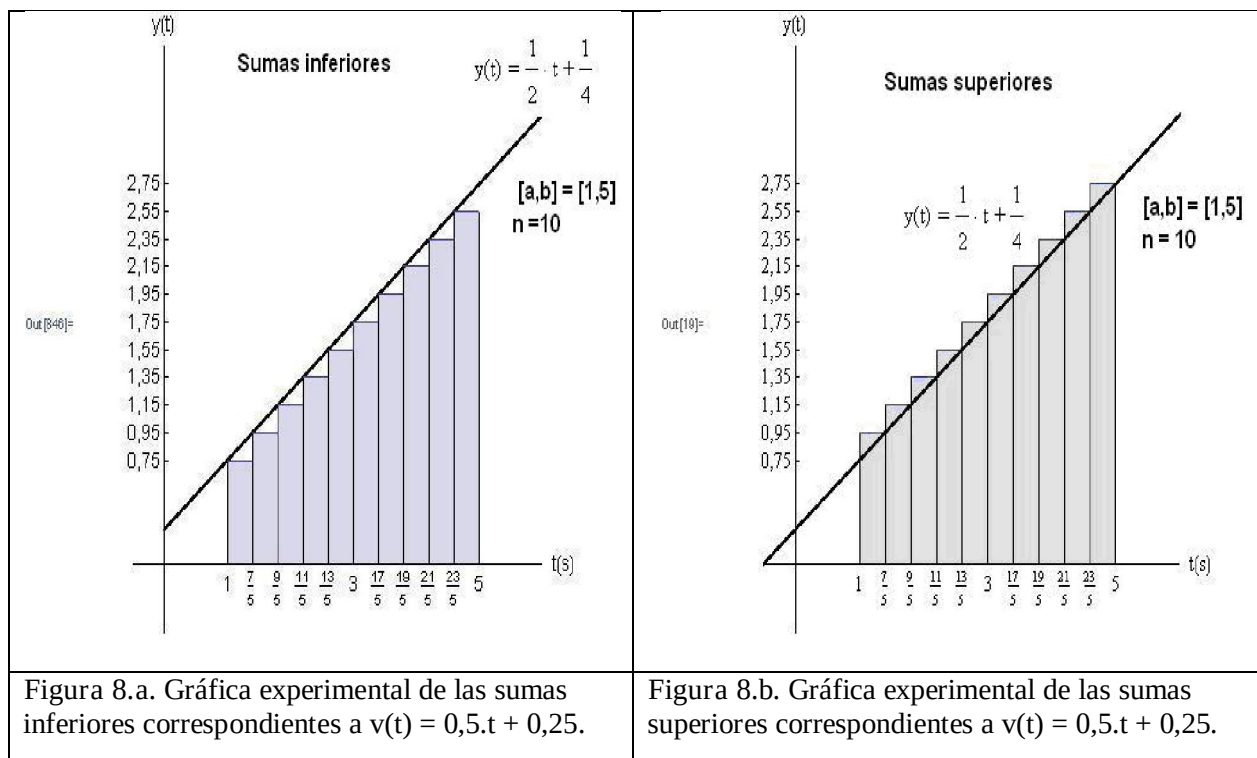
Apéndice B Movimiento rectilíneo

Se plantea otro tratamiento matemático de un ejemplo muy conocido de la vida real relacionado con la velocidad y el desplazamiento de un móvil.

Un móvil se desplaza sobre un camino rectilíneo con una velocidad $v(t) = 0,5 \cdot t + \frac{1}{4}$, en metros por segundo, desde el instante $t = 1$ hasta el instante $t = 5$.

Las Figs. 8 a y b representan las gráficas correspondientes de la función lineal.

Se plantea determinar el desplazamiento del móvil mediante el cálculo de la superficie del trapecio determinado por el segmento de indicado de la velocidad, el intervalo de tiempo y las ordenadas en los respectivos extremos. La superficie se puede calcular subdividiendo el intervalo de tiempo y determinando las superficies de los rectángulos por defecto y por exceso.



La Tabla 2 resume los valores de las sumas superiores e inferiores para diferentes particiones n del intervalo de tiempo. El valor de la integral desplazamiento en el intervalo indicado es de 7 m

Tabla 2

Valores numéricos a los que tienden las sumas inferiores y superiores cuando el número n de subdivisiones n crece en el intervalo $[1,5]$ y valor de la integral definida.

SUMAS INFERIORES Y SUMAS SUPERIORES			
n	Sumas Inf.	Sumas Sup.	$ SS-SI $
5	6,2000	7,8000	1,600
30	6,8667	7,1333	0,267
55	6,9273	7,0727	0,145
80	6,9500	7,0500	0,100
105	6,9619	7,0381	0,076
$\int_1^5 v(t)dt = 7,000$			