Evaluación de la función cuadrática en diferentes contextos (CO)

Ibarra, Lidia Ester
Universidad Nacional de Salta – Facultad de Ciencias Exactas
Argentina
ibarra@unsa.edu.ar
Formeliano, Blanca
Universidad Nacional de Salta – Facultad de Ciencias Exactas
Argentina
blaflor@hotmail.com
Alurralde, Florencia
Universidad Nacional de Salta – Facultad de Ingeniería
Argentina
falurral@unsa.edu.ar
Méndez, Graciela
Universidad Nacional de Salta – Facultad de Ciencias Exactas
Argentina
nildagramendez@yahoo.com.ar
Velásques, Mirta
Universidad Nacional de Salta – Facultad de Ciencias Exactas
Argentina
mirtvrla@unsa.edu.ar
Patagua, Ivone Anahí
Universidad Nacional de Salta – Facultad de Ciencias Exactas
Argentina
ivonepatagua@gmail.com

Resumen

Nuestro interés por el estudio de instrumentos de evaluación relacionados con la enseñanza de función cuadrática en la sala de clase, se debe a que este contenido también forma parte de las pruebas de evaluación de calidad que se realizan en Argentina a los alumnos que cursan el segundo año del Nivel Polimodal (alumnos de 16 años). Esto nos permite disponer de un instrumento de evaluación "externo" al que se realizan en las instituciones.

A partir de los problemas de función cuadrática propuestos en el Operativo Nacional

de Evaluación Educativa de los últimos años, se intenta llevar a cabo una reconstrucción del Dispositivo Didáctico "evaluación", con la finalidad de identificar las proximidades y distancias en las formas de evaluar en las prácticas áulicas institucionales con las del operativo nacional.

El presente trabajo se estructura de la siguiente manera:

- Introducción
- Marco Teórico
- Metodología de trabajo
- Estudio empírico de instrumentos de evaluación.
- Análisis de la producción de los alumnos en la evaluación.
- Conclusiones

Palabras clave: organización matemática, función cuadrática, evaluación, tareas, procedimientos.

Introducción

En el Sistema Educativo Argentino, y en particular en la Provincia de Salta, el concepto de *función* aparece en los Diseños Curriculares en los primeros años de la Escuela Secundaria, constituida por los niveles Educación General Básica Nivel 3 (EGB3) y Polimodal (15 a 18 años), y se complejiza a través del estudio de la función cuadrática, cúbica, logarítmica, exponencial, trigonométricas, entre otras. Esta evolución va acompañada de diversos modos de representación, especialmente en los primeros años del Nivel Polimodal.

Las instituciones escolares responsables de diseñar el segundo nivel de concreción curricular tienen la posibilidad de elegir las cuestiones matemáticas que van a ser estudiadas por los alumnos; de allí que cada institución escolar tiene su propio currículum (Chevallard, 1997), esto se ve reflejado en trabajos anteriores (Proyectos de Investigación Nº 1171 y 1494) donde fueron analizados los Proyectos Curriculares Institucionales de EGB3 y Polimodal y se observó un desplazamiento en los temas ecuaciones y funciones cuadráticas. Este desplazamiento se presenta porque dichos temas aparecen en los contenidos conceptuales de 8º y 9º del Diseño Curricular de Matemática de EGB3, mientras que, en la realidad áulica se profundizan en algunos casos en 1º y, en otras instituciones escolares, en 2º de Polimodal. Por lo tanto, el saber depende de la institución que lo gesta; es decir, se hace visible la relatividad institucional del saber (Chevallard, 1991).

La necesidad de estudiar y comparar los instrumentos de evaluación relacionados con la función cuadrática se debe a que este contenido forma parte de las pruebas de evaluación de calidad que se realizan en Argentina a los alumnos que cursan el segundo año del Nivel Polimodal. Por ello, focalizamos el estudio en dos evaluaciones en situación de aprendizaje y en una evaluación del Operativo Nacional de Evaluación 2001(ONE).

Este estado de situación nos lleva a plantear los siguientes cuestionamientos:

¿Qué modificaciones se realiza en el saber "función cuadrática" para transformarse en saber enseñado teniendo como referencia el marco teórico de la Teoría Antropológica de lo Didáctico?

¿Qué relación hay entre los instrumentos de evaluación que utiliza el docente en el aula y los propuestos por los ONE? ¿Qué criterios utilizamos en el momento de evaluar las tareas alrededor de las funciones cuadráticas? ¿Cuáles son las interacciones entre las tareas propuestas por los docentes y los procedimientos (técnicas, tecnología y teorías) realizados por los alumnos en el tema función cuadrática?

Objetivos:

- Definir y describir la Organización Matemática de Referencia (OMR) que forma parte del desarrollo curricular del área de la Matemática focalizada en el eje "Lenguaje gráfico y algebraico", en el tema "Función cuadrática".
- Estudiar la ecología de una Organización Matemática Local (OML) en una institución dada, a través de la interacción de las tareas, técnicas, tecnología y teorías.
- Reconstruir un dispositivo didáctico "evaluación", con la finalidad de mejorar las prácticas áulicas.

Marco teórico

Partimos de las cuestiones que son analizadas por Chevallard (1991) en la teoría antropológica de lo didáctico (TAD) donde se destacan las nociones de "*saber sabio*"," *saber a enseñar*" y "*saber enseñado*". Las transformaciones de estos saberes dependen de las instituciones, quienes organizan las tareas escolares a desarrollar. El conjunto tareas propuestas a un alumno, en su carácter de sujeto de una institución determinada con relación a la función cuadrática, se complementa según Chevallard (1999) con las praxeologías. Las praxeologías son descriptas en términos de tareas, técnicas, tecnologías y teorías. Las tareas son actividades precisas, tales como T_1: Descubrir la expresión algebraica de la función cuadrática a partir de la gráfica. Existen diferentes procedimientos para llevar a cabo esta tarea que las llamaremos técnicas y las justificaciones de los mismos son las tecnologías. Los argumentos que justifican los procedimientos conforman la teoría.

Un conjunto organizado por praxeologías es una Organización Matemática (OM), mientras la organización didáctica (OD) consiste en la manera de llevar a cabo la organización matemática. En esta teoría se consideran: Organización Matemática Puntual (OMP) conformada por un conjunto de técnicas, tecnologías y teorías organizadas alrededor de un *tipo de tareas*, Organización Matemática Local (OML) a la articulación de varias praxeologías puntuales a través de un discurso tecnológico común que es el que da identidad a la praxeología local y por último Organización Matemática Regional (OMr) a la que se configura en torno a varias praxeologías locales que tienen una *teoría* común.

En primer lugar, analizamos la Organización Matemática de Referencia (OMR) que forma parte del desarrollo curricular del área de la Matemática focalizada en el Eje "Lenguaje Gráfico y Algebraico" para la Educación General Básica 3 y en el Eje "Álgebra y Geometría" para la educación Polimodal. En segundo lugar, observamos las características de las instituciones, a través de sus proyectos institucionales y los libros de texto seleccionados −que orientan la transposición del conocimiento, pues nos permiten acercarnos por medio de sus producciones al modo en que aprenden los alumnos y cómo son evaluados.

Organización matemática de referencia

En la OMR quedan definidos los tipos de tareas, las diferentes técnicas, la aparición de nuevas técnicas que generan nuevas tareas; con esto se amplía el Marco Teórico-Tecnológico para justificar las técnicas a través de la teoría. Analizamos las tareas descriptas en la OMR teniendo en cuenta las técnicas, elementos tecnológicos y teorías y los siguientes contenidos contemplados en los Diseños de EGB3 y Polimodal.

a) Función cuadrática. Comportamiento de funciones (crecimiento, valores ceros, continuidad, periodicidad, dominio de definición) desde su gráfica. Utilización de lenguaje gráfico para expresar relaciones funcionales. Representación de funciones en coordenadas cartesianas. Identificación de qué relaciones no son funciones a través de su gráfica o tablas. Descripción de las características más importantes de una función a través de su gráfica. Descripción de un modelo utilizando funciones. (9º de EGB3)

b) Funciones. Operaciones con funciones elementales. Funciones polinómicas. (Polimodal)

Teniendo en cuenta el estudio de las funciones cuadráticas, en el presente trabajo focalizaremos en lagunas OML, expresadas como tareas.

En los diferentes trabajos efectuados en el marco de la TAD observamos que las OML que aparecen en las instituciones escolares son incompletas.

Las estructuras de las OML relativamente completas deben cumplir con la condición de la integración de los tipos de tareas, técnicas, tecnologías y teorías; y de las relaciones entre ellas. En todos los casos, el discurso tecnológico debe adquirir mayor funcionalidad, especialmente en la interpretación del funcionamiento de las técnicas y de su resultado.

En relación con las prácticas áulicas y del análisis de los libros de texto de las bibliotecas institucionales provisto por el Ministerio de Educación de la Provincia de Salta, realizado en los proyectos de investigaciones anteriores, expresamos en una tabla las tareas que se pueden realizar en el saber a enseñar “Función Cuadrática”:

Tabla 1: Tabla de posibles Tareas de la Función Cuadrática.

Tareas	Descripción de la Tarea
T_1	Descubrir la expresión algebraica de la función cuadrática a partir de la gráfica.
T_2	Graficar una función cuadrática a partir de la expresión $f(x)=x^2$.
T_3	Hallar dominio e imagen dada la representación gráfica de la función cuadrática.
T_4	Determinar el dominio e imagen de la función cuadrática definida por su expresión algebraica.
T_5	Determinar, a partir de la gráfica, las coordenadas del vértice de la curva que representa función cuadrática.
T_6	A partir de la expresión algebraica de la función cuadrática deducir las coordenadas del vértice de la curva.
T_7	Encontrar los puntos de intersección de la función cuadrática con el eje de abscisas.
T_8	Analizar la gráfica de la función cuadrática teniendo en cuenta los ceros de la función.
T_9	Estudiar, a partir de la gráfica de la función cuadrática, el concepto de simetría respecto de un eje vertical.
T_{10}	Hallar el eje de simetría de la expresión algebraica de la función cuadrática.
T_{11}	Analizar los máximos y mínimos de la gráfica de la función cuadrática.
T_{12}	Estudiar los máximos y mínimos a partir de la expresión algebraica de la función cuadrática.
T_{13}	Comparar las variaciones de las curvas al variar el/los parámetro/s.

T_{14}	Modelizar los fenómenos del mundo real utilizando funciones.
T_{15}	Graficar una función cuadrática a partir tablas presentadas con intervalos encajados.

Fuente: proyectos de investigación Nº1.171 y 1.494.

A modo de ejemplo, desarrollaremos dos tareas $\mathbf{T_1}$ y $\mathbf{T_5}$, con sus respectivas técnicas designadas como τ_{1i} y τ_{1j} respectivamente.

a) **T_1: Descubrir la expresión algebraica de la función cuadrática a partir de la gráfica.**

τ_{11}: A partir de la gráfica, se identifican algunos de los puntos pertenecientes a la curva, expresados como pares ordenados.

τ_{12}: A partir de la gráfica, se identifican algunos de los puntos pertenecientes a la curva a través de tabla de valores.

τ_{13}: A partir de la gráfica, se identifican algunos de los puntos pertenecientes a la curva, tabla de variaciones si trabajando con intervalos en los números reales.

τ_{14}: Del conjunto de puntos (x, y) obtenidos del plano cartesiano, se busca la expresión algebraica en ***x*** de la función. Como existen varias expresiones se analizan las diferentes gráficas y comparan:

τ_{141}: $y = f(x) = ax^2$; con $a = 1$, $a > 1$ y $a < 1$

τ_{142}: $y = f(x) = ax^2 + c$; con $a = 1$, $a > 1$ y $a < 1$

τ_{143}: $y = f(x) = ax^2 + bx$; con $a = 1$, $a > 1$ y $a < 1$

τ_{144}: $y = f(x) = ax^2 + bx + c$; con $a = 1$, $a > 1$ y $a < 1$

b) **T_5: Determinar a partir de la gráfica las coordenadas del vértice de la curva que representa a la función cuadrática.**

Se propone diferentes "maneras de hacer", es decir se recurre a distintas técnicas.

τ_{51}: Hallar los ceros x_1 y x_2 de la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$. A partir de los ceros obtener la abscisa del vértice $x_v = \frac{x_1 + x_2}{2}$ y la ordenada del vértice $y_v = f(x_v)$.

τ_{52}: Se sabe que el vértice de una parábola de ecuación $f(x) = ax^2 + bx + c$ tiene abscisa $x = -\frac{b}{2a}$ Luego la ordenada es $y = f\left(-\frac{b}{2a}\right)$.

τ_{53}: Al expresar la $f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a^2}\right)$. En esta expresión f(x) es mínimo cuando $x = \frac{-b}{2a}$ en cuyo caso $y = \left(c - \frac{b^2}{4a^2}\right)$. El vértice tiene coordenadas $\left(\frac{-b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a^2}\right)$. Con esta técnica se encuentra simultáneamente las coordenadas del vértice.

τ_{54}: La ordenada ***y***, del vértice, se obtiene a partir de la ecuación $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ de incógnita *x* con una única solución cuando *y*=0. El problema se transforma en encontrar las raíces de la ecuación cuadrática: $ax^2 + bx + c - y = 0$. La solución es única cuando el discriminante es igual a cero, $\Delta = b^2 - 4a(c-y) = 0$, es decir $y = \dfrac{-b^2 + 4ac}{4ac}$. La abscisa del vértice $x = \dfrac{-b}{2a}$.

τ_{55}: Sea $f(x) = ax^2 + bx + c$ y $f'(x) = 2ax + b$ y $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-b}{2a}$, la ordenada es $f\left(\dfrac{-b}{2a}\right) = \dfrac{-b^2}{4a^2} + c$

Es posible identificar las cuatro primeras técnicas correspondientes a la T_5 en las instituciones de "enseñanza secundaria" de nuestro país; la técnica τ_{55} aparece en el estudio de los elementos básicos del cálculo diferencial, en el primer año del ciclo universitario.

La existencia de las técnicas exige la justificación de su utilización; esto genera una argumentación clara y a este discurso se llama *tecnología*.

¿Cómo se construye ese marco tecnológico? En la institución, en la "clase de matemática", según los contratos didácticos, la construcción de la tecnología está a cargo del profesor. En consecuencia, los argumentos de justificación varían de una institución a otra. En el ejemplo para la técnica τ_{55} las condiciones tecnológicas de manipulación del símbolo de la derivada de una función cuadrática se justifican a través de las teorías siguientes:

Θ_5: *f* es derivable en [a, b], los máximos y mínimos absolutos están entre los puntos singulares y los correspondientes a los extremos del intervalos.

Θ_{51}: Resolver la ecuación $f'(x) = 0$ es encontrar las raíces x_1, x_2, x_3, x_4, x_5,…, que están entre ***a*** y ***b***.

Θ_{52}: Calcular *f(x)* para los valores de $x=a$, $x=x_1$, $x=x_2$, … y $x=b$. Con los valores de *f(a)*, $f(x_1)$, $f(x_2)$, … y *f(b)* se determina cuál es el máximo o mínimo.

Θ_{53}: Si hay algún punto de [a, b] en el que la función no sea derivable aunque sí continua, se calcula, además, el valor de *f* en ese punto; podría ser un extremo.

Θ_{54}: Si *f* no es continua en algún punto x_0 de [a, b], se calcula los límites $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ definida $f(x_0)$ y se compara los valores de *f* obtenidos en Θ_5.

Con la caracterización de las OML relativamente completas se puede enunciar algunas conjeturas emergentes del análisis de los libros de texto:

- Dependencia de la nomenclatura asociada a la técnica: fórmula para resolver las ecuaciones completas de segundo grado.
- Aplicar una técnica no incluye interpretar el resultado. Cuando se busca el punto donde la curva de segundo grado intercepta al eje de las abscisas, se resuelve la ecuación de segundo grado asociada a la curva, se obtienen las raíces y no se interpreta el significado de las mismas.
- Ausencia de diferentes técnicas para resolver la misma tarea.
- Ausencia de las tareas inversas, por ejemplo la T7 y T8.

En base a estas conjeturas se realizó el presente trabajo.

Metodología de trabajo

Se lleva a cabo un estudio exploratorio entre una metodología cualitativa y cuantitativa, con seis unidades de análisis: (1) Estudio de la OMR; (2) Estudio de las OML en las instituciones escolares; (3) Análisis de los diseños curriculares y los libros de texto; (4) Análisis de las evaluaciones de calidad de los años 1998, 1999, 2000 y 2001; (5) Puesta a prueba del instrumento de evaluación elaborado a partir de las recomendaciones didácticas de los ONE; y (6) Análisis de los resultados de los alumnos.

Estudio empírico del instrumento de evaluación

El estudio empírico fue realizado con veintidós alumnos de 2º Año de Polimodal (16-18 años), con 12 años de escolaridad, en una institución pública, la Escuela "25 de Mayo", ubicada en el centro de la ciudad de Salta, a la que concurren alumnos de nivel socioeconómico bajo, con el fin de analizar dos evaluaciones del tema función cuadrática. Este tema fue desarrollado por un alumno avanzado de la carrera Profesorado en Matemática, de la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional de Salta, con el equipo de la cátedra Práctica Docente, la docente del curso y el equipo de investigación.

El practicante abordó el tema en cuatro semanas de dos módulos de setenta minutos cada uno. Se centró en los objetos matemáticos y las representaciones de las técnicas utilizadas por los alumnos en la instancia evaluativa. La equivalencia de los diferentes registros y representaciones lleva a un examen en diferentes planos, que se tiene en cuenta en la evaluación a través de:

- Identificación y deducción de las fórmulas relacionadas con las funciones cuadráticas.
- Descripción y/o reconocimiento del dominio e imagen de la función cuadrática.
- Reconocimiento de las propiedades de las raíces de una ecuación cuadrática asociada a la función cuadrática.
- Relaciones entre coeficientes y los ceros de la función cuadrática.
- Análisis de las gráficas en base a máximos y mínimos de una función cuadrática.
- Reconocimiento de las diferencias y semejanzas de las diferentes funciones cuadráticas.

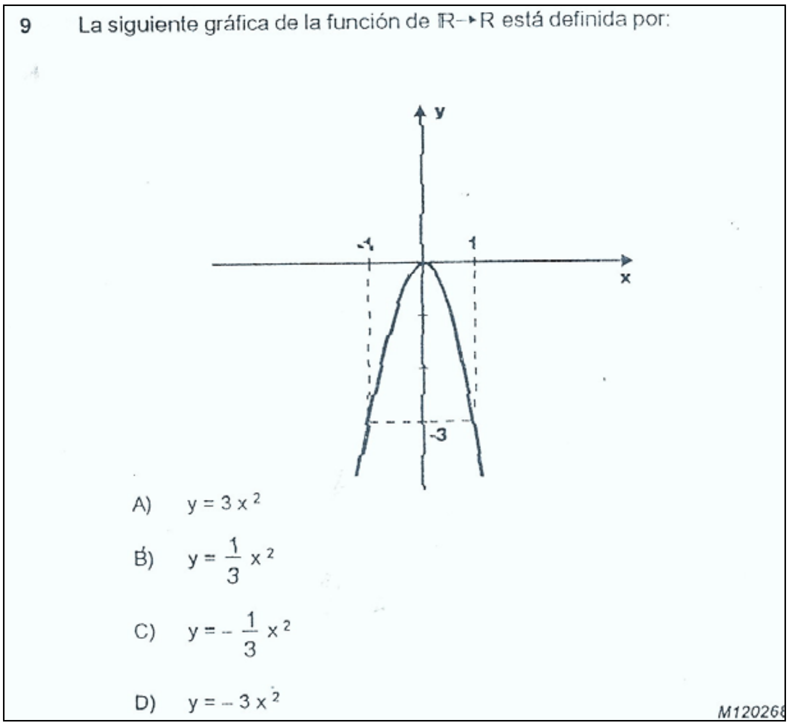
En relación con los criterios utilizados para el análisis de la producción de los alumnos se tiene en cuenta las siguientes categorías:

- Identificación, deducción y reconocimiento de la fórmula y elementos de una función cuadrática a partir de las gráficas.
- Reconocimiento las diferencias y semejanzas de las diferentes funciones cuadráticas.

Selección de los problemas para el estudio empírico a partir los ONE

La práctica más extendida en las instituciones escolares es organizar el proceso de enseñanza de la función cuadrática como entrenamiento para la resolución de ejercicios tipo.

En las Pruebas de Matemáticas del ONE, analizadas los años 1998, 1999, 2000 y 2001 (Ibarra et al. 2005), respecto del contenido "funciones", la capacidad evaluada es la de "conceptualizar", y relacionar el registro algebraico y el gráfico. A modo de ejemplo se presenta la siguiente tarea:


9 La siguiente gráfica de la función de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ está definida por:

A) $y = 3x^2$

B) $y = \frac{1}{3}x^2$

C) $y = -\frac{1}{3}x^2$

D) $y = -3x^2$

M12026

Figura 1. Tarea 9 correspondiente a la prueba de matemática. ONE 2001.

Los informes de los resultados y de la interpretación pedagógica de logros y dificultades llega a las diferentes instituciones escolares una vez concluido cada ONE de la Calidad Educativa. Estos informes plantean dificultades identificadas, consideraciones didácticas y actividades sugeridas para cada tema. Las instituciones no consideran en forma completa las tareas que se proponen en los ONE como objeto de enseñanza.

En función del análisis de los libros de texto y de las Pruebas de Matemáticas del ONE de la Calidad Educativa, se trabaja en la reconstrucción de la Evaluación para la experiencia. Se trabaja con dos instrumentos de evaluación, que se designa Evaluación I y Evaluación II.

La **Evaluación I** se realizó en forma individual en un módulo de 80 minutos de clase.

La **Evaluación II** en forma individual en horario extra clase (24 horas).

Para la selección de las actividades se tuvo en cuenta:

- Que la evaluación guarde coherencia con las prácticas áulicas.
- Que los contenidos conceptuales y procedimentales que se ponen en juego en la evaluación guarden correspondencia con las actividades realizadas en clase.

Evaluación I

Dada la gráfica

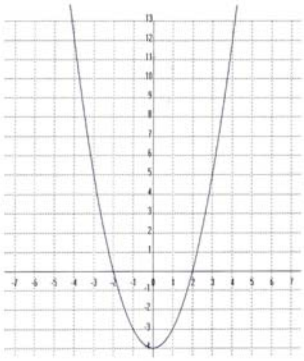


Figura 2. Gráfica del 1[er] ejercicio de la Evaluación I.

- Armar la tabla de valores correspondiente.
- Escribir la fórmula correspondiente a la gráfica.
- Identificar: Dominio e Imagen, Vértice, Eje de Simetría, Concavidad.
- Escribir tres semejanzas y tres diferencias entre la función encontrada y la función $y = f(x) = x^2$.

Evaluación II

- Representar gráficamente la siguiente función cuadrática $f(x) = (x-2)^2$.
- Identificar: Dominio e Imagen, Vértice, Eje de Simetría, Concavidad.
- Escribir tres semejanzas y tres diferencias entre la función encontrada y la función $y = f(x) = x^2$.

Análisis *a priori* de las evaluaciones

La tarea propuesta en el instrumento correspondiente a la **evaluación I** fue:

T_1: Descubrir la expresión analítica de la función cuadrática a partir de la gráfica.

A partir de la OMR se pueden identificar las técnicas:

τ_{12}: A partir de la gráfica, identificamos algunos de los puntos pertenecientes a la curva a través de tabla de valores.

Tabla 2

Tabla de valores correspondiente a la función $y = f(x) = x^2$

x	-4	-4,1	-4,5	-3	-3,1	0	0,2	1,1	1,8	2
y	12	12,81	16,25	5	8,61	-4	-3,96	-2,79	-0,76	0
x^2	16	16,81	20,25	9	9,61	0	0,04	1,21	3,24	4

Fuente: resolución del equipo de investigación. 2010.

τ_{141}: $y = f(x) = ax^2$; con $a = 1$, $a > 1$ y $a < 1$

Se compara la tabla obtenida de la gráfica con la tabla de valores de la función $y = f(x) = x^2$.

Se relacionan las dos últimas filas de la tabla, el valor de ***y***, difiere en 4 unidades del valor asignado a la variable x^2 ; por lo tanto la fórmula que expresa esta situación es

$y = f(x) = x^2 - 4$.

Con la fórmula correspondiente a la gráfica $y = x^2 - 4$ comparamos τ_{11} y τ_{141}.

τ_{11}: A partir de la gráfica se identifican algunos de los puntos pertenecientes a la curva; estos puntos se expresan como pares ordenados.

Del conjunto de puntos (x, y) obtenidos del plano cartesiano se busca la expresión algebraica en ***x*** de la función.

τ_{141}: $y = f(x) = ax^2$; con a=1, a>1 y a<1

Se compara la tabla de valores obtenida de la gráfica con la tabla de valores de la función $y = f(x) = x^2$.

Se comparan los pares ordenados de las funciones cuadráticas, $y = f(x) = x^2 = \{(-4,12),(-3,5),(0,-4),(1,-3),(2,0),(3,5)\}$ con la función $f(x) = x^2 + c = \{(-4,16),(-3,9),(0,4),(1,1),(2,4),(3,9)\}$ $x = 1$ en $f(x) = x^2 + c \Rightarrow f(1) = -3 \Rightarrow (1)^2 + c = -3 \therefore c = -4$; entonces $f(x) = x^2 - 4$.

T_3: Hallar dominio e imagen dada la representación gráfica de la función cuadrática.

τ_{31}: Para obtener dominio se despeja la variable dependiente ***y***; a partir de la expresión algebraica en ***x***, se analiza las restricciones de los valores de ***x***. Como no hay restricciones, el domino son los números reales (**R**).

τ_{32}: Para obtener el dominio, se observa en la gráfica qué sucede con la curva en los intervalos $x \leq 0$ y $x \geq 0$. Como a > 0, las ramas decrecen para los valores negativos de ***x*** y crecen para los valores positivos de ***x***. En consecuencia, el domino son los **R,** expresado como intervalo “cerrado” o intervalo “abierto”.

τ_{33}: Para obtener imagen se despeja la variable independiente ***x***, a partir de la expresión algebraica en ***y***, se analiza las restricciones de los valores de ***y***. Como no hay restricciones la imagen son los **R,** expresado como conjunto**.**

τ_{34}: Para obtener la imagen se despeja la variable independiente ***x***, a partir de la expresión algebraica en ***y***, se analiza las restricciones de los valores de ***y***. Como no hay restricciones la imagen son los **R**.

T_5: Determinar a partir de la gráfica las coordenadas del vértice de la curva que representa la función cuadrática

τ_{51}: Se halla las raíces x_1=2 y x_2 =-2 de la ecuación cuadrática asociada a la función $f(x) = x^2 - 4$. Se marca las raíces sobre el eje *x*. Como las raíces equidistan del eje de simetría, se promedia para obtener su ecuación y también la abscisa del vértice $x_v = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{2-2}{2} = 0$ y la ordenada del vértice $y_v = f(x_v) = f(0) = -4$. Luego el vértice V= (0,-4).

τ_{52}: Se compara la función $y = f(x) = x^2 + c$ con $y = f(x) = x^2$. Esta última función es simétrica respecto del eje ***y,*** el vértice es V (0,0) y es cóncava hacia arriba. El vértice (0, -4), en $y = x^2 + c$, el valor $-4 = 0^2 + c$, de donde c=-4. La expresión algebraica es $y = f(x) = x^2 - 4$.

τ_{53}: A partir de $y = f(x) = x^2 + c$ por propiedad cancelativa de los números reales se tiene:

$y - c = x^2$. De donde la ecuación canónica es $y - c = (x-0)^2$. V (0,c). Para $y = f(x) = x^2 - 4 \Rightarrow y + 4 = (x-0)^2$ el vértice es V (0,-4).

T_7: Encontrar los puntos de intersección de la función cuadrática con el eje x.

τ_{71}: En la gráfica se identifica los puntos (2,0) y (-2,0)

τ_{72}: Si y=0 se encuentra las raíces de la ecuación cuadrática $f(x) = y = x^2 - 4 = 0$. Se halla las raíces x_1=2 y x_2 =-2 y son los puntos donde la gráfica corta al eje x.

τ_{73}: En la tabla de valores se identifica la ordenada y=0 y su correspondiente abscisa.

Aparece así una relación entre la T_4 y T_5, emergente de las técnicas que se corresponden por ser una inversa de la otra.

T_9: Analizar, a partir de la gráfica de la función cuadrática, el concepto de simetría respecto de un eje vertical.

τ_{91}: El eje de simetría es $\boldsymbol{x=c}$ donde $\boldsymbol{c}$, es la coordenada en $\boldsymbol{x}$ del vértice. Importancia del vértice, por lo que se relaciona con la T_3.

τ_{92}: El eje de simetría de la función $y = ax^2 + bx + c$ es $x = \frac{-b}{2a}$. Si $\boldsymbol{x=0}$ coincide al eje $\boldsymbol{y}$.

La interrelación entre las técnicas permite comprobar la flexibilidad de las mismas.

T_{13}: Comparar las variaciones de las curvas al variar el/los parámetro/s.

τ_{131}: Se analiza el signo de $\boldsymbol{a}$, y según la concavidad se tiene un máximo o mínimo.

τ_{132}: Se ubica el vértice de la parábola y el eje de simetría que permiten, a través de la gráfica, estudiar el crecimiento de la función.

En esta síntesis se observa la interrelación entre las tareas y las técnicas, y entre las técnicas, lo que permite un trabajo matemático integrado. De esta manera se intenta revertir las conjeturas emergentes de los libros de texto y de las pruebas de evaluación de la calidad.

Análisis de la producción de los alumnos en la evaluación

Se presenta en la Tabla 2 criterios e indicadores de las tareas propuestas.

Tabla 3

Análisis de la producción de los alumnos en la evaluación. Criterios, Indicadores y Tareas.

CRITERIOS	INDICADORES	TAREAS
	Escribe la expresión analítica de la función cuadrática.	**T_1:** Descubrir la expresión analítica de la función cuadrática a partir de la gráfica.

Identificación, deducción y reconocimiento de la fórmula y elementos de una función cuadrática a partir de las gráficas.	Escribe el domino e imagen como conjunto. Escribe el dominio e imagen teniendo intervalo “cerrado” o intervalo “abierto”**.**	**T_3:** Hallar dominio e imagen dada la representación gráfica de la función cuadrática.
	Descubre el vértice a partir de las raíces como promedio para obtener su ecuación x_v y luego calcula $f(x_v)$. En la gráfica identifica las coordenadas del vértice. Calcula aplicando la fórmula $\left(\frac{-b}{2a}, c-\frac{b^2}{4a^2}\right)$.	**T_5:** Determinar a partir de la gráfica las coordenadas del vértice de la curva que representa función cuadrática.
	A partir del vértice de la parábola identifica la ecuación del eje de simetría. En la tabla de valores identifica la ordenada x=0 y su correspondiente ordenada. Encuentra el eje comparando las funciones.	**T_9:** Estudiar, a partir de la gráfica de la función cuadrática, el concepto de simetría respecto de un eje vertical.
Reconocimiento de las diferencias y semejanzas de las diferentes funciones cuadráticas.	Analiza el signo de ***a***. Cuando ***a* > 0** la concavidad es positiva y tiene un mínimo, y cuando ***a* < 0** la concavidad es positiva y tiene un máximo. Ubicación del eje de simetría. Compara las ceros de la función.	**T_{13}:** Comparar las variaciones de las curvas al variar el/los parámetro/s.

Fuente: informe proyecto de investigación Nº 1795. 2009.

Algunos resultados de la producción de los alumnos

Resultados de la Evaluación I, producción de los alumnos

El 68,18% resolvió todas las tareas; además, es posible analizar las técnicas utilizadas desde la producción de los alumnos. El 31,82% no resuelve ninguna tarea y la única técnica aplicada es de tabla de valores, pero incompleta y con errores de cálculo.

Todos resuelven la tarea $\mathbf{T_1}$ con la técnica τ_{12} y para descubrir la función cuadrática realizan los siguientes procedimientos:

- Construyen dos tablas separadas con diferentes valores para cada función y para comparar las funciones construyen una tercera tabla siguiendo el mismo orden de los valores asignados a la función $f(x)=x^2$.

  A continuación de las tablas escriben:

- $f(-1)=1$ para $f(x)=x^2$ y para $F(-1)=-3$ (1)
- $f(2)=4$ para $f(x)=x^2$ y para $F(2)=0$ (2)

  De (1) y (2), textualmente escriben “bajó cuatro lugares”. Luego $F(x)=x^2-4$. El significado de “bajar” para los alumnos es -4.

  Comparan dos tablas de valores y concluyen que las funciones difieren en 4.

Para hallar el dominio e imagen de la función **T_3** los alumnos analizan las gráficas de las dos funciones propuestas en la evaluación y expresan el dominio como conjunto (τ_{31}) y la imagen como intervalo (τ_{34}). Esto facilita la identificación de la ordenada del vértice de la parábola.

Identificado el vértice, la mayoría de los alumnos resuelve inmediatamente **T_9** y **T_{13}** a partir de la gráfica.

Los registros de las diferencias y semejanzas de las dos funciones consideradas son realizados en la gráfica y luego escritos en lenguaje simbólico.

Del 68,18% de los alumnos que resolvieron todas las tareas propuestas, el 53,33% obtiene nota superior a 8 (ocho), lo que se visualiza en el mapa de logros confeccionado para la experiencia, tema para seguir trabajando y estudiando en función de los problemas emergentes para sistematizar la información.

Resultados de la Evaluación II, producción de los alumnos

En los dos últimos años se promueve el trabajo que realizan los alumnos después de clase; trabajo que debe ser evaluado sistemáticamente todos los días y devuelto a los alumnos para ocuparse de los errores más frecuentes. De este modo, se reconstruyen las tareas y las técnicas y se profundizan las tecnologías y las teorías que las justifican. En esta instancia cobra sentido el mapa de logros que se utilizó durante la experiencia del año 2010, que se diferencia de la realizada en 2009 porque fue incluida dentro del proceso integral de evaluación.

El 45% de los alumnos cumple con las Tareas programadas para después de clase. Este porcentaje se fue incrementando semana a semana, ya que al inicio de la experiencia sólo un 10% entregaba la tarea.

Conclusiones

La construcción de la OMR, como su nombre lo indica, sirve como marco referencial para analizar la producción de los alumnos. Observamos que aparecen nuevas técnicas, creadas por los mismos estudiantes, que no fueron tenidas en cuenta en la construcción de OMR mencionada en este trabajo.

Los registros de los alumnos en el “Mapa de logros” y la sistematización de las diferentes tareas, técnicas, tecnología y teoría en tablas, como así también las actividades de seguimiento de los alumnos, están en proceso de validación en estos momentos. La complejidad de las interrelaciones entre las diferentes tareas y, como consecuencia, entre las diferentes técnicas nos invita a investigar tendiendo en cuenta una población más representativa.

Comparando las OML, las tareas propuestas en las evaluaciones y las actividades matemáticas desarrolladas por los alumnos en una institución determinada, concluimos que no se reconstruye una OML relativamente completa y no podemos esperar que los alumnos la reconstruyan por su cuenta. Es el caso de las evaluaciones propuestas por los ONE, en donde se prioriza la relación entre registro gráfico y algebraico, dando prioridad a la fórmula y a los parámetros de los mismos.

Según el marco teórico, libros de texto presentan tareas incompletas, ya que muestran:

- Técnicas sin justificar e interpretar el resultado.
- Falta de diversidad de técnica para resolver la misma tarea.

A partir de ello observamos un desfasaje entre las tareas presentadas en los libros de texto y aquellas propuestas en los ONE, de lo que inferimos que si el docente utiliza estos libros de texto a los alumnos les será imposible resolver la situación planteada en los ONE.

Queda abierto un amplio ámbito de investigación sobre las evaluaciones, que requerirá profundizar un desarrollo teórico de la TAD para abordar el problema general de la articulación del currículum de Matemática.

Bibliografía

Bodín, A. (1997). L`evaluation du savoir mathematiques. Questions el methods. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Vol. 17/1, pp. 180-191. Grenoble: La Pensée Sauvage Éditions.

Bosch, M., C. Fonseca & Gascón, J. (2004). Incompletitud de las Organizaciones Matemáticas Locales en las Instituciones Escolares. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 24, n º 2.3, pp. 205-250. Grenoble: La Pensée Sauvage Éditions.

Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique.* Grenoble: La Pensée Sauvage Éditions.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 19/ 2.3, pp. 221 - 266. Grenoble: La Pensée Sauvage Éditions.

Chevallard, Y., Bosch, M. & Gascón, J. (1997). Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje. Barcelona: ICE -Horsori.

Jimenez Rodriguez, J. (1997). Evaluación en Matemática: una integración de perspectivas. Madrid: Editorial Síntesis.

Ibarra L., Alurralde, F. & Nieva, M. (2005). La función cuadrática en EGB3. *Memorias del VII SEM. Simposio Educación Matemática* (CD-ROM). Chivilcoy, Argentina.