La enseñanza inicial de la demostración: un manual para docentes

Diana Marcela **Lourido** Guerrero
Universidad del Valle- Instituto de Educación y pedagogía
Colombia
dianalourido@yahoo.com
Carlos **Melán** Jaramillo
Universidad del Valle- Instituto de Educación y Pedagogía
Colombia
cmj617@hotmail.com

Resumen

Proyecto que pretende identificar y destacar en la investigación desarrollada por Pilar Ponce de León[1], elementos que permitan sentar las bases para crear un manual dirigido a docentes en ejercicio, que comunique las reflexiones y resultados de dicha investigación y al mismo tiempo brinde elementos curriculares y didácticos en torno a la enseñanza de la demostración. Así, el marco teórico se inscribe principalmente en los trabajos de y su grupo Duval (2001, 2004), además de Balacheff (2000), que para el interés de este proyecto son los más influyentes desde la perspectiva cognitiva. Por otro lado, las condiciones para construir el manual como un documento de divulgación son planteadas desde la teoría de recursos pedagógicos de Trouche y Guin.

Palabras clave: perspectiva semiótica, demostración, razonamiento deductivo, recurso pedagógico, figuras geométricas.

Planteamiento del problema

Se reconoce, como hipótesis inicial la potencia de la geometría para realizar los trabajos iníciales en la enseñanza de la demostración y del razonamiento deductivo, esto porque permite realizar conversiones entre los distintos registros de representación que le son propios: la lengua natural, el registro figural y el lenguaje simbólico. Más aún, esta posibilidad de realizar conversiones, presenta una característica interesante en la aproximación cognitiva, sí se considera que los objetos matemáticos solo son accesibles por medio de sus representaciones semióticas, la geometría privilegia por tanto el desarrollo de capacidades de razonamiento, visualización y análisis de los estudiantes. Sin embargo, no cualquier tipo de geometría es

[1] (Ponce de León, 2007)

pertinente para los fines vistos anteriormente, debe tratarse de una geometría discursiva, es decir aquella en la cual la validación que se haga sobre proposiciones, que son el resultado del trabajo con figuras, sea deductiva, no solo el resultado de observaciones y mediciones.

De otra parte, se encuentra el análisis sobre las características propias de la demostración, esto es, comprender el tipo de funcionamiento específico que posee en virtud de las características discursivas que le son propias. En otras palabras, se tienen por lo menos dos exigencias cognitivas para la enseñanza de la demostración; comprender el funcionamiento del razonamiento deductivo, además de saber cómo es que el trabajo con las figuras brinda elementos para su comprensión. En este sentido, es posible afirmar que alguien ha aprendido a demostrar cuando es capaz de entender cómo opera el razonamiento deductivo, qué propósito tiene, en qué fundamenta su validez además de saber qué otro tipo de razonamientos produce (Duval, 2004).

Con respecto al rol desempeñado por las figuras en la comprensión del razonamiento deductivo, se tiene que del tipo de aprehensión que se haga de estas se desprende un tipo particular de geometría, bien sea de acción o aquella que se conoce como geometría discursiva, que según la perspectiva en la cual se enmarca este proyecto es la deseable, pues en ella tiene lugar la demostración. A su vez, llegar a esta geometría discursiva involucra un cambio en las reglas de juego en donde la validez de los hechos parta de la deducción y no de lo observable, tal cambio implica el tránsito entre las diferentes formas de aprehender las figuras. En síntesis, el papel que juegan las figuras permite dilucidar la idea de que la validación que se espera en matemáticas es discursiva y no experimental, en tanto se haga el paso de una geometría de observación y medición (acción) a una geometría discursiva.

Ahora bien, dado que el propósito del presente proyecto es el de construir un manual en el cual se retomen las consideraciones teóricas aquí explicitadas, se hace necesario reconocer que a pesar del esfuerzo que se ha hecho en Colombia por divulgar todos los trabajos sobre la enseñanza de la demostración, aún prevalece la dificultad del hecho que, por lo general, todas esas investigaciones de punta se quedan entre la comunidad académica y los maestros en formación, en pocas palabras, no llegan a la escuela. Es por esto que se requiere existan documentos que además de presentar una teoría sobre la enseñanza de la demostración, brinden elementos para el desarrollo de clases donde esta se materialice. En este sentido, al hacer un rastreo bibliográfico sobre este tipo de documentos se pueden destacar los de (Perry et ál, 2006) y (Samper et ál, 2003). No obstante, estos últimos exigen que el maestro regrese a la teoría antes de implementarlo en la clase.

En consecuencia, se han de precisar las condiciones de elaboración de este manual, por otro lado, reconocer el lugar que ocupan los manuales en la escuela, el rol que juegan en la movilización de conocimiento, además de los aportes curriculares que traen consigo. Para este fin, se inscribirá el manual desde la teoría de los recursos pedagógicos de L. Trouche y D. Guin, la cual ha sido trabajada por los investigadores (Arce *et ál*, 2010); teoría que espera caracterizar y aportar las bases del manual como un documento que repercuta en la modificación de la práctica docente.

Finalmente, teniendo en cuenta las consideraciones sobre la problemática relativa a la enseñanza y el aprendizaje de la demostración, en términos de la perspectiva semiótica anteriormente explicitada, además de las concepciones en torno a manual, visto como recurso pedagógico, la intención de este proyecto es el de encontrar elementos para responder o ampliar el siguiente cuestionamiento:

¿Cómo presentar en un manual, recurso pedagógico, investigaciones acerca de la enseñanza de la demostración, logrando que estas se materialicen en lineamientos para el desarrollo de una clase?

Fundamentación teórica

Resulta pertinente aquí, explicitar que el razonamiento se encuentra intrínsecamente ligado a la utilización de un lenguaje, lo cual implica considerarlo como un recorrido discursivo en el cual cada proposición enunciada es un acto completo de discurso o unidad apofántica, esto es, la especificidad del sentido conferido al razonamiento debe buscarse en su valor. Dicho de otra manera, el sentido de las proposiciones implicadas en el razonamiento trasciende al contenido de las mismas.

Los valores que intervienen en la comprensión del sentido de un razonamiento son el valor lógico de verdad o falsedad; el valor epistémico de certeza, de necesidad, de verosimilitud, de posibilidad o de absurdidad; el valor social de pregunta que obliga una respuesta, de orden para ejecutarse, de deseo, de promesa, etc. De otra parte, considerar el razonamiento como un recorrido discursivo implica el hecho de que las proposiciones enunciadas en él, no pueden ser separadas de su contexto de enunciación (Duval, 2004).

Adicionalmente, dado que la demostración es una actividad matemática que presenta unas formas de organización discursiva comparable con la deducción a partir de un sistema de axiomas y definiciones (razonamiento deductivo) se hace necesario definir cómo opera. Esto es, responder a las siguientes preguntas: ¿Qué función cumple un razonamiento? ¿Qué operaciones se requieren para llevar a cabo este tipo de desarrollo discursivo? ¿En qué se fundamenta la validez de un razonamiento? Además de ¿Qué tipo de saberes científicos produce? Para tal fin, se hace una revisión de los análisis desde la perspectiva semiótica desarrollada por Duval (2004) y puesta en escena por Ponce de León (2007).

El primero de estos análisis llamado, análisis funcional, permite reconocer la naturaleza de las expansiones discursivas reconocidas como razonamiento, además de caracterizar sus diferencias, para ello considera aquellas démarches[2] intrínsecamente vinculadas a la utilización de un lenguaje, solamente en estos términos se establece la validez de tal o cual razonamiento.

En este sentido, el razonamiento puede definirse como la forma de expansión discursiva que está orientada hacia un enunciado-objeto con el propósito:

-De modificar el valor epistémico, semántico o teórico, que ese enunciado-objeto tiene en un estado de conocimiento dado, o en un medio social dado,

-Y, en consecuencia, de modificar el valor de verdad cuando se cumplen ciertas condiciones particulares de organización discursiva. (Duval, 2004).

El segundo, análisis estructural, determina las operaciones requeridas para llevar a cabo el desarrollo discursivo presente en el razonamiento, estableciendo en primera instancia los niveles

---

[2] En francés, el término démarche, tiene varios sentidos. En primer lugar se emplea para aludir al modo como se desenvuelve alguien, a su “manera de caminar”. En un sentido más amplio, se emplea para referirse a todo lo que alguien hace para llegar a un resultado, incluidas las falsas pistas abandonadas. (Duval, 2004).

de organización en los cuales estas operaciones toman lugar. El nivel local permite identificar las formas de razonamiento posible, definiendo cómo se pasa de una premisa a la conclusión, el nivel global, determina la progresión entre pasos. Las formas de razonamiento posible, dependen de las características de las proposiciones enunciadas, esto es, sí hacen parte o no de un contexto teórico y si cuentan o no con un tercer enunciado. Cabe anotar, que el razonamiento deductivo se encuentra dotado de un contexto teórico (las matemáticas), además sus proposiciones tienen tercer enunciado, garantizando en su organización la aparición de las operaciones de verificación (determinación de la validez de la premisa o premisas del tercer enunciado) y desprendimiento o extracción (consecuencia del tercer enunciado una vez validada la existencia de las premisas). Del mismo modo, el funcionamiento entre los pasos -nivel global- requiere de la operación de sustitución, la cual establece que una vez que se obtenga la conclusión del paso, esta se retoma como la premisa del siguiente paso, hasta llegar a la conclusión buscada o enunciado-objeto.

Para el análisis lógico se tiene que este permite dilucidar las condiciones de organización de un paso de razonamiento deductivo para que los valores epistémicos y de verdad del enunciado que se constituyen en el enunciado-objeto, sean modificados. Es decir, establece cómo es que la organización de las proposiciones produce una y solo una conclusión.

Finalmente, el análisis epistemológico aborda el problema del aprendizaje de la demostración a partir de la comprensión de las definiciones en matemáticas, esto es, aborda los problemas de la heterogeneidad de las definiciones, además del papel intuitivo de las figuras en el acceso cognitivo a los objetos matemáticos, en relación con las proposiciones que los enuncian.

Los anteriores análisis, fundamentan la aproximación didáctica a elaborar con respecto a la enseñanza de la demostración, definiendo además esta última como, "un texto matemático que presenta la organización específica del razonamiento deductivo, es decir, que está estructurado en dos niveles: la organización de los pasos, por un lado; y, por el otro, el establecimiento de la continuidad entre los pasos por substitución, para obtener, partiendo de las hipótesis, la conclusión buscada, a través del uso de definiciones y teoremas". (Ponce de León, 2007).

Tomando como referencia los distintos análisis sobre el funcionamiento del razonamiento deductivo Duval-Egret realizaron una propuesta para la enseñanza inicial de la demostración. Dicha propuesta¸ compuesta por tres etapas, fue retomada y puesta en escena por Ponce de León (2007), como sigue:

Primera etapa:

- Construcción y exploración de figuras.
- Formulación de conjeturas.
- Distinción del antecedente y del consecuente de tercer enunciado.

Segunda etapa:

- Discusión y búsqueda de propiedades
- Puesta en común

Tercera etapa:

- Construcción de grafos proposicionales

- Redacción de la demostración.

La primera etapa, denominada etapa heurística, tomando como base la posibilidad intrínseca de convertir todas las proposiciones que intervienen en una demostración en el registro de sus representaciones figurales, evidencia el soporte intuitivo que proporcionan las figuras, al permitir explorar, anticipar y formular conjeturas. En este sentido, la etapa heurística, vincula un uso especializado de la lengua natural, además de un tratamiento pertinente de las figuras a partir de tres momentos: construcción y exploración de figuras, formulación de conjeturas y la distinción del antecedente y el consecuente del tercer enunciado.

De ahí que, se inicie por describir el soporte intuitivo de una figura y cuál puede ser su aporte heurístico en la resolución de un problema geométrico, distinguiendo para tal fin, el tipo de aprehensión sobre la figura, a saber, perceptiva, operatoria y discursiva (Marmolejo, 2007). El primer tipo, aprehensión perceptiva, captura la figura de un primer vistazo y de forma automática, en forma independiente del enunciado; está ligada a las leyes gestálticas de organización de la percepción, particularmente a la ley de cierre. El tratamiento cognitivo es inconsciente e inmediato. Este tipo de aprehensión puede tener un rol inhibidor o facilitador en la comprensión de un problema. La aprehensión operatoria, de otro lado, se centra en las diferentes modificaciones de la figura y sus consecuentes reorganizaciones perceptivas. Los tratamientos dan lugar a operaciones de reconfiguración intermediarias, es decir de reagrupamientos de las sub-figuras. Una figura de partida se puede dividir en diversas sub-figuras a partir de los cuales se puede transformar en otra figura de un contorno global diferente o no. Los tratamientos asociados a esta aprehensión son: modificaciones mereológicas, que consisten en partir y añadir trazos sobre la figura para reconfigurarla en otra; las cuales ponen en juego las relaciones entre la parte y el todo. Las modificaciones posicionales, que conciernen la orientación y la ubicación en el medio. Se trata la mayoría de las veces de rotaciones y translaciones. Por último, las modificaciones ópticas, las cuales consisten en transformar una figura en otra, llamada su imagen. Pueden ser ampliaciones o reducciones.

Por último se tiene la aprehensión discursiva, la cual está ligada a las propiedades asociadas a las hipótesis, por lo tanto la figura es de alguna manera un fragmento del discurso teórico. Requiere una doble referencia: una red semántica de objetos matemáticos y una axiomática local. La aprehensión discursiva de una figura tiene que ver exclusivamente con el estatus que el enunciado da a sus proposiciones. El tipo de experiencia con la figura de esta aprehensión es la llamada experiencia figural en geometría, que consiste en que a través del enunciado se explicitan propiedades pertenecientes a un corpus teórico. En este sentido, con respecto a las figuras se tiene que, a cada tipo de aprehensión figural le corresponde un modo particular de hacer geometría y por tanto de acercarse a la demostración, de tal suerte que deba privilegiarse la aprehensión discursiva de entre todas, pues es justo ahí donde la demostración tiene lugar. De otra parte, la aprehensión discursiva, da cuenta de la relación indisoluble entre demostración en geometría y las figuras.

En cuanto al segundo momento de la segunda etapa, formulación de conjeturas, se tiene que una vez establecida la conjetura, aparece como un estatus teórico en el nivel local del paso de razonamiento y toma un lugar preponderante ya que el reconocimiento de éstas marca el inicio de la distinción entre el contenido y el estatus de una proposición, ya que dicho reconocimiento implica –de parte del estudiante- el hecho de que no basta con lo observado en un figura para aceptar o no la formulación de una propiedad o el establecimiento de un resultado. Entonces, la posibilidad de formular conjeturas, de reconocer su lugar en un recorrido discursivo y en la solución de un problema es un aspecto central en el aprendizaje del funcionamiento de los razonamientos deductivos. Se necesita por lo tanto de un acercamiento a las conjeturas, a su formulación por parte de los estudiantes en el marco de un trabajo de exploración y búsqueda consciente; en este sentido Larios ha propuesto una definición de éstas:

[…] una situación más “experimental”, donde el individuo, puesto en una situación en particular, observa los hechos, los analiza, compara, encuentra un patrón y hace una afirmación, para posteriormente encontrar argumentos que la sustenten. Tales argumentos están relacionados íntimamente con las experiencias previas al momento de hacer la afirmación, además de que ésta, hasta antes de proporcionar argumentos deductivos (es decir una demostración), es una conjetura […]. Es importante recalcar que no se puede probar conscientemente algo si antes no fue conjeturado. (Larios, 2001).

Este trabajo de búsqueda y formulación de la conjetura ha de distinguirse, como se señala más adelante, con el trabajo de búsqueda de los argumentos que la sustente, son dos procesos distintos aunque necesariamente relacionados.

Finalmente en esta primera etapa se identifica, la distinción entre antecedente y el consecuente de un tercer enunciado, tiene que ver con el análisis lógico, en términos de la naturaleza bipartita de los enunciados en matemáticas, particularmente de la estructura *si-entonces* del tercer enunciado. Esto es, reconocer que tanto el antecedente como el consecuente son proposiciones, además el antecedente corresponde a la(s) premisa(s)[3], mientras que el consecuente corresponde a la conclusión. Comprendiendo así que el tercer enunciado es otra proposición cuyo propósito es la articulación entre el antecedente y el consecuente.

La segunda etapa, busca identificar los procedimientos heurísticos asociados a la resolución de un problema en geometría, además permite caracterizar la dinámica de una clase que permita la discusión. En este sentido, esta etapa se divide en dos partes: discusión y búsqueda de propiedades y puesta en común. La primera parte de esta etapa, discusión y búsqueda de propiedades, alude a las distintas formas en las que un estudiante aborda una situación (problema geométrico), además de caracterizar las situaciones que aportan a la comprensión del razonamiento deductivo. En ese sentido, Balacheff (2000) caracteriza dos tipos de situaciones inducidas por las actividades sugeridas a los estudiantes, están son las de esfera de práctica y las situaciones de decisión, dentro de las últimas se caracterizan las condiciones para que estas últimas se constituyan en situaciones de validación. En el primer tipo se trabaja de forma mecánica aplicando los conocimientos adquiridos, siguiendo procesos rutinarios, lo cual no genera nuevos conocimientos; en el segundo tipo se construyen conjeturas con el fin de diseñar estrategias que lleven a la resolución de una situación problema y en el último tipo el estudiante socializa sus explicaciones acerca de una afirmación, lo cual se aproxima a la demostración.

Balacheff (2000) distingue dos tipos de pruebas, las cuales le permiten al estudiante convencer y convencerse acerca de una conjetura; producto de una de situación de validación, estas se conocen como, las formas pragmática e intelectual de abordar un problema geométrico; en las pruebas pragmáticas, los estudiantes recurren a la acción u ostensión sobre una figura para

[3] Desde la perspectiva teórica en la cual se enmarca este trabajo, resulta fundamental explicitar que una de las características que distinguen al razonamiento deductivo de otro tipo de demarches de razonamiento, es la posibilidad de que existan una o varias premisas en él.

establecer o justificar conjeturas. Se fundamentan en observaciones y construyen razones personales o grupales para tener confianza en ellas. En este tipo de pruebas lo que el estudiante busca o trata de ilustrar es la eficacia de la conjetura que propone y el modo para llegar a ella, aquí se puede tipificar el empirismo ingenuo, la experiencia crucial y el ejemplo genérico. Por su parte en las pruebas intelectuales, los estudiantes se apoyan en propiedades y relaciones geométricas. El proceso se fundamenta en la toma de conciencia del carácter genérico de las situaciones consideradas. Los estudiantes se alejan de acciones específicas que dan solución a casos particulares y del proceso de solución, para convertir el conocimiento en objeto de reflexión y discusión. De aquí, es importante reconocer el paralelo existente entre estas formas de validar en geometría y las formas de aprehensión de las figuras. Se evidencia además que, es en virtud de este mismo paralelo, que se puede establecer la necesidad de un trabajo sobre la aprehensión operatoria para lograr el afianzamiento de las propiedades geométricas.

La segunda parte de la segunda etapa, alude a la puesta en común, aquí conviene explicitar la labor de un docente que quiera incorporar esta propuesta, en términos del rol que deberá jugar en el desarrollo de la clase. Esto es, dejar de ser el actor principal en la escena, permitiendo a los alumnos desarrollar su trabajo autónomamente, constituyéndose en un guía y organizador del aprendizaje. En este sentido, el carácter de las situaciones propuestas por el docente se transforma, de instruccional (tipo, “pruébese que…”) a experimental.

> Un primer diagnóstico acerca de cuáles podrían ser los orígenes de la dificultad para enseñar y aprender la demostración en matemáticas ha sido formulado en términos de la naturaleza del contrato didáctico que emerge naturalmente de las posiciones del alumno y el docente con respecto a los saberes en juego. Dado que el docente es el garante de la legitimidad y de la validez epistemológica de lo que se construye en la clase, eso parecería implicar que el alumno se vería privado de un acceso auténtico a una problemática de la verdad y de la prueba. La superación de esta dificultad inherente a los sistemas didácticos puede ser investigada en situaciones que permiten la devolución a los alumnos de la responsabilidad matemática sobre sus producciones, lo que significa la desaparición del docente de los procesos de toma de decisión durante la resolución de un problema en favor de un esfuerzo de construcción de medios autónomos de prueba por parte de los alumnos (Balacheff, 2000).

Finalmente la tercera etapa de este modelo de Duval-Egret, contempla la construcción de grafos y la redacción de la demostración. La construcción de grafos da cuenta de la necesidad de pasar por un registro no discursivo, como es el de los grafos proposicionales[4]; esto, por dos razones. La primera, para no caer en el círculo vicioso de explicar un discurso por medio de otro discurso explicativo, es decir, quedar encerrado en el mismo registro. La segunda, la aprehensión sinóptica o vista global del grafo corta la linealidad del discurso, indispensable para su recontextualización (Ponce de León, 2007). La demostración por su parte, debe redactarse como una traducción del grafo utilizando actitudes proposicionales, esto con el fin de recuperar los valores epistémico teóricos, ocultos por el grafo.

Dado que, es importante que los valores epistémicos teóricos se diferencien de los valores epistémicos semánticos y que estos últimos ya no se asimilen a los valores de verdad, la redacción en lengua natural de la demostración se presenta como una traducción del grafo, privilegiando actitudes proposicionales (frases cortas provistas de un verbo, como: puedo concluir, ya demostré que, tengo que…) que marcan el estatus operatorio de las proposiciones.

[4] Reglas de construcción de grafos: De una hipótesis parte una flecha (no llega), del y al tercer enunciado parten y llegan flechas (nudo), llega una flecha a la conclusión, siempre y cuando sea la conclusión final ya que, en el caso contrario, parte una flecha.

Metodología

Para la producción del documento de divulgación, sobre las exigencias y costos cognitivos para la enseñanza de la demostración al que se ha denominado manuales, la metodología se divide en tres fases:

Fase 1: Apropiación de los elementos teóricos de la tesis de Ponce de león y por tanto la propuesta didáctica de Duval-Egret, además de la teoría de recursos pedagógicos de Trouche y Guin.

Acotación de los objetos geométricos que servirán de base para el diseño de la propuesta, en este caso la geometría del triángulo para los grados octavo, noveno de la educación básica colombiana.

Fase 2: Elaboración y aplicación de talleres piloto para maestros en ejercicio con el fin de recoger información sobre la comprensión y funcionamiento del razonamiento deductivo y la demostración, a la luz de las actividades presentadas, utilizando elementos de la etnografía educativa como las entrevistas a informantes claves (interacción entre autores y maestros) y la observación participante.

Fase 3: Análisis del producto del trabajo con maestros, lo cual brinda los elementos conceptuales para la elaboración y redacción del manual tomando en consideración sus dudas, sugerencias y aportes.

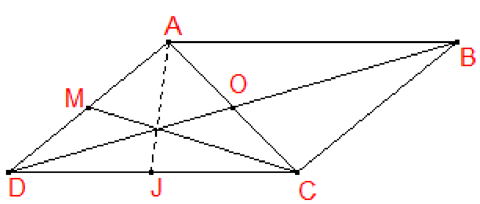
Redacción del manual y socialización de este con los maestros

Resultados y discusión

En cuanto a las figuras, es posible afirmar que estas adquieren su mayor potencia heurística, esto es, permiten formular conjeturas, si se ha aprendido a ver sobre ellas, esto es haciendo un trabajo específico sobre los distintos tipos de aprehensiones.

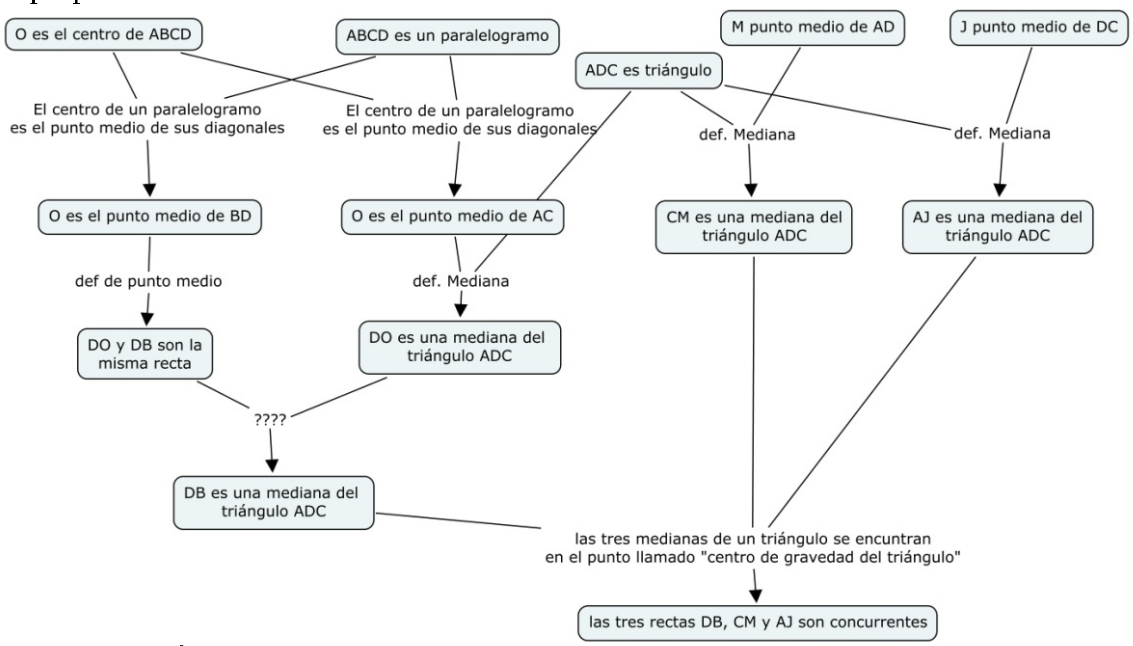
Por ejemplo dado el siguiente teorema, su demostración solo será posible si se reconoce en el paralelogramo los triángulos claves que lo constituyen, de donde, visualmente se denota la concurrencia de los segmentos dados.

ABCD es un paralelogramo de centro O. M y J son los puntos medios de AD y DC, respectivamente. Demostrar que las rectas AJ, CM y BD son concurrentes.



Modelo de un grafo proposicional y su respectiva demostración. Elementos claves de la tercera etapa.

Grafo proposicional:



Demostración:

O es el centro del paralelogramo ABCD. Se sabe que este es el punto donde se encuentran las diagonales BD y AC por tanto es punto medio las diagonales BD y AC. O es entonces el punto medio de AC y por la definición de mediana, se puede afirmar que DO es una mediana del triángulo ADC. Pero como O también es punto medio de BD, por definición de punto medio Do y DB son la misma recta, he demostrado que DB es una mediana del triángulo ADC. De otra parte, por hipótesis tengo que M y J son puntos medios de AD y DC respectivamente y O es el punto medio de AC, se tiene que ADC es un triángulo cuyas medianas son CM y AJ. Se tiene entonces que las tres rectas DB, CM y AJ, siendo las tres medianas del triángulo ADC se puede concluir que son concurrentes, como se quería demostrar.

Siguiendo con el mismo teorema en el grafo que corresponde a su demostración las hipótesis se ubican en la parte superior, se identifica así de manera inmediata tal estatus operatorio, el de hipótesis, éste prima además en virtud del contenido mismo de las proposiciones. Adicionalmente, en términos de la aprehensión sinóptica propia del grafo, es posible identificar en éste cada paso de razonamiento, por ejemplo: O es el centro de ABCD (estatus operatorio: hipótesis). El centro de un paralelogramo es el punto medio de sus diagonales, definición de punto medio (estatus operatorio: tercer enunciado). O es punto medio de BD (estatus operatorio: conclusión del paso). En este sentido, la demostración es el resultado de la concatenación de los distintos pasos, donde la operación que permite su desarrollo es la sustitución, algo así como un reciclaje, donde la conclusión de un paso viene a ser la hipótesis de otro, hasta llegar a la conclusión final.

Lo anterior tiene da cuenta del grafo y su lectura, sin embargo, se tiene para la redacción en lengua natural de la demostración la importancia de recuperar mediante actitudes proposicionales los valores epistémicos, tales como, tengo que… por tanto puedo concluir que, es explicita así el carácter necesario de la verdad de la proposición a demostrar.

Con el fin de que el manual se constituya en efecto en una guía para el docente, permitiéndole desarrollar una clase para la enseñanza inicial de la demostración, este ha de ser autocontenido, contar con cuatro secciones, a saber, introducción y marco teórico de la perspectiva semiótica para la enseñanza de la demostración, presentaciones de figuras y grafos como el visto anteriormente además de algunas sugerencias para el docente, en términos de actividades e interpretaciones de la teoría.

Conclusiones

En cuanto al manual se retoman los siguientes aspectos

-La iniciación a los procesos demostrativos ha de hacerse en geometría

-La validación en Matemáticas es discursiva y no experimental.

-Hay un cambio en la actividad matemática cuando se pide una demostración: ya no se busca la solución de un problema sino la validación de una conclusión.

-Los enunciados matemáticos tienen una estructura bipartita: antecedente y consecuente.

-Que hay que pasar de una geometría de observación y medición a una geometría discursiva.

-Que hay que desarrollar una aprehensión discursiva de las figuras, esto es, lograr que los estudiantes comprendan qué propiedades esconden o ilustran las figuras.

-La comprensión de la organización del razonamiento deductivo, se logra a través de la construcción de grafos proposicionales.

-La redacción de la demostración en lengua natural es importante no solo porque refleja la estructura del funcionamiento deductivo sino porque además permite dilucidar los valores epistémicos, esto es solo se comprende la necesidad de la verdad de las proposiciones a demostrar.

-La potencia heurística de las figuras tendrá sentido si y solo si el lugar de la verdad se desplaza del maestro a los estudiantes, lo cual se verá expresado en la naturaleza de las situaciones que planteen.

Limitaciones del estudio

Una limitación evidente es que este tipo de trabajo no toma en consideración la validación producida por los softwares de geometría dinámica, es decir se requiere para el funcionamiento de esta propuesta un trabajo con la axiomática presente en la geometría euclidiana.

Referencias y Bibliografía

Arce, Jorge; Castrillón, Gloria; Garzón, Diego; Pabón, Octavio y Vega, Myriam. (2010). Caracterización de los vínculos entre los recursos pedagógicos y el conocimiento matemático en la enseñanza de las matemáticas en la educación básica.Seminario. Santiago de Cali: Grupo de Educación Matemática, Universidad del Valle (inédito).

Balacheff, Nicolas. (1999). *¿Es la argumentación un obstáculo?: invitación a un debate*. Recuperado el 27 de Septiembre de 2009, de International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof. (publicación en linea). Disponible desde internet en: <http://www.didactique.imag.fr/preuve/newsletter/990506theme/990506themeES.html>

Balacheff, Nicolas. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*. Una empresa docente. Bogotá: Universidad de los Andes.

Camargo Uribe, Leonor; Samper, Carmen; Leguizamón, Cecilia. (2003). Tareas que promueven el razonamiento en el aula a través de la geometría. Cuadernos de Matemática Educativa. Bogotá: ASOCOLME.

Duval, Raymond. (2001). Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y la formas superiores en el desarrollo cognitivo. (M. Vega Restrepo, Trad.). Santiago de Cali, Colombia: Merlín I.D.

Duval, Raymond. (2004) Semiosis y pensamiento humano, Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. (Trad: Myriam Vega) .Santiago de Cali: Grupo de Educación Matemática, Universidad del Valle.

Goetz, Judith P. y LeCompte, Margaret D. (1988). Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa. Madrid: Morata.

Larios Osorio, Victor. (2001). Demostraciones y conjeturas en la escuela media. Revista electrónica de Didáctica de las Matemáticas, 3, 45-55. Obtenido en la red mundial en octubre de 2001: http://www.uaq.mx/matematicas/redm/art/a0703.pdf

Marmolejo Avenía, Gustavo. (2007). Algunos tópicos a tener en cuenta en el aprendizaje del registro semiótico de las figuras geométricas: procesos de visualización y factores de visibilidad. Santiago de Cali: Maestría en Educación Matemática, Universidad del Valle.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. En MEN, Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas. Bogotá: MEN.

Perry, Patricia; Camargo, Leonor; Samper, Carmen; Rojas Morales, Clara. (2006). Actividad demostrativa en la formación inicial del profesor de matemáticas. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Ponce de León, Pilar. (2007). Enseñanza inicial de la demostración matemática en la educación básica desde una perspectiva cognitiva. Santiago de Cali: Grupo de Educación Matemática, Universidad del Valle.