Determinación de Soluciones Espurias para Ecuaciones Irracionales

Larry **Mendoza**
Línea de Investigación de Matemática Aplicada, Universidad Nacional Experimental Politécnica "Antonio José de Sucre" – Vicerrectorado "Luis Caballero Mejías" (UNEXPO)
Venezuela
prodimat@gmail.com
José Luis **Vásquez**
Departamento de Ciencias Básicas, Universidad Nacional Experimental Politécnica "Antonio José de Sucre" – Vicerrectorado "Luis Caballero Mejías" (UNEXPO)
Venezuela
Franklin **Colina**
División de Estudios para Graduados, Facultad de Humanidades y Educación, Universidad del Zulia (LUZ)
Venezuela
colina_2828@hotmail.com
Manuel **Serafin Plasencia**
Departamento de Ciencias Básicas, Universidad Nacional Experimental Politécnica "Antonio José de Sucre" – Vicerrectorado "Luis Caballero Mejías" (UNEXPO)
Venezuela
mserafin@unexpo.edu.ve

Resumen

El presente trabajo utiliza el enfoque de resolución de problemas de Polya para atender las deficiencias y dificultades que surgen en la resolución de ecuaciones irracionales con raíces cuadradas. Particularmente, la investigación se orienta hacia los docentes de matemática a los fines de que aborden la enseñanza de manera estimulante hacia el pensamiento crítico y la metacognición, usando planes de resolución que recurren a casos particulares como heurísticos. Tales casos provienen de condiciones que garanticen el sentido a todas las expresiones algebraicas que componen ambos miembros de la ecuación irracional, así como aquellas que puedan surgir luego de transformada la ecuación original. Se muestran ejemplos que permiten inferir que el método propuesto permite: (i) discriminar si hay errores en la comprobación o si no hay soluciones; (ii) desarrollar el pensamiento crítico; y (iii) facilitar el aprendizaje por la relación entre el método y el cálculo de dominio de funciones reales.

Palabras clave: modelaje matemático, resolución de problemas, ecuaciones irracionales, transformaciones, soluciones espurias, didáctica de la matemática, enseñanza–aprendizaje.

Planteamiento del problema

Los estudiantes de ingeniería en el proceso de resolución de problemas caracterizados por modelos descritos mediante ecuaciones irracionales se enfrentan a ciertos obstáculos cognitivos para discernir sobre la validez de las soluciones que obtienen. El proceso de resolución de ecuaciones irracionales involucra la utilización de transformaciones sobre la ecuación original que en múltiples ocasiones derivan en soluciones para la ecuación transformada que no pertenecen al conjunto de soluciones de la ecuación original, denominándose estas situaciones como soluciones espurias o soluciones extrañas.

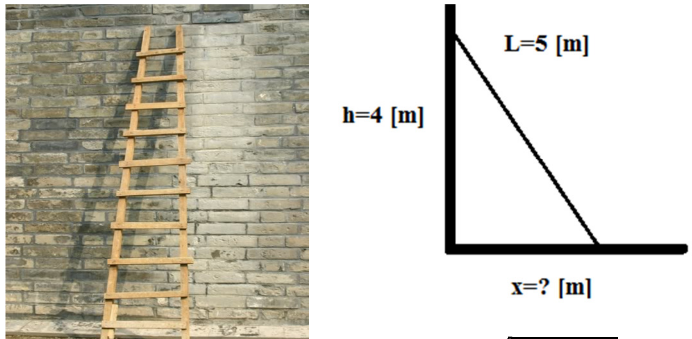
El enfoque tradicional para estos problemas exige realizar la comprobación de las soluciones obtenidas sustituyéndolas en la ecuación original, como un criterio que le permite distinguir las soluciones válidas de las que no lo son, porque las primeras producen una identidad. Al consultar libros de texto de algebra elemental, preuniversitarios o de precálculo, se encuentra una orientación respecto a realizar la comprobación de las soluciones encontradas, señalando que solo si produce una identidad se considera como una solución de la ecuación inicial. En el caso contrario se señala que corresponde a una solución extraña o espuria (Middlemiss, 1952), (Britton, Ben, & Rutland, 1969), (Lehman, 1980), (Sullivan, 2006). Los docentes en clase adoptan la misma estrategia exigiéndole a sus estudiantes efectuar el procedimiento de comprobación para determinar si las raíces encontradas son solución o no, sin justificar plenamente la necesidad de tal esfuerzo.

No obstante, algunos estudiantes no realizan la comprobación requerida, porque el enfoque tradicional con que se ha venido trabajando este asunto no permite que la mente del estudiante común albergue justificación alguna para realizarla, entendiendo ese procedimiento como algo adicional y superfluo. La ausencia de la verificación de la identidad hace que el estudiante pueda reportar resultados erróneos. Otros estudiantes, aun cuando quieren comprobar las soluciones, no lo logran en todas las ocasiones porque a veces los valores de la incógnita y la estructura de la ecuación original demandan de ellos herramientas del algebra que no dominan. A los fines de estimular el aprendizaje, la independencia y el pensamiento crítico en los estudiantes sería particularmente importante resaltar cuales transformaciones o procedimientos son los que hacen que aparezcan o no este tipo de soluciones, así como proponer nuevos criterios para discriminar las soluciones inválidas, que sean más sencillos o más eficientes, lo cual es precisamente el objeto que aborda este trabajo.

Justificación, fundamentación teórica y antecedentes de la investigación

El Consejo Nacional de Profesores de Matemática de los Estados Unidos de América ha identificado la resolución de problemas como una de las metas más importantes en el aprendizaje de las matemáticas (National Council of Teachers of Mathematics, 2009). Particularmente, la matemática en la ingeniería se utiliza para establecer modelos de situaciones de la vida real, y es una herramienta vital en el paradigma de la profesión que se centra específicamente en la resolución de problemas (The Royal Academy of Engineering, 2010).

Uno de los modelos que más temprano advierten los estudiantes es el que surge de la aplicación del Teorema de Pitágoras para relacionar las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo, tal como el que aparece al apoyar en forma inclinada una escalera sobre un muro vertical. En esos casos si se desea conocer la distancia de apoyo sabiendo la longitud de la escalera y la altura del muro es posible plantearlo como una ecuación que involucra una formulación subradical de la incógnita (ver *Figura 1*).



$$4 = \sqrt{25 - x^2}$$

Figura 1 Modelo simple donde ocurren ecuaciones que involucran radicales

Una ecuación se llama irracional si contiene la incógnita bajo el signo del radical. Resolver una ecuación dada consiste bien sea en hallar todas las raíces de la misma, o en probar que ella no tiene solución. En el primer caso se llama número de soluciones de la ecuación a la totalidad de las raíces o valores que al sustituirles en la ecuación la transforman en una identidad numérica. Formalmente, se pueden introducir las siguientes definiciones:

Definición 1: El intervalo solución (IS) de la ecuación es el conjunto de valores de la incógnita para los cuales están bien definidos los miembros de la ecuación. Todo $x \in IS$ se considerará un valor admisible de la ecuación dada.

Definición 2: Una solución de una versión simplificada de una ecuación que no satisface la solución original se denomina solución espuria o extraña (Simmons, 2000).

Definición 3: Se llama corolario de una ecuación con respecto a otra ecuación si todas las soluciones de una ecuación son también soluciones de la otra. La segunda ecuación se llama corolario de la primera.

Definición 4: Dos ecuaciones se llaman equivalentes si cada una de ellas es corolario de la otra.

Note que de la ***Definición 3*** y de la ***Definición 4*** se deduce que las ecuaciones equivalentes tienen las mismas soluciones.

Definición 5: Dos ecuaciones en un conjunto dado de valores de la incógnita son equivalentes, si tienen las mismas soluciones en ese conjunto de valores.

Simmons (2000) advierte que las soluciones espurias pueden ocurrir cuando se resuelven ecuaciones donde la incógnita aparezca en el denominador de una expresión racional, como parte del argumento de un logaritmo, o como variable subradical en una raíz enésima siempre que n sea un número par.

La escuela norteamericana por diversas razones es sumamente influyente en la educación matemática en Latinoamérica, como se afirmó con anterioridad históricamente sus textos no profundizan sobre las razones que provocan la aparición de soluciones espurias ni en su significado. Sin embargo, en Hispanoamérica y otras regiones de ascendencia latina se han presentado propuestas intermitentes que de una u otra forma progresan en los aspectos poco tratados en la corriente tradicional, particularmente, Cirodde (1861) explica con formalidad las definiciones básicas que se utilizan para la resolución de ecuaciones irracionales, Pastor y colaboradores (1960) exponen de una manera formal y detallada un análisis sobre la resolución de ecuaciones, Morgado y colaboradores (1974) explican de una manera muy sencilla cómo identificar soluciones extrañas y por qué suceden. Recientemente, Castro y Mendoza (2004) presentan de una manera elemental pero detallada, la determinación de soluciones espurias y el proceso por el cual se generan tales soluciones.

La escuela rusa ha abordado el tema con diferentes niveles de rigurosidad, por ejemplo, Doroféiev y colaboradores (1973) en un texto cuya esencia es el planteamiento de problemas, destacan en la sección de ecuaciones irracionales la necesidad de establecer restricciones para determinar las soluciones extrañas, Kalnin (1973) explica de una forma muy concisa como se introducen o se pierden las soluciones extrañas, a las cuales denomina raíces impropias. Potápov y colaboradores (1986) dedican un capítulo completo a la teoría de resolución de ecuaciones, exponiendo en una manera extremadamente formal y rigurosa el proceso de solución, abordando entre otros, los problemas de ecuaciones irracionales y las soluciones espurias. Las características propias del enfoque de estos autores convierten el texto en una pieza muy complicada para el lector casual, en lo general, y para los noveles estudiantes de ingeniería, en lo particular.

Abordaje metodológico y presentación de la propuesta de solución

El presente trabajo se plantea desde el enfoque de la resolución de problemas de Polya, quién puede ser considerado el padre del área (Universidad Nacional Autónoma de México, 2005). En síntesis Polya (1989) introduce dos componentes importantes relacionados con el aprendizaje de las matemáticas: (i) la importaría de caracterizar el proceso de trabajar problemas matemáticos, y (ii) la importancia del uso de los métodos heurísticos en la resolución de problemas.

La caracterización del trabajo de resolución de problemas presenta cuatro etapas: a) entender el problema, b) diseñar un plan de solución, c) llevar el plan a cabo, y d) evaluar el proceso y la solución o soluciones. Las heurísticas son estrategias generales que pueden ayudar a avanzar en las distintas fases del proceso de solución. Algunos ejemplos incluyen el uso de diagramas, tablas u otra representación, descomponer un problema en parte más simples, el empleo de casos particulares y la búsqueda de patrones.

Este trabajo se concentra en ilustrar heurísticas tendientes a emplear casos particulares y resolver problemas más simples para abordar la etapa “b” del enfoque Polya, es decir, la propuesta que se presenta se utiliza como un plan de solución para los problemas que corresponden a ecuaciones irracionales que involucran raíces cuadradas. La propuesta que se plantea tiene como característica fundamental estimular el pensamiento crítico del estudiante, sin embargo esa exigencia significa una simplificación importante en el proceso de solución a contravía de lo que suele afirmarse en la literatura especializada. De hecho, Santos (2007) señala que en matemáticas cuando los estudiantes se enfrentan a problemas donde sólo tienen que aplicar reglas, algoritmos o fórmulas, generalmente se observa cierta fluidez y eficiencia al resolverlos mientras que cuando se les pide interpretar cierta información, estos mismos estudiantes muestran serias dificultades.

El método tradicional de solución de las ecuaciones irracionales corresponde a un procedimiento algorítmico que incluye la aplicación de transformaciones no lineales a la ecuación original para habitualmente obtener expresiones más simples de operar algebraicamente. Como se ha argumentado previamente, las transformaciones pueden dar lugar a la aparición de raíces en la ecuación transformada que no se corresponden con las raíces de la ecuación original, dando lugar a las denominadas soluciones espurias. El método tradicional incluye como esquema de control para eliminar las raíces impropias la comprobación de las soluciones en la ecuación original a los fines de verificar una identidad numérica.

La heurística sobre la cual se basa esta propuesta utiliza el razonamiento lógico, y consiste en examinar las condiciones que otorgan sentido a los casos particulares de cada expresión algebraica involucrada en la ecuación original, así como las que emerjan fruto de las transformaciones aplicadas.

En general, una ecuación irracional puede representarse de la siguiente forma:

$$\sqrt{Exp_1(x)} = Exp_2(x) \tag{0}$$

La propuesta consiste en reconocer que cada miembro de la ecuación (0), por involucrar raíces cuadradas, tiene que ser estrictamente positivo para tener sentido (siempre que $x \in \mathbb{R}$). Entonces la propuesta consiste en enseñar a los estudiantes a determinar con anterioridad a la resolución de la ecuación irracional el conjunto de valores admisibles según se desprendan de las restricciones impuestas por las expresiones involucradas en la igualdad y su sentido matemático. Para la ecuación (0) ello se resume en:

$$Exp_1(x) \geq 0;\ Exp_2(x) \geq 0$$

Al tomar las condiciones anteriores en forma simultánea se define un intervalo solución (IS) que ocasionalmente podría ser vacío indicando que la ecuación original no tiene soluciones reales.

Es importante destacar que la ecuación (0) es una versión muy simplificada de las ecuaciones irracionales, en la práctica se observan ecuaciones más complejas en el sentido de incluir más expresiones algebraicas (por ende más condiciones a evaluar en forma simultánea), o porque alguna de dichas expresiones al ser transformada produce una nueva expresión algebraica irracional (que requiere una nueva transformación para su solución y que restringe nuevamente el intervalo de solución a uno que es subconjunto del original). Por estos argumentos no existe, en general, una receta o algoritmo para calcular intervalos de solución debido a que cada ecuación irracional exigirá plantear condiciones propias de cada una de ellas.

Ejemplos de ejecución del plan de solución diseñado

Con el objeto de contrastar la propuesta de enseñanza presentada en este trabajo con respecto al método tradicional se presentan tres ejemplos ilustrativos de seguido.

Ejemplo 1: Resolver la siguiente ecuación irracional

$$\sqrt{2x-1} = x-2 \tag{1}$$

Solución por el método tradicional:

Elevando al cuadrado, obtenemos:

$$|2x-1| = (x-2)^2,$$

Cuyas raíces son:

$$x_1 = 1 \qquad \text{y} \qquad x_2 = 5$$

Al verificar las raíces en la ecuación inicial observaremos que

$$\text{Si} \quad x_1 = 1 \ \Rightarrow \ \begin{cases} \sqrt{2(1)-1} & \overset{?}{=} & 1-2 \\ 1 & \neq & -1 \end{cases}$$

Si $\quad x_2 = 5 \implies \begin{cases} \sqrt{2(5)-1} & \overset{?}{=} & 5-2 \\ 3 & = & 3 \end{cases}$

La solución $x_1 = 1$, no satisface la ecuación porque no produce una identidad, por lo tanto es una solución espuria. La segunda raíz $x_2 = 5$, si satisface la ecuación original, porque si produce una identidad.

Solución por el método propuesto:

Lo primero que se debe determinar es el IS exigiendo condiciones a cada miembro para que tengan sentido (cantidad subradical positiva).

Para el primer miembro: $2x - 1 \geq 0$, para el segundo: $x - 2 \geq 0$. Ambas deben cumplirse simultáneamente, entonces:

$$x \geq \frac{1}{2} \wedge x \geq 2 \implies IS = [2, \infty)$$

El proceso de obtención de las raíces es idéntico, pero ahora por inspección descartamos x_1 como solución espuria ya que $x_1 \notin IS$, mientras que aceptamos $x_2 \in IS$.

Ejemplo 2: Resolver la siguiente ecuación irracional

$$\sqrt{x+3} + \sqrt{2x-1} = 4 \tag{2}$$

Solución por el método tradicional:

Elevando al cuadrado obtenemos:

$$2\sqrt{(x+3)(2x-1)} = 14 - 3x \tag{3}$$

Operando se obtiene:

$$2\sqrt{2x^2 + 5x - 3} = 14 - 3x$$

Observe que el problema se reduce a una ecuación cuadrática:

$$x^2 - 104x + 208 = 0$$

Que produce como resultado dos soluciones:

$$x_{1,2} = 52 \pm 8\sqrt{39}$$

Ahora al proceder a comprobar las soluciones en la ecuación inicial se tiene:

Si $\quad x_1 = 52 + 8\sqrt{39} \quad \implies \begin{cases} \sqrt{55 + 8\sqrt{39}} + \sqrt{103 + 16\sqrt{39}} \overset{?}{=} 4 \end{cases}$

Si $\quad x_1 = 52 - 8\sqrt{39} \quad \implies \begin{cases} \sqrt{55 - 8\sqrt{39}} + \sqrt{103 - 16\sqrt{39}} \overset{?}{=} 4 \end{cases}$

Nótese que comprobar las igualdades anteriores para producir una identidad resulta más complicado que la resolución del problema originalmente enfrentado.

Solución por el método propuesto:

Determinar el IS exigiendo condiciones a cada miembro para que tengan sentido (cantidad subradical positiva).

Para el primer miembro: $x + 3 \geq 0$ y $2x - 1 \geq 0$, para el segundo miembro surge $5 \geq 0$ que es una tautología. Entonces el IS vendrá dado por:

$$x \geq -3 \ \wedge \ x \geq \frac{1}{2} \ \Rightarrow IS = \left[\tfrac{1}{2}, \infty\right)$$

En el proceso de obtención de las raíces se observó que luego de la primera transformación se obtiene una ecuación irracional (3) que hace necesaria una segunda transformación, la cual impone ahora dos nuevas restricciones al IS, cada una de ellas asociada específicamente darle sentido a ambos miembros de la igualdad (3). Las restricciones adicionales son:

$$(x+3)(2x-1) \geq 0 \ \wedge 14x - 3 \geq 0$$

Cuyo intervalo de solución corresponde a: $\left\{x \in (-\infty, -3] \cup \left[\tfrac{1}{2}, \tfrac{14}{3}\right]\right\}$.

Ahora la verificación sobre la admisibilidad o no de las soluciones obtenidas al resolver la ecuación se hace contrastando las raíces que se hallaron en el proceso tradicional con el último IS:

$$x_1 = 52 + 8\sqrt{39} \approx 52 + 8 * (\simeq 6) \cong 100$$
$$x_2 = 52 - 8\sqrt{39} \approx 52 - 8 * (\simeq 6) \cong 4$$

Resulta sencillo verificar que x_1 es una solución espuria ya que $x_1 \notin IS$, mientras que se aceptaría x_2 como parte del IS. En cualquier caso una verificación aproximada como la que se mostró puede inducir a errores si alguna de las soluciones está en la proximidad de alguno de los extremos del IS, por ejemplo otra aproximación podría hacer a $x_2 > \frac{14}{3} \cong 4{,}66$ identificando erróneamente ambas soluciones como raíces impropias. Sin embargo, si se admite el uso de calculadoras, aún el método propuesto será más eficaz que el tradicional porque al verificar la identidad se hará muy complicado establecerla con exactitud debido a los errores de redondeo y truncamiento que podría cometer el estudiante al resolver la irracionalidad del número.

Ejemplo 3: Resolver la siguiente ecuación irracional

$$\sqrt{1 - 4x} = x - 1 \tag{4}$$

Solución por el método tradicional:

Elevando al cuadrado obtenemos:

$$x^2 + 2x = 0$$

Que tiene como soluciones:

$$x_1 = 0 \qquad \text{y} \qquad x_2 = -2$$

Al verificar las soluciones en la ecuación inicial observaremos que

$$\text{Si} \quad x_1 = 0 \Rightarrow \quad \begin{cases} \sqrt{1 - 4(0)} \overset{?}{=} 0 - 1 \\ 1 \neq -1 \end{cases}$$

Si $\quad x_2 = 5 \Rightarrow \quad \begin{cases} \sqrt{1-4(5)} & \overset{?}{=} & 5-1 \\ \sqrt{-19} & \neq & 4 \end{cases}$

De donde se desprende que la ecuación irracional original (4) no tiene solución.

Solución por el método propuesto:

Determinar el IS exigiendo condiciones a cada miembro para que tengan sentido (cantidad subradical positiva).

Para el primer miembro: $1 - 4x \geq 0$, para el segundo miembro: $x - 1 \geq 0$. Entonces el IS vendrá dado por:

$$x \leq \frac{1}{4} \wedge x \geq 1 \Rightarrow IS = \emptyset$$

Es importante destacar que con el método propuesto se hace innecesario, para el ***Ejemplo 3***, realizar ningún cálculo dirigido a obtener soluciones porque se demuestra, previamente y con facilidad, que no existen soluciones para la ecuación (4) porque $IS = \emptyset$.

Análisis de la propuesta

En los ejemplos mostrados en la sección anterior se muestran las dificultades fundamentales que se presentan al resolver ecuaciones irracionales que involucran raíces cuadradas por el método tradicional, en primer lugar en el *Ejemplo 2* se muestra cuan complejo puede resultar verificar la identidad al sustituir soluciones con estructuras complicadas en la ecuación original, así mismo quedó en manifiesto que la propuesta permite realizar la comprobación utilizando aproximaciones que facilitan el cálculo, incluso se esbozó que estas ventajas pueden mantenerse aun cuando se utilice como herramienta de apoyo la calculadora electrónica.

Quizás el caso que hace más patente la eficiencia del método propuesto respecto al método tradicional está en el ***Ejemplo 3***, allí quién resuelva el problema ahorra tiempo y esfuerzo al detectar mediante problemas más simples (inecuaciones) que el IS es vacío, señalando de inmediato la ausencia de soluciones reales para la ecuación (4). Este tipo de ejemplos utilizados en la enseñanza podrían motivar muchísimo al estudiante porque detecta los beneficios tangibles de su utilización.

Finalmente, el primer ejemplo demuestra que en ecuaciones irracionales muy simples ambos métodos son igual de eficientes; pero siempre será importante afirmar que en el método propuesto se estimula el conocimiento respecto a las causas y orígenes de las soluciones extrañas o espurias, mientras que el método tradicional si bien las discrimina no le aporta al estudiante justificación sólida para hacerlo. Adicionalmente, cuando se motiva al estudiante a determinar el IS, los procedimientos y habilidades son los mismos que requerirá más adelante en los cursos de cálculo, por lo tanto se está introduciendo un concepto integrador (Ausebel, Novak, & Hanesian, 1978) que ayudará al estudiante a enfrentar con mayor éxito el cálculo de dominio de funciones reales de variable real, que en la experiencia de los autores de esta propuesta es uno de los temas con mayor índice de aplazados en la educación básica de los planes de ingeniería.

Conclusiones

La propuesta didáctica presentada está enmarcada en el enfoque de resolución de problemas de Polya, alineándose de esta forma con las tendencias más consensuadas y modernas de enseñanza de la matemática.

Los estudiantes que aprendan la heurística planteada como parte de un plan de resolución de problemas modelados por ecuaciones irracionales lograrán discriminar entre las soluciones obtenidas, utilizando un procedimiento muchas veces más sencillo, normalmente más eficiente y siempre más promotor del pensamiento crítico.

Enseñar la resolución de ecuaciones irracionales a través de esta propuesta didáctica facilitará el aprendizaje futuro del estudiantes por la conexión que tiene con en el método y el cálculo de dominio de funciones reales de variable real.

El docente que utilice esta propuesta didáctica tendrá a su disposición una herramienta sencilla, no disponible en la mayor parte de la literatura generalmente utilizada, para explicarles a sus estudiantes como determinar y porqué ocurren las soluciones espurias.

Referencias

Ausebel, D. A., Novak, J. D., & Hanesian, H. (1978). *Educational psychology: a cognitive view* (2nd ed.). Nueva York: Holt, Rinehart, and Winston.

Britton, J. R., Ben, K. R., & Rutland, L. W. (1969). *Matemáticas Universitarias* (Vol. I). México: CECSA.

Castro, W., & Mendoza, L. (2004). Apuntes de Clase sobre Ecuaciones e Inecuaciones: Guía Teórico-Práctica. Caracas.

Cirrode, P.-L. (1861). *Lecciones de Álgebra.* Madrid: Carlos Bailly Baillieri.

Doroféiev, G., Potápov, M., & Rozov, N. (1973). *Temas selectos de matemáticas elementales.* Moscú: MIR.

Kalnin, R. A. (1973). *Álgebra y funciones elementales.* Moscú: MIR.

Lehman, C. (1980). *Álgebra.* México: Limusa.

Middlemiss, R. (1952). *College Algebra.* Nueva York: McGraw-Hill.

Morgado, A. C., Wagner, E., & Jorge, M. (1974). *Álgebra I.* Río de Janeiro: Livraria Francisco Alves Editora.

National Council of Teachers of Mathematics. (13 de Enero de 2009). *Agenda For Action: Problem Solving.* Recuperado el 14 de Enero de 2011, de Standards and Focal Points: http://www.nctm.org/standards/content.aspx?id=17279.

Polya, G. (1989). *Cómo plantear y resolver problemas* (1ra en Español. 15ta Reimpresión ed.). México: Trillas.

Potápov, M., Alexándrov, V., & Pasichenko, P. (1986). *Álgebra y análisis de funciones elementales.* Moscú: MIR.

Rey Pastor, J., Pi, C., & Trejo, C. A. (1960). *Análisis Matemático* (Vol. I). Buenos Aires: Kapelusz.

Santos, L. M. (2007). *La resolución de problemas matemáticos. Fundamentos cognitivos.* México: Trillas.

Simmons, B. (2000). *Mathwords: Terms and Formulas from Beginning Algebra to Calculus*. Recuperado el 2 de Octubre de 2010, de http://www.mathwords.com/e/extraneous_solution.htm.

Sullivan, M. (2006). *Álgebra y Trigonometría* . México: Prentice-Hall Hispanoamericana.

The Royal Academy of Engineering. (2010). *Philosophy of Engineering.* Londres: The Royal Academy of Engineering.

Universidad Nacional Autónoma de México. (27 de Noviembre de 2005). *Escuela Nacional Preparatoria Plantel N°6 "Antonio Caso".* Recuperado el 7 de Abril de 2011, de http://www.prepa6.unam.mx/Colegios/Matematicas/papime/PAPIME/manuales/Polya.htm