XIII CONFERENCIA INTERAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
CIAEM 2011
26 - 30 Junio, 2011
Recife, Brasil
50 años
del Comité Interamericano de Educación Matemática

Minicurso: Experimentando la esencia del concepto de media aritmética

José Mª **Chamoso** Sánchez
Facultad de Educación, Universidad de Salamanca
España
jchamoso@usal.es

Resumen

La media aritmética, tanto en los cursos de Primaria como en Secundaria, se ha trabajado tradicionalmente de forma práctica olvidándose, en muchos casos, de la esencia del concepto. Aunque es indudable que, en la mayor parte de las situaciones, la media se suele utilizar para realizar actividades, parece conveniente profundizar en su concepto de manera que el alumno pueda interpretar los resultados que se producen cuando se trabaja con ella. Por ello se presentarán actividades extraídas de situaciones reales que potencien la discusión, la toma de decisiones y que establezcan un enlace entre los centros educativos y el entorno. De esa manera se pretende reflexionar sobre el concepto de media aritmética en la práctica educativa diaria con la esperanza de que se considere un instrumento que facilite a los estudiantes vivir en su propio entorno y les ayude a desarrollarse como ciudadanos.

Palabras clave: Educación Matemática, media aritmética, experimentación en las aulas, innovación.

1. Introducción

La media aritmética, tanto en los cursos de Primaria como en Secundaria, se ha trabajado tradicionalmente de forma práctica olvidándose, en muchos casos, de la esencia del concepto. Aunque es indudable que, en la mayor parte de las situaciones, la media se suele utilizar para realizar actividades, parece conveniente profundizar en su concepto de manera que el alumno pueda interpretar los resultados que se producen cuando se trabaja con ella. Por ello se presentarán actividades extraídas de situaciones reales que potencien la discusión, la toma de decisiones y que establezcan un enlace entre los centros educativos y el entorno. De esa manera se pretende reflexionar sobre el concepto de media aritmética en la práctica educativa diaria con la esperanza de que se considere un instrumento que facilite a los estudiantes vivir en su propio entorno y les ayude a desarrollarse como ciudadanos.

2. El concepto de media aritmética[1]

Jose: Bill, mira ese cruce. ¿Sabes qué me pasó aquí en una ocasión? Ya ves que en esta calle hay tres carriles: uno para girar a la derecha, otro para dirigirse a la izquierda y el del centro que, como indica esa flecha, permite ir tanto al centro como a la derecha y a la izquierda. Pues un día subía por esta calle conduciendo el coche y vi que había una hilera de vehículos en el lado derecho y otra similar en el izquierdo, con un montón en cada lado.

Bill: ¿Cuánto es un montón?

Jose: Bill, no recuerdo exactamente. Ambas filas eran grandes. Unos 10 coches más o menos. El caso es que en el centro no había ninguno. No podía entenderlo. Los semáforos y los carriles deberían servir para facilitar el tráfico y no para poner dificultades, y los conductores deberían entenderlo así. Si todos intentáramos ayudarnos y no poner trabas por estar en la carretera preferente en vez de en la secundaria...

Bill: Jose, ¿qué pasó?

Jose: Me dirigía hacia la calle que está a la izquierda y pensé que, si me situaba en el carril izquierdo, con la cantidad de vehículos que había en ese lado, no me daría tiempo a pasar antes de que el semáforo cambiara a rojo. Por eso, me puse en el carril del centro.

Bill: Según se puede ver, la señalización lo permitía. Siempre podrías ir hacia el centro en caso de que hubiese alguna circunstancia imprevisible y volver de nuevo cuando fuera posible.

Jose: Efectivamente. La carretera es muy peligrosa y siempre es preferible desviarse y perder algo de tiempo que jugarse la vida. De repente, el semáforo se puso verde y el primer coche del carril izquierdo salió hacia la avenida correspondiente, que tiene dos carriles como puedes ver, y se colocó en el de la derecha, impidiéndome el paso pues yo, a su vez, también estaba a su derecha. Pensé que se podía haber situado en el de la izquierda, que estaba vacío por lo que no entorpecía a nadie, pero imaginé que no me había visto. Además, era un coche de autoescuela por lo que supuse que el conductor estaba aprendiendo y, en esos casos, hay que perdonar muchas cosas. Pero mi sorpresa fue que el copiloto, en ese momento, sacó su brazo extendido por la ventanilla con su mano apuntando hacia la calle del centro como queriéndome decir que fuese por allí.

Bill: ¿Ah, sí? ¿En qué molestabas?

Jose: En nada. Es el derecho por el hecho de haber llegado unos segundos antes.

[1] Basado en el libro de Chamoso, Cáceres, Azcárate y Cardeñoso (2009). *Organizando la estadística.* Madrid: Nivola.

Bill: ¿Y no había nadie que estuviese en el carril izquierdo?

Jose: Nadie. Estaba libre. Te lo acabo de decir.

Bill: Lo que dices es asombroso y llama más la atención si, además, el que lo hizo era el profesor de la autoescuela que estaba enseñando al que conducía.

Jose: Así me lo pareció.

Bill: Pues no pudo sembrar peor ejemplo. Es posible que el que estaba aprendiendo haga lo mismo en ocasiones similares.

Jose: Sinceramente, me quedé anonadado.

Bill: La verdad es que incidentes llamativos ocurren constantemente cuando se va en coche.

Jose: Si todos intentáramos ayudarnos en vez de exigir nuestros derechos y no fijarnos en nuestros deberes...

Bill: Siempre pienso que, en situaciones como la que relatas, lo más adecuado es buscar la media.

Jose: ¿La media? ¿Qué quieres decir?

Bill: Considero que, en casos parecidos, lo mejor es conseguir que haya el mismo número de coches en cada carril. Es decir, si había unos 10 a cada lado y ninguno en el centro, contigo eran 21 con lo cual, si se distribuyeran en número similar en los 3 carriles, correspondería 7 a cada uno con lo que sería posible que diese tiempo a que todos pudieran pasar de una sola vez cuando el semáforo estuviera verde. Para ello los conductores deberían facilitar el desarrollo del tráfico más que poner dificultades.

Jose: Es decir, estás considerando la media de los valores como el resultado de repartir todos los componentes de manera uniforme entre esos valores. Pero Bill, ¿cómo se va a buscar la media si no se sabe cuántos coches hay?

Bill: No hace falta. Se trata de buscarla, no de hallarla. Es lo mismo que hablamos ayer a partir de los sacos de cemento que vimos en la calle.

Jose: Entiendo. Se trata de pensar en el significado de la media e ir a la esencia del concepto.

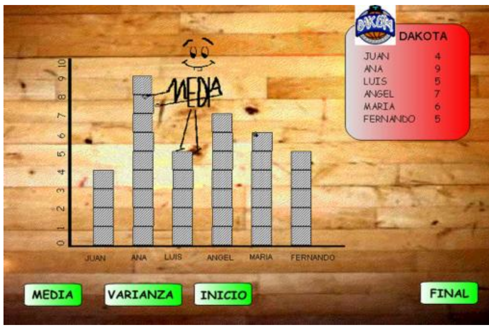
Bill: Exactamente. Jose, no sé si entiendes qué quiero decir. Si se pregunta a casi cualquier persona cuál es la media de un conjunto de valores, es muy probable que sepa calcularla. Pero si se pregunta qué es la media, también es probable que conteste que es el resultado de sumar todos los valores y dividir entre el número de ellos. Y no es así.

Jose: ¿Ésa no es la media?

Bill: Es la forma de calcularla pero no su concepto.

Jose: Es como aquella actividad que hicimos con jóvenes con un programa de ordenador en la que se reflejaron, en una gráfica construida con cubos, los resultados obtenidos en un concurso de triples en unas canastas de baloncesto. Para conseguir la media, lo que se hacía era reorganizar los cubos desplazándolos de las columnas más altas de la gráfica a las más bajas de manera adecuada hasta que todas tuvieran la misma altura, la cual sería la media de esos valores.

Bill: Se trata de la misma idea. Jose, piensa en un grupo de personas cada una de las cuales tiene cierta cantidad de caramelos, 2, 8, 6, 4, 7 y 3 por ejemplo. Si se quiere conocer cuál es la media, los que tuvieran más deberían entregar alguno a los que tuvieran menos hasta que todos alcanzaran la misma cantidad.



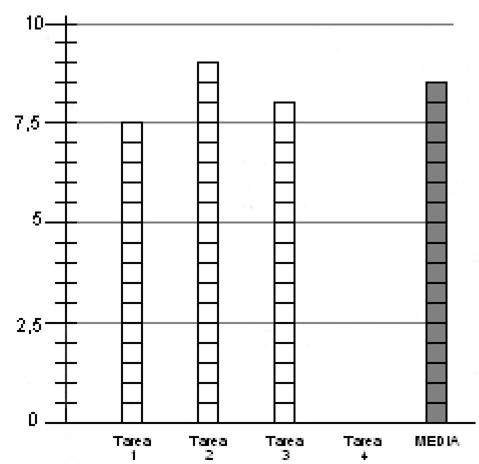
Jose: Eso no es lo que se suele hacer.

Bill: Lo más probable es que cualquier persona cogiera lápiz y papel, sumara la cantidad total que tienen entre todos y dividiera entre el número de personas.

Jose: Se suele saber el mecanismo de cálculo pero no siempre se entiende el concepto. Algo parecido ocurre con el máximo común divisor o el mínimo común múltiplo de varios números.

Bill: Tienes razón. Son situaciones semejantes. Pero, si así fuese, mucha culpa de ello la tendrían los que les han enseñado. De hecho, en muchas ocasiones la media aritmética se introduce como una aplicación de la división más que como concepto estadístico.

Jose: Pues me parece que, moviendo cuadraditos, se puede entender fácilmente. Por ejemplo, partiendo de la gráfica y conocida la media, se puede conseguir el dato que falta. Lo explico con un caso concreto. En esta representación se reflejan las calificaciones de un estudiante en 3 de las 4 tareas que había que completar para superar un curso. Si quisiera obtener una nota de 8.5, ¿qué tendría que conseguir en la cuarta?



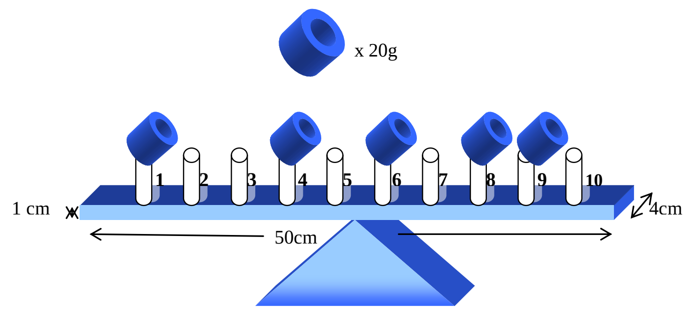
Bill: Es una actividad que se puede abordar de muchas formas.

Jose: Desde luego. Pero eso también es interesante.

Bill: Se pueden observar circunstancias sin hacer cálculos, a partir de los datos existentes. Por ejemplo, el que falta tiene que ser mayor que la media. También se podría resolver algebraicamente: $7.5 + 9 + 8 + x = 8.5x4$. O por ensayo y error, probando y ver qué sale. También si se observa que la media de los 3 primeros es 8 y pico, luego...

Jose: O poniendo 8.5 cuadraditos en cada una de las columnas y después trasvasándolos de unas a otras hasta que la gráfica quede de la forma inicial.

Bill: O de otras formas que a cada uno se le pueden ocurrir.



Jose: Bill, esa interpretación de media como distribución de los elementos de manera que todos los valores tengan el mismo número me parece muy visual pero suelo utilizar otra distinta: La media como punto balance o centro de gravedad de un conjunto de datos, es decir, como el punto que permita que se equilibren todos los valores que se tienen. Se puede entender fácilmente sin más que preparar un rectángulo uniforme de madera de, por ejemplo, 50 centímetros de largo y 4 de ancho, y en el que estén incrustados 10 pivotes, numerados del 1 al 10 y separados 5 centímetros entre sí, y cuyos extremos estén a 2.5 centímetros de los bordes. Además se tienen diversos discos iguales que se pueden insertar en los pivotes.

Bill: Te entiendo por el dibujo que estás haciendo.

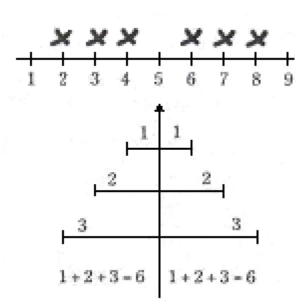
Jose: Entonces se coloca un punto de apoyo sobre el que se sitúa el rectángulo de madera en forma de balancín.

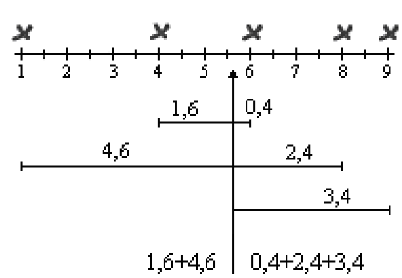
Bill: Y la media es, precisamente, el punto en el que la madera queda en equilibrio.

Jose: Efectivamente. Por ejemplo, imagina que se coloca un disco en cada uno de los puntos 1, 4, 6, 8, 9. Entonces el centro de gravedad quedará entre 5 y 6, más cerca de 6 como en la figura.

Bill: Un aparato interesante. Permite investigar qué le ocurre a la media cuando se añade o se resta un mismo valor a todos los datos o cuando se modifican los extremos. O entender que no siempre es un valor entero.

Jose: Y más cosas. Por ejemplo, en el ejemplo anterior de los caramelos en que varias personas tenían 2, 8, 6, 4, 7 y 3, la suma de las distancias a la media de los que son inferiores a ella coincide con la de los que son superiores ya que 3+2+1=1+2+3.





Bill: También se verifica en casos en que la media no sea un número entero como en el del balancín pues 1, 4, 6, 8, 9 verifican que 4.6+1.6=0.4+2.4+3.4. Por eso se llama punto balance.

Jose: Efectivamente. Hacerlo así obliga a utilizar números positivos y negativos pero, sobre todo, refuerza el concepto de media como punto balance. Bill estoy pensado que, entender la media de esa forma, sólo es posible para datos discretos porque, si fueran continuos, no se podría mantener la idea.

Bill: También podría ser en casos continuos como, por ejemplo, con un montón de arena.

Jose: En cualquier caso, esta imagen del concepto me ayuda a entenderlo.

Bill: Y, una vez que se comprende, ya sólo hay que aplicarlo a cada situación que se presente...

Jose: Por ejemplo, supongamos que tenemos monedas de 3 y 8 gramos, tantas como se quiera de cada una de ellas. ¿Cuántas se necesitarán de cada tipo para tener una media de 7? ¿Se podría obtener como media todos los valores naturales entre 3 y 8? ¿Y otros valores?

Bill: Para que sea 7, por ejemplo, necesitamos incrementar 3 en 4 valores y, como cada moneda de 8 gramos cede 1, para conseguir que la media sea 7 se necesitarán 4 monedas de 8 y 1 de 3. Se puede hacer de manera similar en otros casos.

Jose: Algo parecido se haría para conseguir que fuera una fracción.

Bill: Se puede repetir con monedas de pesos diferentes a los anteriores.

Jose: O podemos hacer otras actividades diferentes como realizar medias iteradas.

Bill: ¿Eso qué es?

Jose: La misma palabra lo dice, la media de la media. Se puede empezar con 4 números cualesquiera, hallar la media de los dos primeros y repetirlo sucesivamente con otras parejas hasta ver qué ocurre. Por ejemplo, vamos a explorar el conjunto de números 5, 7, 3, 9.

Bill: Entonces podría ser:

5 7 3 9
6 5 6
5.5 5.5
5.5

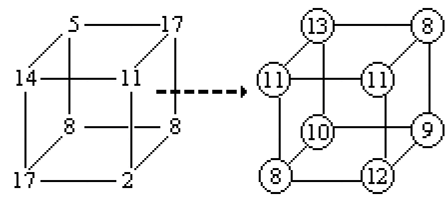
Jose: Se puede cambiar el orden a ver qué sucede.

3 5 7 9
4 6 8
5 7
6

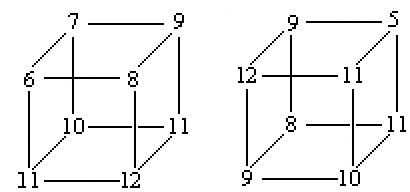
Bill: O hacerlo con mayor cantidad de números. Se obtiene una colección de valores que permite descubrir relaciones entre ellos.

Jose: Por ejemplo, en este último caso, todas las filas y diagonales son progresiones geométricas de razón 2 y 1 respectivamente. Además parece que, según se van construyendo nuevas filas, algunos números se repiten.

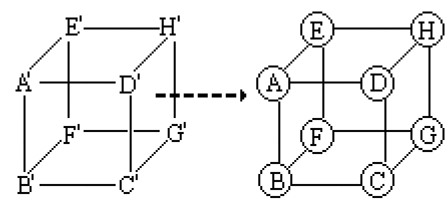
Bill: También se me ocurre hacer medias cúbicas para utilizar promedios. Para ello se consideraría un cubo con un número en cada vértice que se transformaría en otro cubo cuyos vértices fueran la media de los 3 números más cercanos en el cubo inicial en cada caso, es decir, los que se unen a él con aristas. Por ejemplo, en el cubo adjunto el 14 se reemplaza por (5+11+17)/3=11. Análogo en los demás casos.



Jose: También se puede realizar el proceso inverso y considerar cubos, como los que dibujo, cuyos números de los vértices se hayan sustituido por la media de los 3 números más cercanos para deducir el cubo del que procede cada uno de ellos.



Bill: Para hacerlo se deberían nombrar los vértices de alguna manera. Por ejemplo, los señalo en el dibujo. De esa forma se obtendría un sistema de 8 ecuaciones con 8 incógnitas. No parece fácil.



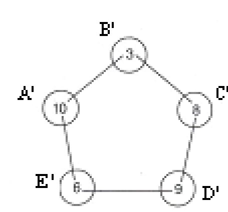
Jose: No lo es pero date cuenta de que todos los tríos tienen dos números en común con otros tríos.

Bill: Supongo que no es más que repetir el proceso anterior de manera inversa.

Jose: Te voy a decir algo. Se puede descubrir que cada dato escondido es la suma de los 3 valores que figuran en los 3 vértices adyacentes quitando dos veces el valor que se encuentra en el vértice que está diagonalmente opuesto.

Bill: Lo comprobaré.

Jose: También se puede hacer algo similar con los vértices de polígonos regulares. Por ejemplo, supongamos que hubiera que descubrir 5 datos A, B, C, D y E de los que únicamente se sabe que se asocian con los 5 vértices de un pentágono de manera que el número de cada vértice sea la media de los dos datos más cercanos. Es decir, el 10 del vértice A’ indica que ese número es la media de los datos B y E.



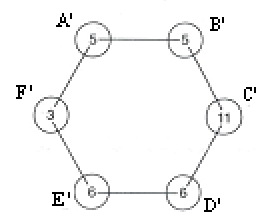
Bill: Entonces no es más que imponer condiciones y resolver: $A' = \dfrac{B+E}{2} = 10$;

$B' = \dfrac{A+C}{2} = 3$; $C' = \dfrac{B+D}{2} = 8$...

Jose: 5 ecuaciones con 5 incógnitas.

Bill: Si fuera un hexágono, serían 6 ecuaciones con 6 incógnitas. Y así sucesivamente.

Jose: Pero en el caso del hexágono observa que $B' + F' - D' = \dfrac{A+C}{2} + \dfrac{A+E}{2} - \dfrac{C+E}{2} = A$. Es decir, para hallar un vértice del hexágono buscado bastaría con sumar los valores de los vértices contiguos y restar el del vértice opuesto del inicial.



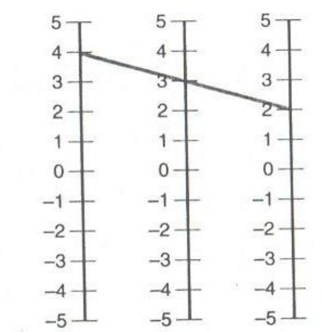
Bill: Supongo que también se podrán encontrar relaciones sencillas en otros casos. ¡Qué curioso!

Jose: Podíamos inventar figuras propias. De lo que no estoy seguro es que se pueda utilizar cualquier figura.

Bill: Jose, te voy a proponer crear máquinas para calcular la media de varios valores.

Jose: Ya lo hace la calculadora.

Bill: Ésta es diferente. A ver qué te parece. Para hallar la media aritmética de dos puntos no habría más que situar 3 rectas paralelas iguales colocadas verticalmente a la misma distancia. Entonces su media se consigue al marcar uno de los puntos en la primera recta y el otro en la tercera, formar el segmento que los une y observar el punto en que éste corta a la línea central. Por ejemplo, 3 es la media de 4 y 2.

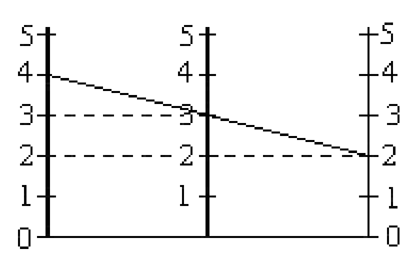


Jose: De acuerdo pero demasiada parafernalia para algo tan evidente, ¿no?

Bill: ¿Sabes por qué es así?

Jose: Lo que falta a uno le sobra al otro, ¿no?

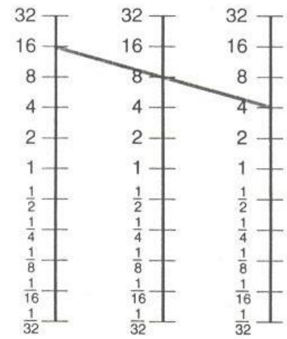
Bill: Se puede ver geométricamente. Si se construye la figura plana formada por la línea que une los dos puntos que se están considerando para hallar la media, las verticales desde cada uno de esos puntos hasta el cero y la línea que une los ceros, como se ve en la figura, es un trapezoide en el que el segmento que une los puntos medios de sus lados no paralelos permite descubrir dos triángulos semejantes que tienen los ángulos iguales, y cuyas hipotenusa y base del mayor son, respectivamente, dobles de las del menor por su propia construcción, por lo que la altura del primero es doble de la del segundo.



Jose: ¡Qué interesante! ¡Permite relacionar los números con la geometría!

Bill: Además, esta máquina facilita observar, por ejemplo, qué sucede cuando se desea hallar la media de dos números pares, dos impares o uno par y otro impar. O cuando uno es cero. O cuando uno es positivo y el otro negativo.

Jose: O qué parejas de números tienen media cero.



Bill: Parecería una tela de araña.

Jose: Encuentro el inconveniente que esta máquina sólo funciona cuando se trata de dos valores.

Bill: Podemos pensar si se podría construir otra similar para otra cantidad de ellos.

Jose: También me doy cuenta de que se puede organizar una máquina parecida con la media geométrica de dos números. Si los números se escriben como potencias de la misma base entonces se corresponde con la media aritmética de sus exponentes pues, dados 4 y 16, por ejemplo, si se consideran como potencias de 2, su media geométrica sería la aritmética de 2 y 4 también como potencia de 2. Es decir, 23. En ese caso habría que variar la forma de colocación de los números en la máquina para que los espacios entre ellos estén relacionados con los de la calculadora de la media aritmética. Mira, te lo dibujo.

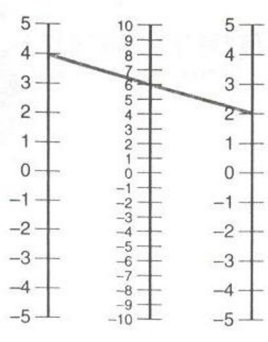
Bill: Claro. La media geométrica de dos números a y b sería $\sqrt{a \cdot b}$. Jose, comparar ambas máquinas me permite entender la relación entre ambas medias.

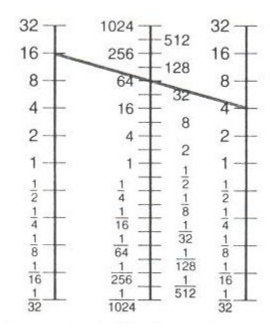
Jose: Estoy pensando que también se pueden construir otras para sumar y para multiplicar. Voy a hacerlas para cada caso.

Bill: Y para otras cosas. Sólo hay que descubrir relaciones.

Jose: Lo que nunca entendí es por qué se llama media geométrica porque nunca la asocié con aspectos geométricos.

Bill: Se llama así porque en una progresión geométrica en que cada elemento intermedio es la media geométrica de sus números anteriores y posteriores. Por ejemplo considera la progresión 2, 4, 8, 16, 32... Observa que 4 es la media geométrica de 2 y 8, 8 de 4 y 16, 16 de 8 y 32 y así sucesivamente. Lo mismo ocurriría con otra sucesión geométrica cualquiera como, por ejemplo, 9, 6, 4, 8/3, 16/9.





Jose: Eso lo entiendo pero no me parece evidentemente geométrico.

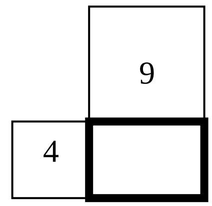
Bill: A ver si consigo explicarte mi punto de vista. Supongo que, como yo, siempre has asociado la media geométrica de dos valores a y b al valor x que verifica que $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$.

Jose: Efectivamente.

Bill: ¿Y eso no lo consideras geométrico?

Jose miró a Bill. Éste hizo un dibujo y continuó hablando.

Bill: Observa esos cuadrados de áreas 4 y 9. El área del rectángulo cuyo perímetro está trazado con trazos más gruesos es 6 que es la media geométrica de los valores 4 y 9.

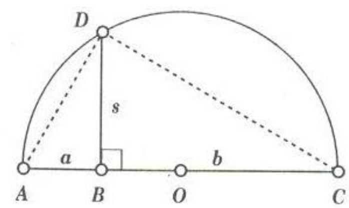


Jose: Estamos relacionado los diversos tipos de media con la geometría.

Bill: Con lo que se comprueba que las diversas partes de las matemáticas están relacionadas. Te voy a demostrar que la media geométrica de un conjunto de valores nunca puede ser superior a su media aritmética.

Jose: ¿Se trata de una demostración geométrica?

Bill: Efectivamente. Se basa en dos hechos conocidos: todo ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto y triángulos semejantes tienen lados proporcionales. Observa. Dados los puntos a y b, para construir la media geométrica s de a y b se consideran dos segmentos AB y BC de longitudes respectivas a y b, colocados en línea recta. Si se construye una semicircunferencia cuyo diámetro es AC, la línea perpendicular a ese diámetro en el punto B la corta en D de manera que la longitud del segmento BD es la media geométrica de a y b. Es lo que se conoce como teorema de la altura.



Jose: Supongo que se debe a que los triángulos ABD y DBC son semejantes a ADC por ser rectángulos y tener los ángulos iguales, por lo que sus lados son proporcionales.

Bill: Efectivamente. Por tanto $\frac{s}{a} = \frac{b}{s}$, de donde $s = \sqrt{a \cdot b}$. Como la media aritmética es el radio de esa semicircunferencia, la media geométrica no puede exceder nunca a la aritmética.

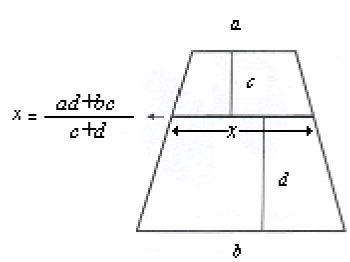
Jose: ¡Ah, claro! Sólo coinciden cuando a y b son iguales.

Bill: ¿No lo habías entendido? Esta demostración es la misma que aparece como proposición 13 del libro VI de los Elementos de Euclides.

Jose: Bonita demostración.

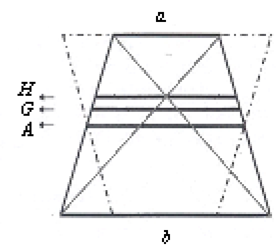
Bill: Y llamativa.

Jose: Cuando se habla de la relación entre diversos tipos de media de dos valores siempre recuerdo un trapecio



isósceles cuyas bases sean esos valores. Mira el dibujo. Cada línea interior del trapecio paralela a la base determina un segmento cuyos extremos son los lados del trapecio y cuya longitud se puede expresar de la forma $x = \dfrac{ad + bc}{c + d}$

Bill: La media aritmética es el segmento que está a la misma distancia de ambas bases, es decir, cuando $c = d$. Para trazarla no hay más que dibujar el mismo trapecio invertido para descubrir los dos puntos por los que pasa.



Jose: La media geométrica es el segmento que divide al trapecio en dos trapecios semejantes con razón de semejanza $\dfrac{d}{c}$.

Bill: Claro. De ese modo se cumple que $\dfrac{b}{a} = \dfrac{d^2}{c^2}$. Entonces la armónica es el segmento paralelo a la base que pasa por el punto de corte de las diagonales del trapecio de manera que $\dfrac{b}{a} = \dfrac{d}{c}$.

Jose: Mira, dibujo las tres medias A, G y H respectivamente.

Bill: En definitiva, la media armónica de varios valores es menor o igual que su media geométrica y ésta, a su vez, es menor o igual que su media aritmética.

Jose: Y todos los tipos de media están comprendidos entre el menor y el mayor valor de los datos existentes.

Bill: Estoy pensando en la media armónica de dos valores a y b. Siempre me ha llamado la atención.

Jose: ¿Por qué razón?

Bill: ¿Recuerdas cómo se calcula?

Jose: Creo que se define como aquel número H con el que 1/a, 1/H y 1/b están en progresión aritmética. Es decir, 1/H – 1/a =1/b - 1/H, o, lo que es lo mismo, H = 2/(1/a + 1/b), con lo que la media armónica es el inverso de la media aritmética de los inversos.

Bill: Efectivamente. Pues te explico. Hace poco descubrí que la media armónica es la que sirve para conocer la velocidad media de un coche que da una vuelta en un circuito a 90 kilómetros por hora y una segunda vuelta a 110 kilómetros por hora.

Jose: ¿La velocidad media no sería 100?

Bill: No, piénsalo. No se puede utilizar la media aritmética en este caso. Habrá que incrementar el 10% a 90 y aminorar el 10% a 110 con lo que saldrán 99 kilómetros por hora.

Jose: Tienes razón. Si lo calculamos por la fórmula anterior 2/99 = 1/90 + 1/110. Pero quieres decir que no es siempre adecuado utilizar la media aritmética, ¿no?

Bill: Efectivamente. ¿Sabes por qué no funciona aquí? Te lo explico con un ejemplo. Supongamos que se desea calcular la velocidad media de dos ciclistas que recorren 5 kilómetros, uno de ellos a una velocidad de 20 km. por hora mientras que el otro a 10 km. por hora. Si utilizásemos la media aritmética, la velocidad media sería 15 km. por hora lo que no puede ser porque, en cubrir esa distancia, el primero necesita ¼ de hora y el segundo ½, con lo que ambos emplearían 3/4 de hora en hacerlo, es decir, una media de 3/8 de hora.

Jose: Tienes razón. Si dividimos la distancia que ambos cubren entre el tiempo empleado no se obtiene 15 sino $13.\widehat{3}$.

Bill: Pues ése es el valor de la media armónica.

Jose: ¡Ah!

Bill: Por el contrario, si esos 2 ciclistas montan en bicicleta con las velocidades anteriores durante 3 horas sin parar, entre ambos habrán recorrido 90 kilómetros que, en las 6 horas empleadas, hacen una media de 15 kilómetros por hora que coincide con el resultado de utilizar la media aritmética.

Jose: Entonces, se emplea la armónica cuando se quiere hallar la media de una distancia fija y tiempo diferente, y la aritmética cuando se desea calcular la media sobre un tiempo fijo y distancia distinta. Vaya. La verdad es que sólo asociaba la media armónica con problemas de aula sin ninguna aplicación práctica.

Bill: Pues ya ves que la tiene.

Jose: Por cierto, ¿qué día es hoy?

Bill: Jueves, día 15.

Jose: ¿Estás seguro? Déjame un calendario.

Bill: ¿No te fías? Toma, compruébalo.

Jose: Realmente quería comprobar... Bill, mira. 15 es, justamente, la media aritmética de los cuatro números que están a su alrededor.

Bill: ¿Qué quieres decir?

Jose: Te lo mostraré. 15 es la media aritmética de 8, 14, 16 y 22.

Bill: Vaya. Qué especial es ser día 15.

Jose: No seas tonto. Mira.

L	M	X	J	V	S	D
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25

26 27 28 29 30

Bill: Tienes razón. 15 es el punto balance de ese conjunto de datos. Si ponemos en una balanza 8 y 22 por un lado, y 14 y 16 por otro, queda equilibrada. Se observa la simetría porque los cuatro puntos están a la misma distancia de 15.

Jose: Balanza equilibrada, simetría... Esos términos me suenan.

Bill: Estoy observando que ocurre algo similar con otros números en relación con el 15. Por ejemplo 1, 13, 17 y 29.

Jose: Y muchos más: 7, 9, 21 y 23; 6, 10, 20 y 24; 5, 11, 19 y 25.

Bill: En ese primer caso forman un cuadrado. En el segundo y tercero, un rectángulo. ¿Se te ocurren más?

Jose: Tantos como quieras: 6, 10, 21 y 23.

Bill: Ahora es un trapecio.

Jose: 1, 14, 16 y 29.

Bill: Un rombo.

Jose: 6, 9, 21 y 24.

Bill: Un romboide.

Jose: Seguimos utilizando términos geométricos. Y eso como media de 4 números. Pero 15 también es la media de, por ejemplo, 9 y 21.

Bill: O de 7, 8, 9, 14, 16, 21, 22 y 23. Supongo que investigar todas las posibilidades ayudará a entender el concepto de media.

Jose: No hay más que fijarse en que sea punto balance.

Bill: También lo verificarán otras agrupaciones de números.

Jose: Estoy pensando... Te propongo un reto. Se trata de buscar tríos de números de ese calendario cuya media sea 15.

Bill: Supongo que hay que encontrar triángulos cuyos vértices sean los números buscados. Por ejemplo 7, 9 y 29.

Jose: Es un triángulo isósceles.

Bill: Y hay más: 6, 19 y 20; 10, 17 y 18.

Jose: También son triángulos pero siguen un patrón diferente. Son triángulos rectángulos. ¿Se podrán encontrar triángulos de todo tipo? ¿Cuántas ternas son válidas? ¿Cuántas con otra cantidad de números?

Bill: ¿Y si completamos el calendario con los números que faltan incluyendo el 0 y los negativos? Por ejemplo, -1, 3, 27 y 31 sería un cuadrado y –1, 1, 29 y 31 un romboide.

Jose: Las posibilidades del calendario son muy grandes. ¿Y si, en vez de este mes, eligiésemos otro?

Bill: Buuuf.

Jose: ¿O si, en vez de un calendario, fuesen los números del casillero del que hablamos en nuestros paseos de A vueltas con los números o los del cartel de la cerveza de Matemáticas en una tarde de paseo? ¿Ocurrirán resultados similares y se podrán conseguir las mismas figuras geométricas?

Bill: Buuuuuuuuuuuf. Creo que existen muchas posibilidades para investigar.

Jose: Podríamos estar toda la tarde.

Bill: Y muchas tardes. No me lo puedo imaginar.