



## El desarrollo del pensamiento algebraico. Diferentes clases de signos

Mrs. María del Pilar **Machado** Amador  
Universidad A Coruña  
España  
[pilarica@udc.es](mailto:pilarica@udc.es)

Mrs. María Teresa **Fernández** Blanco  
Universidad de Santiago de Compostela  
España  
[teref.blanco@usc.es](mailto:teref.blanco@usc.es)

Dr. Vicenç **Font** Moll  
Universidad de Barcelona  
España  
[vfont@udc.es](mailto:vfont@udc.es)

Dr. Juan **Díaz** Godino  
Universidad de Granada  
España  
[igodino@ugr.es](mailto:igodino@ugr.es)

### Resumen

Las nuevas maneras de mirar los fenómenos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas están exigiendo nuevas formas de pensar. Para que se puedan desarrollar nuevas formas de pensar, puede que necesitemos cambios en la forma de investigar la práctica escolar.

Nuestro trabajo va encaminado a aspectos relacionados con el desarrollo del pensamiento algebraico y las diferentes clases de signos en la Enseñanza de la Matemática.

*Palabras clave:* Los signos, pensamiento algebraico, educación matemática.

### Introducción

*La enseñanza tiene que cambiar mucho más. Y una de las razones de ello es que el sistema de enseñanza posee una gran inercia, es un sistema muy grande. Hasta que una transformación que se está produciendo en la sociedad, en los medios, llega a asimilarse correctamente, tiene que pasar mucho tiempo. (Miguel de Guzmán 2005)*

En la actualidad las investigaciones en educación matemática van encaminadas a la interpretación del conocimiento y la comprensión del mismo. Por ello muchos profesores e investigadores preocupados por las dificultades que el aprendizaje del álgebra ocasiona a los alumnos, han desarrollado diferentes investigaciones al respecto.

Las nuevas maneras de mirar los fenómenos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas están exigiendo nuevas formas de pensar. Para que se puedan desarrollar nuevas formas de pensar, puede que necesitemos cambios en la forma de investigar la práctica escolar.

*La educación se plantea el reto de preparar a los educandos para los nuevos tiempos, promoviendo en ellos el aprender a conocer, a hacer y a convivir con otros, y finalmente, aprender a ser, pilares en los que se centra el desarrollo de la persona. (Informe Delos, 1996)*

Con ello podemos contribuir a que los estudiantes se apropien de procedimientos y estrategias cognitivas, meta cognitivas y motivacionales que permitan producir el saber (más que consumirlo), resolver problemas, aprender a aprender de manera permanente a lo largo de la vida, y en diferentes situaciones y contextos.

Nuestro trabajo va encaminado a aspectos relacionados con el desarrollo del pensamiento algebraico y las diferentes clases de signos en la Enseñanza de la Matemática.

### **Desarrollo**

Para representar una situación podemos utilizar diferentes tipos de signos. Por ejemplo, podemos utilizar gestos, dibujos o iconos que se parezcan a los objetos o a la situación que queremos representar, o bien palabras o símbolos convencionales que no tengan ningún parecido con el objeto representado. Una primera clasificación, propuesta por Peirce, de los signos es la siguiente:

1. Icono, se trata de un signo que tiene relación física con el objeto que representa,
2. Índice, se trata de un signo que permite dirigir la atención sobre un objeto.
3. Símbolo, se trata de un signo cuya relación con el objeto se determina por una convención.

No es fácil siempre ponerse de acuerdo cuándo un signo en matemáticas se corresponde con alguno de estos tres grupos, por lo que muchos autores prefieren hablar de representaciones o sistemas de signos en general.

La importancia de considerar el papel que juegan los diferentes tipos de representación en la comprensión de las matemáticas ha sido puesta de manifiesto por diferentes investigadores. Por ejemplo, según Bruner hay que considerar tres tipos de representaciones:

- 1) La representación enactiva: este tipo de representación permite representar eventos mediante una respuesta motriz adecuada. Como ejemplo de representación enactiva tenemos el caso del niño que cuando deja caer un sonajero imita el movimiento del sonajero con la mano, indicando así que recuerda el objeto con relación a la acción que se realiza sobre el mismo.
- 2) La representación icónica: este tipo de representación permite representar una situación por medio de dibujos, figuras o iconos que tengan algún tipo de parecido con aquello que se representa.

3) La representación simbólica: este tipo de representación va ligada a la competencia lingüística y permite representar las situaciones mediante símbolos.

Bruner propuso que los conceptos se enseñasen siguiendo estas tres fases: "(. . .) Por tanto, la clave para la enseñanza parecía ser el presentar los conceptos de forma que respondiesen de manera directa a los modos hipotéticos de representación. La forma en que los seres humanos se representaban mentalmente los actos, los objetos y las ideas, se podía traducir a formas de presentar los conceptos en el aula. Y, aunque algunos estudiantes podían estar «preparados» para una representación puramente simbólica, parecía prudente, no obstante, presentar también por lo menos el modo icónico, de forma que los estudiantes dispusiesen de imágenes de reserva si les fallaban las manipulaciones simbólicas (. . .)"

Independientemente de que las ideas de Bruner sean o no las más indicadas para enseñar los contenidos matemáticos, es evidente que el tipo de representación que utilicemos no es algo neutral o indiferente. Optar por un tipo de representación u otra tiene sus ventajas y sus inconvenientes puesto que el lenguaje matemático tiene una doble función:

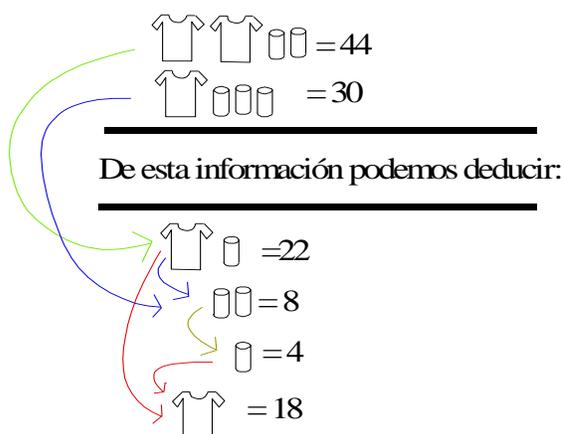
- 1) representacional: nos permite designar objetos
- 2) instrumental: es una herramienta para hacer el trabajo matemático.

Hay que ser muy conscientes de que el valor instrumental puede ser muy diferente según se trate de palabras, símbolos, iconos, gráficas, etc.

Veamos un ejemplo para ilustrar los diferentes tipos de sistemas de signos que podemos utilizar para realizar el mismo trabajo matemático.

### Ejemplo

El precio de dos camisetas y de dos latas de refresco es de 44 euros. El precio de una camiseta y tres latas es de 30 euros. ¿Cuál es el precio de una camiseta y el de una lata de refresco?



Con esta representación se quiere representar el siguiente razonamiento:

Si dos camisetas y dos latas valen 44 euros, una camiseta y una lata valen la mitad: 22 euros. Si una camiseta y tres latas valen 30 euros, y una camiseta y una lata valen 22 euros, dos latas valen 8 euros, una sola lata vale la mitad (4 euros) y, por tanto, la camiseta vale 18 euros (22-4).

Con este tipo de representación hemos podido hallar el precio de la camiseta y el de las latas sin usar las ecuaciones. Ahora bien, este tipo de representación es uno de los muchos que podemos utilizar para resolver este problema. Se puede proponer con símbolos icónicos a los alumnos que aún no han estudiado las ecuaciones, como problema para resolver con un sistema de dos ecuaciones a los alumnos de secundaria y como problema para resolver con matrices a los alumnos de bachillerato.

1. A continuación tienes el proceso de resolución del problema anterior utilizando tres tipos de representaciones diferentes.

a) Asocia cada representación con uno de los siguientes niveles educativos: 2º ciclo de la ESO, Bachillerato y ciclo superior de primaria

b) Indica cuál utiliza iconos y cuál utiliza sólo símbolos. Especifica los iconos y los símbolos utilizados en cada caso.

c) ¿Qué inconvenientes y qué ventajas encuentras en el uso de representaciones icónicas?

 = 44	$\left( \begin{array}{cc c} 2 & 2 & 44 \\ 1 & 3 & 30 \end{array} \right)$	$2x + 2y = 44$
 = 30		$x + 3y = 30$
<b>De esta información podemos deducir</b>		
 = 22	$\left( \begin{array}{cc c} 1 & 1 & 22 \\ 0 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 18 \end{array} \right)$	$x + y = 22$
 = 8		$2y = 8$
 = 4		$y = 4$
 = 18		$x = 18$

La utilización de representaciones icónicas permite introducir en la educación primaria un tipo de razonamiento que se puede calificar de algebraico, pre algebraico o casi-algebraico, y que

no sería posible realizar en el caso de haber optado por una representación completamente simbólica como, por ejemplo, las ecuaciones.

### Conclusiones

Con este trabajo teórico-práctico hemos querido tocar un tema importante dentro de la educación matemática, tanto para la educación primaria, secundaria y el bachillerato. Las teorías de Didácticas de las Matemáticas relacionadas con el signo matemático representan hoy un cuerpo de conocimientos de importancia creciente, como así lo demuestra algunos trabajos recientes en revistas relevantes de nuestro campo de conocimiento de la educación matemática.

Desde las diversas teorizaciones, el signo constituye, de una forma u otra, el objeto central de estudio. Sin embargo, habiendo diferencias entre los diversos constructos utilizados para la conceptualización del signo, también es cierto que existen aproximaciones entre ellos que vemos necesario destacar, sobre todo porque consideramos que estos enfoques sobre la Educación Matemática, que pueden denominarse Semióticos.

### Referencias bibliográficas

- Cañadilla, J. L. ; Fargas, M. y Font, V. (2003). *Matemáticas 2º ESO*. Castellano: Barcelona
- Delors, Jacques. (1996). Educar para el siglo XXI en *El Correo de la UNESCO*. Abril, pp. 36.
- Duval, R. (1996), Quel cognitif retenir en Didactique des Mathematiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 16, nº 3, pp. 349-382.
- Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 22 (2/3): 237-284.
- Godino, J. D. (2003). *Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque semiótico de la cognición e instrucción matemática*. Granada.
- Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14 (3), 325-355.
- Godino, J. D. (1999). Implicaciones metodológicas de un enfoque semiótico-antropológico para la investigación en didáctica de la matemática. Ponencia invitada. En T. Ortega (Ed. ), *Actas del III Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 196-212). Universidad de Valladolid.
- Godino, J. D, Contreras, A. , y Font, V. (2004). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques* (en revisión).

Godino, J. D. y Font V. (2003). *Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada: Granada. Distribución en Internet: <http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/>.

Grupo Azarquiel (1991). *Ideas y actividades para enseñar álgebra*. Madrid: Síntesis.

Muñoz Baños, F. y otros (1990). *Matemática 8º grado*. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana, Cuba.

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston. V. A. : National Council of Teachers of Mathematics.

Polya G. : (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*, Trillas México.

Radford. (2000), signs and meanings in student's emergent algebraic Thinking: A Semiotic analysis, *Educational Studies in Mathematics*, 42, pp. 237-268.

Radford. (1999), *On culture and mind: A post-Vygotskian semiotic perspectiva*. Université Laurentienne, Ontario. (Canadá), pp. 1-28.

Ruiz, F. (2001). Números y formas. En, E. Castro (Ed. ), *Didáctica de la matemática en la Educación Primaria* (pp. 449-476). Madrid: Síntesis.

Socas, M. M. , Camacho M. , Palarea M. y Fernández, J. (1989). *Iniciación al álgebra*. Madrid: Síntesis.

Socas M. M. ; Palarea, M. y Ruano, R. M. (2003). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en Álgebra. Investigación en Educación Matemática. Séptimo Simposio. Universidad de Granada.