



Uma sinopse de trabalhos sobre validação matemática na educação básica

José Luiz Magalhães de **Freitas**
Departamento de Matemática – CCET - UFMS
Brasil
joseluizufms2@gmail.com

Resumo

Neste artigo apresentamos primeiramente uma análise de alguns modelos teóricos que tratam da validação matemática, buscando identificar interfaces e complementações entre eles, centrando na resolução de problemas de Polya, Teoria das Situações Didáticas de Brousseau, modelo de provas de Balacheff e numa parte da Teoria Antropológica do Didático de Chevallard, caracterizada como tecnologia. Outro objetivo deste artigo é, com base nesses aportes teóricos, apresentar uma sinopse de trabalhos de pesquisa, com alunos da educação básica, nos quais foram analisadas produções, bem como dificuldades deles diante de problemas envolvendo validação matemática. Nas experimentações realizadas foi observado que os alunos se envolvem em processos de validação, tornando possível analisar dificuldades, conceitos mobilizados, bem como indícios de aprendizagens, tanto no que se refere ao discurso matemático quanto ao nível de validação que apresentam.

Palavras-chave: Validação. Modelos Teóricos. Aritmética. Álgebra. Conjunto dos números inteiros. Educação Básica.

Considerações iniciais

Neste artigo apresentamos uma abordagem panorâmica de estudos e pesquisas que vimos realizando sobre validação na educação básica. O objetivo principal é analisar alguns modelos teóricos que tratam da validação matemática, buscando identificar interfaces e articulações entre eles. Para isso, focamos na resolução de problemas de Polya, na Teoria das Situações Didáticas de Brousseau, no modelo de provas de Balacheff e numa parte da Teoria Antropológica do Didático de Chevallard, caracterizada como tecnologia. O outro objetivo deste artigo é, com base nesses aportes teóricos, apresentar uma sinopse de trabalhos de pesquisa, com alunos da educação básica, nos quais foram analisadas produções, bem como dificuldades deles diante de problemas envolvendo validação matemática. Essas análises envolvem uma variedade de

problemas de aritmética e álgebra, bem como conjecturas, verificações e provas, e foram realizadas na perspectiva de aprofundar o estudo da prática de validação no aprendizado da matemática.

Acreditamos que um dos principais valores formativos da matemática é sua coerência interna, pelo fato de proporcionar o prazer da certeza, característica essa considerada, por alguns matemáticos, como a “honra do espírito humano”. Na validação matemática a demonstração de proposições preenche duas finalidades básicas, sendo que a primeira delas é demonstrar para *convencer*, isto é, fornecer um tipo de argumento que não possa ser colocado em dúvida. A outra tem como objetivo *compreender*, neste caso trata-se de identificar relações e justificar os seus porquês. Assim, consideramos que a prática da validação é de fundamental importância no aprendizado da matemática, tanto por seus aspectos epistemológicos quanto didáticos.

Outra justificativa para se trabalhar a validação matemática nas escolas é o fato de que, no mundo real, as contradições e incoerências são abundantes, daí a importância desse tipo de conhecimento que não tolera a contradição interna. Trata-se, portanto, de um campo de inestimável valor formativo, onde é possível encontrar o prazer da certeza, da não contradição, do uso de uma linguagem precisa, concisa e universal, enaltecida e cultivada durante séculos como “honra do espírito humano”.

Historicamente, a construção do processo interno de validação da matemática vem de longa data. Em sua origem destacam-se vários matemáticos gregos, dentre eles Tales, Pitágoras, Hipócrates, Eudóxio, Teeteto, Platão, Aristóteles e muitos outros, que trabalharam com o objetivo de produzirem organizações dedutivas de conteúdos matemáticos, que foi sistematizado na obra “Os Elementos” de Euclides (cerca de 300 a.C.), um clássico da história da humanidade. Esse tipo de organização axiomática dedutiva e a forma de apresentar a matemática dessa obra se perpetuaram durante o seu desenvolvimento histórico. As organizações didáticas da matemática, particularmente em níveis escolares mais elevados, também sofreram grande influência dessa obra, como pode ser observado nos livros didáticos de matemática de diferentes épocas.

Apresentamos primeiramente, de forma resumida, a validação em alguns modelos teóricos criados por autores da Educação Matemática e na sequência uma síntese de resultados de algumas pesquisas, sobre validação matemática, com alunos da educação básica.

A validação matemática em alguns modelos teóricos

Polya e as etapas de resolução de problemas

George Polya (1887-1985) foi pioneiro no estudo da arte de resolver problemas matemáticos e publicou algumas de suas principais idéias estão descritas no seu livro clássico: “A arte de resolver problemas”, de 1944. Nessa obra, além da análise de estratégias, de padrões e de analogias ele identificou etapas que ocorrem na resolução de problemas. Nesse livro ele mostra que, na resolução de um problema, os estudantes deveriam passar por quatro etapas fundamentais: *compreensão*, *elaboração de um plano de solução*, *execução* do plano e por fim fazer um *retrospecto*, ou análise da solução obtida e do processo. Nas duas primeiras etapas, da compreensão e busca de solução, ele mostra a importância dos processos de descoberta, que ele denominou de heurística, onde analisa importância de explorar analogias, identificar de padrões e analisar problemas correlatos mais simples. Por outro lado, nas outras duas etapas, o enfoque é dado para a execução e para a garantia de que solução está correta. Para isso Polya enfatiza a

necessidade de verificar e também demonstrar a correção dos passos. Desse modo pode-se observar que nas duas primeiras etapas o principal objetivo é encontrar a solução, enquanto que nas duas últimas o mais importante é ter certeza de que não houve erros, tanto durante o processo quanto sobre o resultado obtido.

Nas duas primeiras etapas do modelo de Polya é dada ênfase aos procedimentos heurísticos (analogia, padrão, problemas correlatos, ...) enquanto que nas duas últimas estão focadas na execução e validação. De modo geral, o autor considera que em Matemática há fundamentalmente dois tipos de problemas que se imbricam, que são os de *determinação* e os de *demonstração*. Essas idéias pioneiras contidas na obra de Polya, foram retomadas e aprofundadas posteriormente por pesquisadores da área de Educação Matemática.

A teoria das situações didáticas de Brousseau

O teórico francês Guy Brousseau (1986) elaborou o modelo teórico da Teoria das Situações Didáticas, do qual apresentamos a seguir, de maneira resumida, alguns de seus principais elementos. Essa teoria integra o quadro teórico da Didática da Matemática, que “estuda as atividades didáticas, ou seja, as atividades que têm como objeto o ensino, evidentemente naquilo que elas têm de específico para a matemática” (BROUSSEAU, 1996, p. 35).

Para Brousseau (2008, p. 21) uma *situação didática* pode ser entendida como o entorno do aluno, que inclui tudo o que colabora no componente matemático de sua formação. Segundo o autor, uma situação é *didática* quando ao propô-la o professor tem a intenção de que os alunos aprendam um determinado saber, neste caso, um saber matemático.

Para o autor, o trabalho do professor não pode se limitar à divulgação de conteúdos aos alunos, mas sempre que possível iniciar pela *devolução* de um bom problema, o qual satisfaz um conjunto de condições que permitem que o aluno se aproprie da situação. A partir do momento em que os alunos se apropriaram da situação, o professor pode deixá-los com a responsabilidade da pesquisa, retornando então a natureza *adidática* da situação. Uma situação *adidática* se caracteriza pelo fato de que é o aluno que busca resolver um problema usando seus conhecimentos e isso corresponde à intenção do professor de fazer com que ele adquira novos conhecimentos, mas sem explicitar isso para o aluno, sem intervir como detentor do saber para propor ajuda excessiva durante a pesquisa da solução. Os alunos devem ser plenamente responsáveis pela investigação e autônomos na pesquisa da solução.

Nesse processo, uma situação *adidática de ação* fica caracterizada quando, diante dela, o aluno fica envolvido na busca de uma solução. Nessa pesquisa ele pode realizar descobertas e caminhar para a construção de um saber. Uma situação *adidática de formulação* ocorre quando as diferentes condições exigem uma troca de informações e a criação de uma linguagem que permita a comunicação de suas produções ou idéias. Numa situação *adidática de validação* as trocas não se restringem às informações, mas também de enunciados de proposições. Diante delas surge a necessidade de provar o que se afirma e na medida do possível sem fazer apelo à ação. A situação de *institucionalização* visa estabelecer o caráter de objetividade e universalidade do conhecimento. Ela é constituída pelo ato no qual o professor dá um *status* escolar aos conhecimentos matemáticos produzidos durante a situação.

Observamos que nesse modelo teórico a validação ocupa um espaço importante, tanto no trabalho do aluno quanto do professor, que deve *institucionalizar*, por meio dos conhecimentos matemáticos cultivados na instituição escolar.

O modelo de provas de Balacheff

No modelo teórico de Balacheff (1988) são identificados quatro tipos de provas, as quais são classificadas em dois níveis: a prova *pragmática* e a prova *intelectual*. Ele identifica como pragmáticas as provas que se apoiam em manipulações empíricas e como provas intelectuais aquelas que se apóiam em formulações de propriedades e das possíveis relações entre elas.

Em sua Tipologia de Provas, Balacheff (1988) propõe uma categorização em níveis de provas, sendo que tal categorização depende do alcance da generalidade e do conceito que estão envolvidos numa prova específica. Os tipos de provas são por ele categorizados como:

- **Empirismo ingênuo:** Afirma-se a verdade de uma proposição após a verificação de alguns casos particulares. É considerado o primeiro passo no processo de generalização.

- **Experimento Crucial:** Afirma-se a verdade de uma proposição após a verificação de casos particulares, seguido da verificação de um caso especial, geralmente não familiar. A diferença principal com relação ao empirismo ingênuo é que o indivíduo, após verificar a validade da proposição para alguns casos particulares ainda não se dá por satisfeito e sente a necessidade de testar mais um caso “especial” para tirar a dúvida.

- **Exemplo Genérico:** Afirma-se a verdade de uma proposição após a manipulação de um caso particular, mas de modo a considerá-lo com uma característica que representa uma classe de objetos.

- **Experimento mental:** Afirma-se a verdade de uma proposição, de forma genérica, após conceber internamente as ações realizadas sobre as proposições em questão. Neste caso, o texto da prova indica generalidade e advém de uma tentativa de revelar uma classe de objetos.

Segundo Balacheff (1988), são consideradas pragmáticas as provas apresentadas no nível do *empirismo ingênuo* e do *experimento crucial*. As provas apresentadas ao nível do *exemplo genérico* representam um momento de passagem entre as provas pragmáticas e as intelectuais. O *experimento mental* já representa, nesse contexto, uma prova intelectual.

A teoria antropológica do didático de Chevallard

No início da década de 1990 um novo campo teórico criado por Chevallard (2001), caracterizado pela emergência de uma antropologia matemática: estudo do homem “aprendiz e professor de matemática”. Trata-se de uma paisagem da Didática da Matemática, na qual Chevallard identifica uma ecologia social e cultural de saberes.

No modelo teórico da Teoria Antropológica do Didático, uma *praxeologia* é caracterizada por um quádruplo que pode ser denotado por $[T/\tau/\theta/\Theta]$, composto de um tipo de tarefas T , de técnicas τ (formas de cumprir as tarefas desse tipo), de tecnologias θ , entendidas como o discurso que justifica a validade de uma técnica e de uma teoria Θ , que por sua vez justifica as explicações fornecidas por uma tecnologia. Para melhor explicitar o significado atribuído ao termo *praxeologia*, transcrevemos, a seguir, um excerto de Chevallard:

Em resumo, toda atividade humana coloca em funcionamento uma organização que podemos denotar por $[T/\tau/\theta/\Theta]$ e que denominamos praxeologia, ou organização praxeológica. Na palavra praxeologia o prefixo grego *práxis* significa prática e remete ao bloco prático-técnico, o qual pode ser denotado pelo símbolo $[T/\tau]$ e o sufixo grego *logos* significa razão, discurso racional, e remete ao bloco tecnológico-teórico $[\theta/\Theta]$. Essas noções permitem definir de maneira bastante realista certas noções usuais: assim podemos considerar que por *saber-fazer* estamos designando usualmente um bloco $[T/\tau]$ e, por *saber*, em sentido restrito, um bloco $[\theta/\Theta]$.

(Chevallard, 2002, p. 3)

A partir dessa definição, pode-se deduzir que a teoria praxeológica tem a vantagem de destacar um aspecto essencial do ensino da matemática que é a necessidade do professor ter um domínio simultâneo, tanto dos aspectos práticos como dos aspectos teóricos dos conteúdos ensinados. Outro aspecto importante dessa teoria é a valorização do estudo e de dois conceitos fundamentais: *saber* e *saber-fazer*, que ele considera como elementos indissociáveis, como se fossem duas faces de uma mesma moeda. Nos termos usados por Chevallard, pode-se dizer que “não existe *práxis* sem *logos*; não existe *logos* isento de implicações práticas”. Daí a importância de analisar o conjunto das tarefas que predomina no ensino regular da matemática e suas articulações com a dimensão teórica do saber matemático.

Seja T um tipo de tarefa dado. Uma praxeologia relativa a T requer uma maneira de realizar as tarefas $t \in T$: a uma determinada maneira de fazer τ , se chama de *técnica* (do grego *tekhnê*, saber fazer). Vale lembrar que nenhuma técnica resolve todas as tarefas e por isso é necessário falar em alcance da técnica. De modo geral, a maioria das técnicas não é algorítmica, mas a escola valoriza as técnicas algoritmizáveis. Por exemplo, podemos efetuar a divisão usando o material dourado, repartição convencional, algoritmo, etc... Analogamente podemos somar frações transformando-as em números decimais, ou em frações equivalentes de mesmo denominador, usando calculadora, ... Quando uma técnica é mais eficiente para uma parte maior das tarefas dizemos que essa técnica é superior, pois tem maior alcance.

Considera-se como *tecnologia* e se indica geralmente por θ , um discurso racional – o *logos* – sobre a técnica – a *tekhnê* – τ . O objetivo maior desse discurso é justificar «racionalmente» a técnica τ , para assegurar-se de que ela permite realizar as tarefas do tipo T , ou seja, realizar as que se pretende. É importante observar que qualquer que seja o tipo de tarefas T , a técnica τ relativa a T , traz sempre ao menos um embrião de tecnologia, um vestígio de θ . Em muitos casos alguns elementos tecnológicos estão integrados à técnica.

O discurso tecnológico contém afirmações, mais ou menos explícitas, que pode exigir justificativa. Ocorre então um nível superior de justificativa-explicação-produção, o da *teoria*, Θ , que retoma, em relação à tecnologia, o papel que esta última tem com relação à técnica.

Resumindo, nesse modelo teórico o bloco do *logos*, tecnológico-teórico, está impregnado de validação, num primeiro momento por meio de justificativas e explicações sem detalhamento ou aprofundamento, que num segundo momento devem ser validadas num outro nível teórico, mais elevado que o da tecnologia.

Finalizamos esta parte observando que, em todos os modelos teóricos apresentados, e em outros que não mencionamos, os autores dão grande importância à validação matemática. É provável que todos eles tenham sofrido algum contágio epistemológico da matemática ao elaborarem tais modelos teóricos. Tais modelos têm sido utilizados como referenciais teóricos de

pesquisas sobre ensino e aprendizagem de matemática, dentre as quais apresentamos a seguir alguns elementos de pesquisas que realizamos.

Extratos de pesquisas realizadas

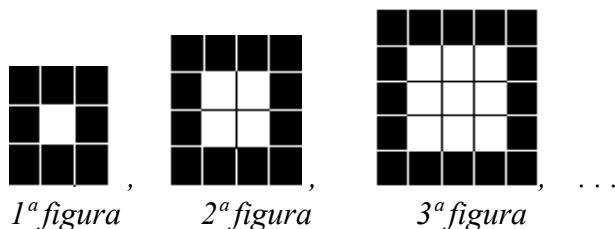
Conforme mencionamos inicialmente, nas pesquisas que realizamos sobre validação matemática, estiveram envolvidos alunos dos anos finais do ensino fundamental e do ensino médio. O primeiro trabalho que apresentamos teve como objetivo analisar dificuldades e procedimentos de validação utilizados por alunos do 9º ano do ensino fundamental, com situações-problema envolvendo padrões em sequências numéricas; o segundo, constituído de um grupo de estudantes de um curso preparatório para o vestibular, num contexto de ações afirmativas, os quais eram desafiados a resolver situações-problema sobre divisibilidade; e por último, um estudo sobre produção e validação de conjecturas no conjunto dos números inteiros, por alunos de 3ª série do ensino médio, de uma escola privada.

Em estudos que realizamos, com o conjunto dos números inteiros, constatamos que é possível explorar uma diversidade de situações-problema, as quais permitem o estudo de conjecturas aritméticas envolvendo os conteúdos de paridade, divisibilidade, bem como vários outros tipos de regularidades em diferentes tipos de sequências. Um fato curioso é que, na maioria dos casos, os enunciados das conjecturas no conjunto dos números inteiros são fáceis de compreender, o que contribui para que os alunos se interessem e se envolvam na busca de solução. Assim, as conjecturas se mostram uma rica fonte de exploração de generalizações e de validações a partir de cálculos aritméticos relativamente simples. De fato, há uma enorme gama de proposições aritméticas no conjunto dos números inteiros, as quais permitem a produção de conjecturas e provas por meio de modelagem algébrica, as quais podem ser exploradas nos anos finais do ensino fundamental e também no ensino médio. As pesquisas que realizamos com alunos desse nível de escolaridade da educação básica, apontam que, diante de atividades com conjecturas aritméticas, eles se envolvem em busca de soluções e alguns deles buscam validar suas respostas. De modo geral, as tentativas de validação ocorreram após questionamentos do pesquisador, com base em elementos da síntese teórica apresentados acima.

O primeiro extrato é concernente a uma pesquisa que foi realizada com um grupo de dez alunos, do 9º ano do ensino fundamental, de uma escola privada, identificados aqui pelas letras A, B, C, D, E, F, G, H, I, J e K. Ela teve como objetivo investigar as produções desses alunos diante de sequências que possibilitavam identificar generalizações e validá-las por meio de relações numéricas e algébricas.

Para ilustrar parte dessa pesquisa apresentamos a seguir uma breve descrição de uma das atividades realizadas cujo enunciado é o seguinte:

Uma sequência de mosaicos quadrados é construída com azulejos quadrados pretos e brancos, todos do mesmo tamanho, conforme figura a seguir:



A primeira figura é formada por um azulejo branco cercado por azulejos pretos e assim sucessivamente. Como calcular a quantidade de azulejos brancos e pretos para a figura de ordem n , dessa sequência? E do total de azulejos? Escreva uma regra e justifique.

Nessa atividade os alunos F, H, I, J, e K conseguiram encontrar as expressões correspondentes e todos utilizaram a mesma estratégia, ou seja, eles perceberam que o número de quadrados brancos, sempre era um número quadrado perfeito. Assim, para obter a quantidade de quadradinhos brancos bastava elevar ao quadrado o número de ordem (n) do termo. Para os pretos, eles colocaram $4n+4$, justificada do seguinte modo por alguns dos alunos: “pensei nos quadrados brancos, vi que a quantidade de quadrados em uma linha, ou seja, a posição do termo dava uma parte dos quadrados pretos, o perímetro, formado por uma parte dos quadrados pretos, $4n$, assim só faltava os 4 quadradinhos pretos das pontas, $4n+4$ ”. Para o total, somavam brancos mais pretos, para números de ordem particulares. Nenhum deles apresentou uma validação geral do tipo $(n+2)^2 = n^2 + 4n + 4$, mostrando não terem atingido esse nível de abstração e generalização. Os demais alunos encontraram dificuldade para expressar a generalização, tanto em linguagem natural, quanto por meio do uso de letras. Houve alunos que conseguiram encontrar a quantidade de quadradinhos brancos e pretos por meio de cálculos numéricos para uma dada ordem particular, mas não chegaram a perceber regularidades na sequência. Foi possível perceber que, de modo geral, as discussões em grupo contribuíram para que os alunos se comportassem de maneira diferente em relação a cada sessão anterior, manifestando assim algumas aprendizagens no decorrer das cinco sessões realizadas, sobretudo no que concerne ao processo de validação.

Outra pesquisa foi a que realizamos com um grupo de dez alunos de um curso preparatório para o vestibular, idealizado num contexto de ações afirmativas. Esse curso tinha como finalidade possibilitar o acesso e a permanência no ensino superior, de diversos grupos étnicos de baixa renda, constituído de afro-descendentes, índio-descendentes, portadores de necessidades especiais e brancos. Em cada sessão os participantes da pesquisa eram divididos em grupos de dois ou de três alunos, os quais eram desafiados a resolver situações-problema sobre divisibilidade.

Durante as sessões experimentais da pesquisa, cada uma com duração uma hora de aproximadamente, os três tipos de tarefa trabalhados foram os seguintes: T_1 : Resto da divisão; T_2 : Múltiplos e Divisores e T_3 : Quantidade de divisores de um número. Para dar uma idéia do trabalho experimental realizado, apresentamos a seguir uma dessas sessões de estudos, na qual foi proposta uma tarefa, pertencente ao tipo T_3 : “Quantidade de divisores de um número”, cujo enunciado é o seguinte: *Qual o maior inteiro menor que 1000 que possui 10 divisores?*

O objetivo principal desta tarefa foi provocar o grupo, no sentido de perceberem a necessidade de saber utilizar técnicas já conhecidas em problemas com nível de complexidade diferente bem como de validá-las, ou seja, de adentrar ao nível tecnológico-teórico, conforme o modelo de organização praxeológica proposto por Chevallard.

O problema foi entregue a eles no início dessa sessão. Houve um primeiro contato com a atividade proposta, seguido de comentários e de uma leitura coletiva, tornando clara a compreensão do enunciado. Em seguida teve início o trabalho nos grupos, os quais ficaram livres para a resolução. Após algum tempo percebemos que, de modo geral, eles tentavam analisar os números próximos e menores que 1000, por meio da técnica da fatoração. Nesse momento interferimos e perguntamos: “Como tem que ser um número para que ele tenha dez divisores?” A partir das falas dos estudantes, houve uma retomada visando a solução do problema, mas não houve tempo suficiente para que eles terminassem a atividade naquele encontro, ficando como dever de casa.

Na sessão da semana seguinte, os alunos trouxeram tanto soluções corretas quanto incorretas, as quais foram analisadas e validadas coletivamente. Uma estudante relatou verbalmente que, para compreender de fato a questão e chegar a uma solução que julgava estar correta, pensou nela por cinco dias e sempre que podia, durante aquela semana, voltava a pensar na atividade, até conseguir uma solução que a deixasse satisfeita.

No transcorrer das sessões semanais, identificamos avanços com relação ao sentido do estudo para o grupo participante da pesquisa. Assim, foram observadas mudanças de postura dos alunos, tanto nas práticas de estudo quanto na forma de agir diante de situações-problema, particularmente com relação à investigação e validação da resposta, caracterizando um rompimento com uma maneira de fazer arraigada em suas práticas.

Nesta uma última ilustração apresentamos a sinopse de uma pesquisa que tinha como objetivo principal estudar a produção de provas por alunos da 3ª série do Ensino Médio, durante a resolução de problemas envolvendo conjecturas no conjunto dos números inteiros. Nela foram analisadas descobertas, formulações, validações, linguagem matemática utilizada, bem como tipos e níveis de provas produzidos. A população também foi constituída por dez alunos, de 3ª série do Ensino Médio de um Colégio Particular, os quais participaram de forma voluntária.

Para dar uma idéia do trabalho realizado, apresentamos a seguir a descrição de parte de uma atividade aplicada durante pesquisa, cujo enunciado foi apresentado aos alunos por meio da seguinte pergunta: *É possível encontrar três números inteiros consecutivos de tal modo que o quadrado do médio seja igual ao produto dos outros dois?* Nas produções dos alunos foram encontradas provas do tipo *empirismo ingênuo*, por exemplo, para 1, 2 e 3 temos que $2^2 \neq 1.3$, 2, 3 e 4 temos que $3^2 \neq 2.4$ e 3, 4 e 5 temos que $4^2 \neq 3.5$, logo não é possível encontrar três números inteiros consecutivos de modo que o quadrado do médio seja igual ao produto dos outros dois. No entanto, houve alunos que produziram provas mais elaboradas, que extrapolaram no nível pragmático, as podemos identificar como *prova algébrica* de nível intelectual, segundo a terminologia utilizada por Balacheff (1988). Uma prova desse tipo é a seguinte: *Sejam $m, m + 1$ e $m + 2$, três números consecutivos, com m inteiro. Elevando $(m+1)^2$ obtemos $m^2 + 2m + 1$ e multiplicando m por $(m+2)$ dá como resultado $m^2 + 2m$. Observa-se então que o quadrado termo médio supera de uma unidade o produto dos outros dois. Logo, não é possível encontrar três números inteiros consecutivos de tal modo que o quadrado do médio seja igual ao produto dos outros dois.* Ao observar que “o quadrado termo médio supera de uma unidade o produto dos outros dois” o aluno foi além do que lhe havia sido solicitado. Temos aqui um exemplo de *generosidade da álgebra*, pois além de permitir que os alunos chegassem à conclusão de que os números resultantes dos produtos nunca serão iguais, permitiu ainda que ele concluísse que a diferença entre eles é sempre igual a uma unidade.

Nesse trabalho foi possível identificar algumas demonstrações da tipologia de provas proposta por Balacheff (1988), predominando inicialmente as provas empíricas. No entanto, após as primeiras sessões realizadas, ao perceberem a potencialidade do uso adequado de registros algébricos para modelarem problemas dessa natureza, os alunos passaram a restringir a utilização de registros numéricos. Assim, com base na pesquisa realizada, pode-se aceitar como viável a aplicação de uma sequência didática visando à aprendizagem de demonstrações matemáticas a partir de conjecturas.

Considerações finais e conclusões

Nossos estudos e pesquisas apontam que o conjunto dos números inteiros com sua aritmética elementar, também conhecida como Teoria dos Números, pode ser um campo fértil para se estudar conjecturas e provas em matemática, mas observa-se que isso é pouco explorado em nível de educação básica. Esse fato é confirmado pelo trabalho de Groenwald et al (2009), no qual observam que a Teoria dos Números ocupa posição periférica no currículo da educação básica.

Na matemática “moderna”, tanto a geometria como a Teoria dos Números ficaram relegadas a segundo plano nos currículos de matemática do ensino fundamental e médio. Nos últimos anos, a geometria voltou a recuperar sua força e importância nos currículos, não ocorrendo o mesmo com a Teoria dos Números, talvez por não ter sido encontrada uma forma mais simples para sua apresentação, de maneira que as dificuldades de compreensão, tanto para os professores como para os alunos, fossem superadas.

(GROENWALD et al, 2009, p. 28)

Ao analisarmos as orientações contidas nos documentos oficiais do MEC, como os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), Guias do Projeto Nacional do Livro Didático (PNLD), Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OECM), entre outros, observamos que há uma valorização, tanto no que concerne à produção de conjecturas quanto das práticas dedutivas. A título de ilustração apresentamos abaixo um excerto do guia do PNLEM (2005) que sugere evitar demonstrações de propriedades muito evidentes ou de alto nível de complexidade. No entanto, esse documento incentiva a exploração de conjecturas seguidas de provas que favoreçam a construção do método dedutivo.

O livro-texto deve valorizar os vários recursos do pensamento matemático, como a imaginação, a intuição, o raciocínio indutivo e o raciocínio lógico-dedutivo, a distinção entre validação matemática e validação empírica e favorecer a construção progressiva do método dedutivo em Matemática. A respeito do método dedutivo, convém advertir para desvios freqüentes a serem afastados. O primeiro deles é o de formular uma generalização como fato provado, com base na verificação de exemplos — muitas vezes um ou dois apenas. Outros são apresentar provas muito complicadas de alguns teoremas, que podem ser deixadas para estudos posteriores, ou expor demonstrações difíceis para fatos intuitivamente evidentes. Muitas vezes, tais demonstrações podem ser dispensadas sem prejuízo da compreensão. (BRASIL, 2005, p.75)

Por outro lado, ao lançarmos um olhar sobre algumas pesquisas sobre livros didáticos, bem como o trabalho que vem sendo realizado em sala de aula por professores de matemática da educação básica, que atuam nos anos finais do ensino fundamental e no ensino médio, encontramos indícios de que, de modo geral, a prática de validação por meio de verificações, provas e demonstrações é pouco expressiva. De modo geral, somos levados a crer que, em vista da grande diversidade das condições da formação profissional, nem sempre há uma clara

compreensão, nem mesmo por parte dos professores, quanto ao significado epistemológico e didático de diferentes noções relacionadas ao tema.

Ao analisarmos livros didáticos e os guias do PNLD é possível perceber o surgimento de um tipo de estratégia diferenciada de validação do saber matemático, manifestada pela valorização de uma dialética entre o pensamento indutivo e o dedutivo em alguns livros didáticos publicados nos últimos anos. No entanto, apesar das orientações contidas nos PCN e outros documentos oficiais do MEC, observa-se ainda, em grande parte dos livros didáticos e também nas práticas dos professores em sala de aula de matemática, a predominância da exploração empírica de atividades práticas, bem como uma forte ênfase no trabalho com técnicas e a valorização de estratégias indutivas, em detrimento das lógico-dedutivas voltadas para a validação teórica do conhecimento.

Neste texto apresentamos um breve panorama de pesquisas que vimos realizando nos últimos anos, tendo o conjunto dos números inteiros como campo para a realização experimental, onde podem ser efetuados cálculos aritméticos com as operações elementares, tanto para descobrir como para testar regularidades aritméticas por meio de cálculos algébricos.

Nas descrições das pesquisas aqui mencionadas, não foi possível descrever com detalhes como os referenciais teóricos foram utilizados em cada uma delas. No entanto gostaríamos de informar que a Teoria das Situações Didáticas foi utilizada em todas, com exceção da pesquisa sobre divisibilidade, a qual teve como referencial teórico a Teoria Antropológica do Didático. No trabalho sobre conjecturas e provas, além da Teoria das Situações, nos servimos do modelo de provas de Balacheff. Por fim, ressaltamos que alguns princípios teóricos da obra de Polya, concernente ao processo de resolução de problemas, permearam todas as atividades realizadas com os alunos, sobretudo quanto à parte conclusiva, na qual eles devem fazer um retrospecto e um exame cuidadoso da solução encontrada, se questionam sobre a validade das ações realizadas e sobre outras possíveis. No que concerne ao desenvolvimento experimental, com exceção da pesquisa sobre divisibilidade, nas demais nos apoiamos nos princípios da Engenharia Didática, descrito por Artigue (1988).

Gostaríamos de concluir ressaltando que, modo geral, nas pesquisas que realizamos, os alunos se envolveram em atividades desafiadoras e os modelos teóricos mencionados, que tratam da validação matemática, permitiram a análise de dificuldades encontradas, de conceitos mobilizados, de validações produzidas, bem como indícios de aprendizagens ocorridas. Dentre as perspectivas de continuidade das pesquisas sobre validação vislumbramos dois eixos que poderiam ser perseguidos, um deles é a exploração do debate de validação e da oralidade, dando maior ênfase ao trabalho com os objetos ostensivos da língua materna e o outro seria analisar procedimentos de validação utilizados por alunos de cursos de graduação na área de ciências exatas, em particular de matemática.

Bibliografia e referências

- Artigue, M. (1989). *Ingénierie didactique* Recherches en Didactique des Mathématiques, vol. 9, n°3, p. 281-307. La Pensée Sauvage.
- Balacheff, N. (1988). *Une étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de Collège*, Thèse d'Etat, Université Joseph Fourier, Grenoble.
- Brasil, Secretaria de Educação Básica. (2005). *Guia dos Programa Nacional dos Livros Didáticos para o Ensino Médio (PNLEM): Matemática*. Brasília: MEC/SEF.
- Brousseau, G. (1986) *Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques – Recherches en Didactiques des Mathématiques*. v.7, n° 2, pp. 33-116.
- Brousseau, G. (1996). Fundamentos e Métodos da Didáctica da Matemática. In: BRUN, J. (org.) *Didáctica das Matemáticas*. Lisboa: Instituto Piaget, Cap. 1. pp. 35-113.
- Brousseau, G. (2008). *Introdução ao estudo da teoria das situações didáticas. Conteúdos e métodos de ensino*. São Paulo: Ática.
- Chevallard Y. (1989). *Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège* (2e partie). Petit x, n° 19, pp. 43-72, Ed. IREM de Grenoble.
- Chevallard, Y., Bosch, M. & Gascon, J. (2001). *Estudar Matemáticas: O elo perdido entre o ensino e a aprendizagem*. Porto Alegre: Artmed.
- Chevallard, Y. et al. (2002). *Organizer l'étude. 1. Structures & Fonctions*. Actes de La 11^e École de D'Été de Didactique des Mathématiques – Corps – 21-30 Août 2001, pp. 3-22. La Pensée Sauvage – Editions – Imprimé en France.
- Freitas, J. L. M.; Pais, L.C. (1999). *Um estudo dos processos de provas no ensino e aprendizagem da geometria no primeiro grau*. Rio Claro: Bolema. p.p. 42-62.
- Groenwald, C. L. O., Franke, R. F., Nunes, G. S., Sauer, L. O. (2009). Teoria dos Números no Ensino Básico – Desenvolvendo o Pensamento Aritmético. In: Maranhão, Cristina (Org.). *Educação Matemática nos anos finais do ensino fundamental e no ensino médio*. São Paulo: Musa Editora, p. 27- 44.