XIII CONFERENCIA INTERAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
CIAEM 2011
26 - 30 Junio, 2011
Recife, Brasil
50 años del Comité Interamericano de Educación Matemática

Paradojas en la problematización del cálculo

Concepción Valdés Castro
Facultad de Matemática y Computación. Universidad de La Habana
Cuba
concha@matcom.uh.cu

Resumen

Los conceptos básicos del cálculo se han formado gradualmente, a través del quehacer de varias generaciones de hombres de ciencia en la resolución de problemas matemáticos. Pero este no ha sido un trayecto apacible, sino sujeto a los vaivenes de las contradicciones y paradojas del camino. Sin embargo, la enseñanza tradicional de esta materia pretende ilusoriamente que la iniciación de los estudiantes en sus conceptos básicos transite por un camino libre de obstáculos, aparentemente despejado con el uso del formalismo lógico. En nuestra conferencia pretendemos compartir algunas experiencias acumuladas en varios cursos impartidos con el uso de la problematización de situaciones paradójicas tomadas o inspiradas en la historia. Este camino adoptado oportuna y adecuadamente puede ser una vía eficaz para la superación de los obstáculos cognitivos más comunes en los estudiantes.

Palabras claves: paradojas, problematización del contenido, perspectiva histórica, errores, cálculo.

Introducción

Se ha dicho que en el lenguaje común "paradoja" puede tener diversos significados: enigma, misterio, ambigüedad, absurdo y por qué no, también disparate, pero siempre con algo de lógica. No hay duda que las paradojas crean un ambiente efectivo para la reflexión, estimulan el examen apasionado de las hipótesis, promueven la actitud resolutiva y a fin de cuentas, nos prueban que la "lógica disparatada" y los argumentos erróneos no son tan infrecuentes en la matemática como a veces pensamos o nos hacen pensar. En toda la historia de la matemática las mentes brillantes de sus protagonistas han estado permanente y constantemente ejercitadas en la resolución de paradojas de varios tipos y niveles, sobre todo como actividad inseparable de las crisis y revoluciones científicas.

Philip Davis (1965) destacó lo que se ha calificado como "la mayor paradoja matemática" cuando afirmaba:

"Es paradójico que, mientras la Matemática tiene reputación de ser una de las materias que no tolera las contradicciones, en realidad posee una prolongada historia de coexistencia exitosa con las contradicciones."

A este tipo de juicio Kleiner y Movshovitz-Hadar (1994) lo denominan una "metaparadoja", es decir un fenómeno paradójico de la Matemática como ciencia, no formulado en el lenguaje específico de ninguna de sus ramas. También en la enseñanza de la matemática podemos encontrar una metaparadoja tan antigua como la misma tarea de enseñar matemática y aún muy lejos de estar resuelta. Expresémosla con las palabras de Henri Poincaré (1908):

> *"¿Cómo es que hay tantos espíritus que se niegan a comprender las matemáticas? ¿No hay en ello algo de paradójico? Si la matemática se sustenta sobre principios sencillos y un razonamiento lógico que apela al sentido común ¿por qué la mayoría la encuentra oscura?"*

Surge entonces una cuestión ¿no será que estas dos metaparadojas están estrechamente relacionadas? En otras palabras, ¿no existirá una contradicción entre la naturaleza propia del quehacer matemático y los métodos utilizados en su enseñanza? Pensamos que una buena parte de los educadores matemáticos coincidirán con nosotros en que la respuesta es afirmativa. Entonces *¿por qué* y *cómo* se manifiestan estas contradicciones? *¿dónde* podemos encontrarlas?

A lo largo de la historia muchos pensadores han expresado criterios estrechamente relacionados con el *porqué* y el *cómo*, mencionemos solo dos de ellas. En *Discurso del Método*, Descartes revela su insatisfacción con la instrucción matemática recibida cuando afirma:

> *"Sometiendo al cálculo las proposiciones sobre los números, tenía que reconocer que la mayor parte eran exactas; en cuanto a las figuras, ponían bajo mis ojos un gran número de verdades, y las conclusiones y los resultados eran exactos. Pero no me mostraban suficientemente por qué las cosas eran así y cómo se había llegado a descubrirlas. No me extrañaba pues, que muchos hombres inteligentes e instruidos después de haber comenzado el estudio de las matemáticas, las olvidaran por pueriles y vacías, o se detuvieran en su estudio por creerlas muy difíciles y embrolladas."*

Por su parte Polya (1974) sintetiza en forma magistral la esencia de la cuestión cuando afirma:

> *"Las matemáticas presentadas a la manera euclidiana aparecen como una ciencia sistemática, deductiva; pero las matemáticas en vía de formación aparecen como una ciencia experimental, inductiva"*

Así, el porqué y el cómo aparecen relacionados con el divorcio existente entre la naturaleza misma de la actividad matemática y los métodos utilizados en su enseñanza, los cuales ponen de manifiesto, en esencia, solo una de las facetas de esta ciencia: la deslumbrante envoltura final que le proporciona el formalismo lógico. Luego, no nos cabe duda que para buscar el *dónde* debemos auxiliarnos del análisis de cómo se formaron los conceptos, los teoremas, los ejemplos y contraejemplos notables, asimilar el desarrollo de nuevos métodos y herramientas de trabajo, esto es, acudir a la Historia de la Matemática. La historia también nos mostrará la utilidad y necesidad de los razonamientos lógicos, lo oportuno y necesario de realizar esa labor de "higiene", de revisión crítica de los resultados obtenidos, de análisis de sus posibles simplificaciones, aplicaciones o generalizaciones, en fin cómo las ideas matemáticas se pueden mantener "saludables" y "fuertes". En resumen, la historia de la matemática puede ser una guía insustituible en la tarea fundamental de la educación matemática, *la inmersión en las formas propias de proceder del ambiente matemático,* como señaló M. Guzmán (2007).

Aunque – es necesario subrayarlo – *no basta observar los hechos y reproducir exactamente la evolución de las ideas*, también es imprescindible una visión evaluadora y crítica, para *seleccionar y reconstruir* aquello que realmente puede ayudar al desarrollo de una actividad creativa. Se trata de usar el conocimiento de la historia, sin menospreciar el valor de lo lógico del contenido y con atención cuidadosa del objetivo pedagógico, según las características del grupo de alumnos.

Pero ¿cuál es la forma de proceder fundamental en el quehacer matemático?, para nosotros está clara: *la resolución de problemas*. Es por ello que vemos en la problematización del contenido un instrumento imprescindible en este proceso de inmersión en el ambiente matemático. Concebimos la problematización del contenido en un sentido amplio, pretendemos que la presentación de las diversas partes del curso se realice, en la medida de lo posible, en la búsqueda de la respuesta a algún problema adecuado a los objetivos, unas veces de carácter histórico, otras inspirado en la historia y cuando sea necesario, diseñado por el docente con un objetivo específico. De esta forma, no sólo se explotan las bondades del método heurístico, sino también se amplía la cultura matemática y la comprensión de los mecanismos de progreso de la Ciencia, en fin, se procura contribuir de modo más efectivo al desarrollo integral de los alumnos.

Nosotros nos adheriremos al principio elemental de que una nueva cuestión de estudio debe presentarse formalmente al educando solo cuando éste se encuentre *suficientemente motivado*, cuando haya percibido la *necesidad* de esta introducción y para aproximarnos a este nivel de motivación también utilizaremos la historia de la matemática como consejera. Muchas de las situaciones problemáticas que encontramos en la historia nos parecen adecuadas para explicar el encanto y la importancia de los asuntos del programa. Pero entre estas situaciones problemáticas destacan aquellas que se han convertido en espinosas paradojas y controversias, algunas de las cuales se resistieron durante largos años a ser sometidas. Es usual que aquellas paradojas que aparentaron en su momento la mayor inaccesibilidad y firmeza son las que dieron lugar a la aparición de conceptos claves e incluso de nuevas teorías matemáticas, pero, también, nos revelan los conceptos más difíciles de asimilar y los puntos más escabrosos del programa de estudio.

Nuestra experiencia personal ha estado fundamentalmente vinculada a la enseñanza del Análisis Matemático o Cálculo a alumnos universitarios, incluidos aquellos que no han recibido ninguna formación previa en las herramientas del cálculo. Por este motivo, concretaremos nuestras ideas con ejemplos tomados de esta disciplina matemática, no obstante, ideas semejantes sin duda podrán elaborarse en otras ramas de la matemática.

El papel de las paradojas en la Historia y la enseñanza del Análisis Matemático

Cuando estudiamos el desarrollo histórico del Análisis Matemático observamos que en la primera etapa, entre 1650 y 1820, que denominaremos *infancia y adolescencia*, la herramienta principal eran las series, tanto convergentes como divergentes, y se operaba con ellas de forma semejante al álgebra de las sumas finitas. En todos los casos se consideraban evidentes propiedades tales como: si una serie representa una función en un intervalo, también la representará en todos los puntos donde está definida o el llamado *principio de continuidad* nunca enunciado explícitamente, pero que se materializaba en enunciados diferentes acordes al contexto: “lo que es cierto antes del límite, también lo es en el límite” ; “lo que es verdad para cantidades finitas, lo es también para cantidades infinitamente grandes o pequeñas” o “lo que es cierto para los números reales, también lo es para los complejos” (Kleiner, 2006).

Paradojas en la problematización del cálculo

Actualmente a veces asombra que genios matemáticos de la talla de Newton, Leibniz o Euler manipularan el cálculo de una forma ingenua, sin grandes preocupaciones por las demostraciones formales de los resultados. En realidad deberíamos asombrarnos de que alguien como Bolzano, Cauchy, o Weierstrass se preocuparan y ocuparan en demostrar afirmaciones tan evidentes y aceptadas en su época como "una función continua no puede tomar valores de signo contrario sin anularse" o "toda función continua alcanza sus valores máximo y mínimo". De esta forma aparecieron muchos resultados correctos y sumamente útiles, pero también se evidenciaron numerosas paradojas y ejemplos "excepcionales" que ponían en entredicho los resultados obtenidos. Esta situación conllevó a que, de forma gradual, surgieran críticas y cuestionamientos de estos usos indiscriminados: Bolzano y Cauchy sintieron la necesidad de una definición precisa de función continua en un intervalo, Abel se asombró de que no se llegaran a más situaciones paradójicas por la falta de rigor con que se trataba a las series infinitas, sin embargo Bolzano admitió y Cauchy "demostró" que el límite puntual de una sucesión de funciones continuas era siempre una función continua. Este error fue advertido por Abel y corregido por otros matemáticos, hasta que Weierstrass arraiga en el análisis el uso de la metodología *épsilon-delta* e introduce la definición actual de convergencia uniforme.

La primera lección de la historia resumida arriba es que el rigor penetra en el Análisis, como muestra de su mayoría de edad, de la mano de sus más eminentes representantes, no por un simple capricho intelectual, sino por **necesidades intrínsecas a su desarrollo y al de sus aplicaciones**. Una ojeada a los numerosos estudios sobre las dificultades de los estudiantes en la comprensión y asimilación de los conceptos básicos del cálculo, muestra que los obstáculos mayores están relacionados con los conceptos más abarcadores, aquellos que poseen un mayor grado de abstracción y generalidad.

Artigue (1996) agrupa estas dificultades en tres categorías: Las relacionadas con la complejidad intrínseca de los objetos básicos: números reales, funciones, sucesiones, que suelen presentarse en un primer encuentro con el análisis; las dificultades vinculadas a la noción de límite como concepto básico y generalizador y las provocadas por la necesidad de salvar el obstáculo que representa el rompimiento con el pensamiento algebraico.

Sin embargo, cuando enseñamos el cálculo, generalmente admitimos como un axioma que una exposición de estos conceptos conforme a su etapa de *madurez* permitirá a los estudiantes vencer por sí solos estos obstáculos en el periodo lectivo correspondiente. Por ejemplo, meditemos qué ocurre cuando, sin ninguna preparación previa, definimos **límite**: la terminología utilizada es completamente ajena a la experiencia del alumno, al cual no le es posible conciliar estas ideas abstractas con la idea intuitiva que todo el mundo posee de lo que puede ser un "límite" o la expresión tan frecuente "tender a". Según el *Diccionario de la Real Academia de la Lengua* **límite** es: *término*, *confín o lindero de reinos, provincias, posesiones* o, en sentido figurado, *fin*, *término*. Para *tender*, en su décima acepción, catalogada como ***matemática***, se puede leer: *Aproximarse progresivamente una variable o función a un valor determinado, sin llegar nunca a alcanzarlo*. ¡Cuán distante están estas definiciones del concepto matemático abstracto!

No se trata de un proceso de sustitución de significados, sino más bien de adecuación, de reconocer en el enunciado matemático las distintas particularidades, *el porqué es necesario* y *el porqué es más preciso*. Somos del criterio que ésta es una tarea muy difícil para la mayoría de los estudiantes y para muchos es completamente imposible. Por tanto, consideramos indispensable una introducción gradual del rigor y abstracción, preparando previamente al estudiante para enfrentarse a un concepto nuevo. Pero ¿en qué forma realizar esta preparación? ¿cómo alcanzar el rigor y la abstracción deseados? Las formas concretas pueden variar, pero sin dudas la respuesta no la debemos buscar en el enfoque deductivo ya que, como señalara Lakatos (1982):

> *"El estilo deductivo esconde la lucha y oculta la aventura. Toda la historia se desvanece, las sucesivas formulaciones tentativas del teorema a lo largo del procedimiento probatorio se condenan al olvido, mientras que el resultado final se exalta al estado de infalibilidad sagrada."*

Desde hace más de un siglo, los educadores matemáticos preocupados por el mejor provecho de la enseñanza de su ciencia han señalado la conveniencia de tomar en cuenta la Historia de la Matemática como recurso didáctico. Mucho se ha hablado de sus valores como fuente de motivación y clarificación de las ideas básicas y también como ayuda a la mejor comprensión de las dificultades y obstáculos que presentan los estudiantes en el proceso de asimilación. Durante las últimas décadas se han encontrado nuevas funciones heurísticas para la Historia de la Matemática, que han abierto caminos inexplorados en la Educación Matemática, uno de tales caminos es el uso de las paradojas que aparecen en el desarrollo de cualquier teoría matemática (Kleiner & Movshovitz-Hadar, 1994; Fauvel & Maanen, 2000). El término paradoja lo usaremos en un sentido amplio, como una inconsistencia; podrá ser el descubrimiento de un contraejemplo a una idea ampliamente aceptada, o bien una afirmación verdadera que parece falsa, o una afirmación falsa que parece ser verdadera.

Las paradojas siempre han constituido un importante reto desestabilizador para concepciones vigentes, convirtiéndose así en un incentivo inmejorable para el esclarecimiento de las nociones y resultados básicos. De esta forma las paradojas son una de las mayores fuentes de estimulación para el surgimiento de nuevos conceptos, proposiciones e incluso teorías matemáticas. Una buena parte de las ideas más revolucionarias en la matemática han nacido de situaciones profundamente ambiguas, en la confrontación de numerosas contradicciones y paradojas. Muchas de estas ambigüedades han desaparecido dentro de la matemática como ciencia, apelando a conceptos generalizadores y abstractos, sin embargo, en los intelectos jóvenes e inmaduros muchas de estas paradojas y contradicciones seguirán estando presentes.

En resumen, pretender “borrar” los conflictos y paradojas en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática, presentando al joven exclusivamente la estructura lógica y aséptica de la matemática tiene sin dudas efectos indeseables: pretende ignorar los obstáculos, en lugar de enfrentarlos, por lo que continúan presentes en la mente del estudiante y, aún peor, impide descubrir la faceta humana y creativa de la matemática. Así se proyecta la imagen de una ciencia rígida, inflexible, repleta de verdades absolutas e inmutables.

Las paradojas son conflictos en la ciencia matemática, la cuestión radica en cómo podemos utilizarlas de forma efectiva en la enseñanza, cómo y cuándo es ventajoso utilizar una paradoja en la creación de una situación didáctica adecuada. Desde luego, las posibilidades de su uso variarán en dependencia del objetivo que se persiga, el nivel de enseñanza donde se utilizará y las condiciones socio-culturales concretas en que tendrá lugar el proceso de enseñanza-aprendizaje.

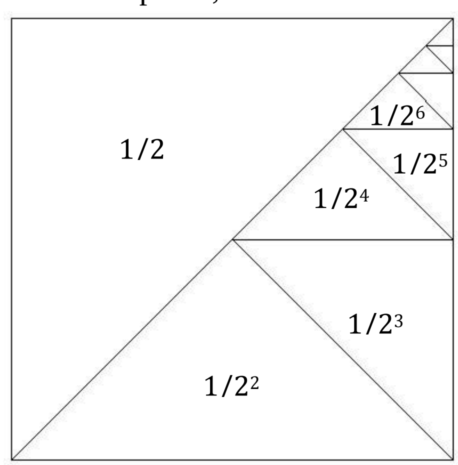
Ejemplos de situaciones paradójicas y sus formas de utilización en la enseñanza.

Antes se señaló que uno de los obstáculos fundamentales en la asimilación del análisis está relacionado con la noción de límite pero, ¿por qué esta noción es tan compleja? ¿por qué su tránsito hasta la definición actual ha sido tan largo y plagado de contratiempos? Sin dudas la esencia de la cuestión radica en su estrecho vínculo con la **noción de infinito**, más precisamente, con cantidades infinitamente grandes e infinitamente pequeñas. Según Galileo los razonamientos con estas magnitudes conducen a paradojas porque *nuestra mente finita no puede entenderlos debido a la inmensidad de unos y la pequeñez de los otros*. Sin dudas, desde entonces mucho se ha avanzado en la comprensión matemática del infinito, pero las mentes de nuestros estudiantes siguen siendo bastante finitas.

La noción de proceso infinito en los razonamientos matemáticos se remonta al menos a las famosas paradojas de Zenón de Elea. Una de las más conocidas es la argumentación de Zenón de que el *movimiento es imposible*.

Supongamos que queremos ir desde el punto A hasta el B, por tanto antes debemos pasar por el punto medio $\frac{\mathrm{A+B}}{2} = \mathrm{A}_1$, y después tendremos que pasar por el punto medio del segmento restante $\frac{\mathrm{A}_1+\mathrm{B}}{2} = \mathrm{A}_2$ y así sucesivamente. Como para todo A_n, $\mathrm{A}_\mathrm{n} < B$ y existe el punto medio del segmento que los une $\mathrm{A}_{\mathrm{n}+1} = \frac{\mathrm{A}_\mathrm{n}+\mathrm{B}}{2} < B$, entonces nunca llegaremos a B, cualesquiera sean A y B. Luego ¡el movimiento es imposible! Sin embargo, la experiencia física nos dice que si el caminante se desplaza con velocidad uniforme, entonces recorrerá la distancia total en el doble del tiempo que necesitó para la primera mitad del camino. La esencia de este absurdo radica en que, para recorrer cada uno de los infinitos segmentos en que se ha dividido AB, se necesitará un tiempo finito y la suma de infinitas cantidades finitas nuestra intuición nos sugiere que debe ser infinita.

La discusión de esta paradoja contribuye a que se exterioricen las ideas intuitivas de los estudiantes acerca de los procesos infinitos, ofrece la posibilidad de explicar, con razonamientos heurísticos sencillos, que una suma de infinitos números puede conducir a un valor finito. El gráfico mostrado, realizado sobre el cuadrado unidad e inspirado en una idea presente en la obra del matemático del siglo XVII G. Saint-Vincent, ilustra y convence de la validez de la igualdad $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots = 2$, precisamente la que aparece en la discusión de esta paradoja.



El debate en torno a la situación paradójica anterior puede ser aprovechado para comenzar a desarrollar una percepción intuitiva de límite de una sucesión y de suma de una serie. Desde luego, esta noción inicial estará contaminada con los detalles propios del ejemplo concreto y es preciso complementarla con el análisis de otros ejemplos y paradojas. En particular, este ejemplo pudiera reafirmar la idea intuitiva errada de que “al límite uno se acerca, pero nunca se alcanza” o que las sucesiones que tienen límite siempre son monótonas.

Asociado a la noción de suma de una serie encontramos otro obstáculo en la asimilación del concepto: la identificación con un mismo símbolo del objeto “suma de la serie” y del proceso “hallar la suma”, es decir, estamos ante un procept en la terminología introducida por Gray y Tall (1994). Un ejemplo muy frecuente de esta situación es la dificultad que presentan los estudiantes para comprender el significado de la representación decimal de los números cuando esta contiene infinitas cifras. En particular, los números 1 y $0{,}999\ldots$ son considerados diferentes, aunque “infinitamente próximos”, algunos incluso llegan a afirmar que ”$0{,}999\ldots$ es el antecesor de 1”. Aceptan que 1/3 es 0,333… pero si se les trata de explicar a través de la multiplicación por 3 en la igualdad $\frac{1}{3} = 0{,}333333\ldots$, se sienten desconcertados, encuentran que algo anda mal. Es natural, ¡estamos multiplicando a un objeto “misterioso” por el familiar número 3!

Situados en una perspectiva histórica, no es en absoluto de extrañar esta situación, la representación decimal de los números es un descubrimiento matemático relativamente tardío. Mientras las fracciones eran una herramienta habitual en la antigüedad clásica, la representación decimal se remite a las postrimerías del siglo XVI cuando en Europa se había llegado a un estadio superior en la aritmética comercial y su aceptación por la comunidad científica europea no estuvo exenta de dificultades, además no olvidemos que nuestro ejemplo trata con infinitas cifras. Precisamente, el proceso denotado a través de esas infinitas cifras no es otro que el de sumar una serie geométrica, problema muy semejante al discutido en relación con la paradoja de Zenón. La aclaración del significado de estos “números misteriosos” y la posibilidad de aprovechar un resultado ya conocido es una excelente oportunidad de contribuir a la formación paulatina del significado matemático de la noción de límite.

El carácter ambiguo del concepto serie está relacionado con otro tipo de paradojas históricas con alto valor formativo (Valdés & Sánchez, 2011). Por ejemplo, cuando decimos al alumno que “la serie $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$ diverge”, el símbolo utilizado es el mismo que para una serie convergente y su suma. En cierto sentido, esta identificación simbólica induce a una especie de analogía entre series divergentes y convergentes (y también con las sumas finitas), susceptible de ser extrapolada a la manipulación de estos objetos. La historia de la matemática está repleta de situaciones paradójicas surgidas de esta manipulación indiscriminada. El tratamiento de la suma con infinitos sumandos $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$ como si a ella pudiera asignársele un valor finito, permitió a Jacob Bernoulli realizar los cálculos siguientes:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots = \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots\right) + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots\right),$$

De donde obtuvo la igualdad $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \cdots$. Lo que el mismo Bernoulli califica de paradójico es que, cada término en la primera suma es estrictamente mayor que el correspondiente en la segunda.

En esta afirmación de Bernoulli se manifiesta la aceptación del llamado “principio de continuidad”, mencionado anteriormente. Este principio es una ley sumamente general implícitamente asumida por la mayoría de los científicos en los siglos XVII y XVIII y generalmente no enunciada más que a través de sus manifestaciones en situaciones particulares. Uno de los principales adeptos a este principio fue Leibniz, quien lo consideró como un *principio general* aplicable a toda la ciencia y la filosofía y lo utilizó profusamente en la elaboración de su cálculo con diferenciales.

Su concreción en la paradoja de Bernoulli es la siguiente: En la igualdad anterior, cada término de la suma a la izquierda es mayor que el correspondiente de la suma a la derecha, luego las sumas de un número finito de términos de la primera serie son mayores que las de la segunda (siempre que se sumen la misma cantidad de sumandos), por tanto las sumas de las series deberían mantener la misma desigualdad.

No solo para Leibniz sino también para Newton, Euler y la mayoría de sus contemporáneos, el principio de continuidad fue una herramienta de trabajo insustituible, especialmente en la aplicación de las series, convergentes o divergentes, a la solución de numerosos problemas de la matemática y sus aplicaciones. Por supuesto, este uso indiscriminado los condujo a numerosas situaciones paradójicas, muchas de las que pueden transformarse en situaciones didácticas significativas.

Cuando Cauchy siente la necesidad de fundamentar el cálculo sobre bases más solidas, las primeras definiciones que aparecen en su *Cours d'Analyse* son las de limite, continuidad y convergencia de series. Cauchy estrenó sus definiciones para probar muchas de las propiedades que antes se admitían sin cuestionamiento y de paso desterró de la matemática a las series divergentes que tantas paradojas provocaban. Sin embargo, lo que Cauchy no advirtió es que esta medida discriminatoria lo situó ante una nueva paradoja (más bien una metaparadoja): las series divergentes no tienen suma, por ello quedan excluidas del análisis matemático riguroso, pero son instrumentos útiles en la obtención de resultados nuevos y en las aplicaciones a la mecánica y la astronomía. Esta situación ambigua en la matemática permaneció hasta que, a fines del siglo XIX, se introdujeron diferentes algoritmos para sumar series divergentes, pero indudablemente influyó seriamente en el rechazo de muchos de los contemporáneos de Cauchy en aceptar su nuevo enfoque del análisis (Sánchez & Valdés, 2004).

Algunas reflexiones generales sobre la problematización histórica del Cálculo

La idea de fundamentar los conceptos continuidad, derivación, integral y serie a través de la noción de límite, fue sin duda un paso trascendental en la conversión del análisis matemático en la disciplina rigurosa que hoy conocemos. Esta idea surgió como respuesta a una necesidad de sistematizar y unificar un conjunto de herramientas desarrolladas, primero en el lenguajes de de los infinitesimales e indivisibles y después en la forma de diferenciales o fluxiones. Pero este primer intento no estuvo exento de ambigüedades e imprecisiones que condujeron a numerosas paradojas. Una de las situaciones más interesantes es la provocada por la "demostración" realizada por Cauchy del "teorema": *La suma de una serie convergente de funciones continuas es una función continua*. Abel encontró que "el teorema tenía excepciones" y exhibió uno de los tantos ejemplos de series trigonométricas conocidas en la época. Pudiera parecer asombroso que una mente que sea capaz de concebir para el análisis una estructura lógica como aparece en la obra de Cauchy, cometa un error como ese. ¿Qué puede haberlo motivado? Las investigaciones históricas indican que una de las causas fundamentales radica en la ambigüedad de la definición de continuidad enunciada por Cauchy y, además en el estilo utilizado en la argumentación. En ello destacan dos aspectos: Las definiciones y los argumentos carecen de la precisión del lenguaje ε-δ y la notación utilizada para las series funcionales ignora la variable independiente, es decir escribe $\sum u_n$, tal como si fueran series numéricas.

En el proceso de formación de los conceptos con un alto grado de generalidad y abstracción como lo es el límite y más aún si se trata de límite uniforme, es indispensable discutir estas situaciones ambiguas, familiarizando primero al estudiante con aquellas herramientas menos formalizadas ideadas para la resolución de los problemas que apelan a estos conceptos. Para ello no es suficiente contarles una breve historia anecdótica sobre el tema y contemplar sus caras de sorpresa al enterarse que los grandes matemáticos eran seres humanos que cometían errores, es esencial que ellos mismos aprecien la naturaleza del conflicto, que se discuta y esclarezca la esencia del mismo y de esta manera salgan a la luz sus propias imágenes posiblemente incompletas o erróneas

Como toda tarea realmente importante, la puesta en práctica de las ideas esbozadas anteriormente no es sencilla, en su implementación práctica se presentan diferentes tipos de dificultades, es necesario resolver conflictos y, tal vez situaciones paradójicas. Serán necesarios materiales escritos que concreten la propuesta, adecuados a cada tipo y nivel de enseñanza, profesores con una formación no solo en matemática y su didáctica, sino que posean también algunos conocimientos acerca de la génesis histórica del material objeto de estudio, pero sobre todo que estén profundamente convencidos de que este esfuerzo vale la pena. Sin embargo, aún esto es insuficiente. Es vital la actitud con que los estudiantes se involucren en el proyecto, su disposición a participar activamente en las discusiones, que se sientan motivados y desinhibidos para colaborar en la construcción conjunta del conocimiento.

El uso de los debates en clases de matemáticas aparece documentado en los trabajos de Legrand (1993 y 2000). Coincidimos con el autor en el efecto desarrollador que tales debates pueden tener, al menos en estudiantes universitarios. Sin embargo, un debate excelentemente planeado está condenado al fracaso si los alumnos piensan o sienten que “los están evaluando”, si se esfuerzan no en manifestar sus propias opiniones y dudas, sino en tratar de decir lo que suponen “es lo correcto”. Esta tendencia a evitar a toda costa emitir criterios u opiniones que puedan ser erróneas, este “horror al error” es, desafortunadamente, una actitud muy frecuente en los estudiantes (y no solo en ellos), generalmente inducida por los métodos de enseñanza y las formas de evaluación.

Es común que los profesores nos esforcemos en todo momento en evitar los errores de los estudiantes, sin embargo, este esfuerzo suele ser seguido de una gran decepción, los errores advertidos continúan apareciendo año tras año. Por otra parte, es posible observar cuánto se puede aprender de los errores cometidos, a veces se aprende más de una solución errónea debidamente discutida, que de una solución impecablemente presentada. Por supuesto, hay diferentes tipos de errores, están los *accidentales*, aquellos que se deben a una falta de atención o al poco tiempo dedicado a ejercitar algún algoritmo y los errores que ponen de manifiesto los *obstáculos y pre-concepciones* presentes en determinada etapa de la asimilación de un contenido. Estos últimos son a los que nos referimos cuando abogamos por provocar su manifestación, los que es preciso lograr que se exterioricen y puedan ser objeto del debate como forma de acceso a un nivel superior en la comprensión del material de estudio.

Cuando la discusión de una paradoja saca a la luz las suposiciones subyacentes en los razonamientos, se revela que una lógica deficiente, los razonamientos equivocados o incompletos no son un hecho poco frecuente en la matemática. Lejos de prevenir los errores, confronta a los alumnos con ellos, les muestra claramente sus deficiencias, su ignorancia, los ponen en la situación de saber qué es lo que no saben. Platón lo expresó nítidamente en su diálogo *Menón o de la Virtud* cuando pone en boca de Sócrates las palabras siguientes:

> *“Enseñándole a dudar ¿le hemos causado algún daño? [...] le hemos puesto, a mi parecer en mejor disposición para descubrir la verdad. Porque ahora, aunque no sepa la cosa, la buscará con*

gusto. […] entonces creía saberlo y respondió con confianza como si lo supiese; y no creía ser ignorante en este punto. Ahora reconoce su embarazo, y no lo sabe, pero tampoco cree saberlo.”

Algunas experiencias personales en el uso de las situaciones paradójicas

Insertados en el marco teórico indicado antes, hemos diseñado la iniciación al estudio del Análisis Matemático en una asignatura, proyectada en forma radicalmente diferente, que denominamos *Introducción al Análisis*. En ella se entrena al estudiante en el uso de las herramientas analíticas surgidas en la *infancia y adolescencia* del Cálculo, con un espíritu próximo al que animó a los fundadores del mismo, pero aún más cercano al que impregna la obra del *maestro de todos los matemáticos,* Leonhard Euler (Valdés & Sánchez 2011).

De tal forma la enseñanza posterior de los cursos de Análisis Matemático se estructura siguiendo la etapa de *madurez* del Cálculo, es decir, al estilo de las obras de Bolzano-Cauchy-Weierstrass, sin desdeñar los esenciales aportes conjuntistas de Dedekind y Cantor. Entonces se retoman las nociones básicas introducidas en forma heurística y, a través de las paradojas ya presentadas y otras nuevas, con el objetivo de cuestionar muchas de las afirmaciones realizadas, se definen los conceptos número real, límite y continuidad de funciones de una variable y se formalizan las de derivada e integral (en el sentido de Riemann) (Bressoud, 1994; Sánchez & Valdés, 2004 y 2007; Hairer & Wanner, 2008).

Comentaremos a continuación algunos de los logros y dificultades a nuestro entender más relevantes constatados en los 5 años de aplicación de este proyecto:

a) Se ha apreciado un cambio paulatino en la actitud de los estudiantes respecto a qué es la matemática y cómo ella se desarrolla. Varios estudiantes se han animado a realizar cuestionamientos, a plantearse problemas y, en ocasiones a intentar su solución, buscando explicar las situaciones paradójicas que se presentaban. Pero sobre todo, perdieron el miedo a expresarse y equivocarse en las discusiones producidas durante la solución a los problemas, es decir, se incorporaron activamente en las discusiones y debates, participaron en la elaboración de las nuevas ideas. Este cambio sustancial de actitud se observó con mayor claridad en las asignaturas más avanzadas, destinadas a un estudio más formal del cálculo.

Por ejemplo, la idea natural de función continua está relacionada con la posibilidad de trazar su grafico sin levantar el lápiz, la discusión del comportamiento gráfico de varias funciones, algunas evidentemente continuas o discontinuas, pero también otras de comportamiento un tanto “extraño” como $f(x) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{x}, f(0) = 0$, contribuyó al convencimiento de la necesidad de dar una definición formalizada de continuidad. Se aprovechó para enunciar la definición, algo ambigua, utilizada por Cauchy y Bolzano para después introducir la forma ε-δ habitual. La diferencia entre estas dos formas de enunciado se aprovechó más tarde en el estudio de la continuidad uniforme y la discusión del “error” de Cauchy al identificar ambas formas de definir continuidad de una función en un intervalo. Lamentablemente, no hemos sido capaces de trasmitir este entusiasmo a todos los alumnos, algunos incluso "se asustaron" al enterarse que el objetivo fundamental de la matemática es la resolución de verdaderos problemas y no de meros ejercicios rutinarios y puramente algorítmicos como los habían acostumbrado en la enseñanza secundaria.

b) Significativa fue la "humanización" del quehacer matemático. Las referencias concretas a las formas de expresión de las ideas, los errores e imprecisiones cometidas en algunos temas importantes, además de algunos comentarios biográficos significativos, consiguieron desmitificar a la Matemática, a los matemáticos y a la forma en cómo estos consiguen sus logros. Los alumnos comenzaron a considerar a los científicos como seres humanos, con características y virtudes especiales, pero también con defectos y susceptibilidades limitantes. La perspectiva histórica nos acerca a la matemática como ciencia humana, no endiosada, en ocasiones falible, pero capaz también de corregir sus errores.

Con una actitud del profesor de respeto hacia los errores en el proceso de análisis y discusión de las paradojas, no solo los cometidos por los grandes matemáticos, sino también por los más sencillos estudiantes (en ocasiones con algún grado de similitud), se logró modificar, al menos parcialmente, la imagen y el papel del error en el proceso normal de aprendizaje. Las discusiones en clase pusieron de manifiesto que, al igual que ocurre en el desarrollo de la matemática, los fallos de los estudiantes muchas veces se deben a que toman como un hecho cierto aquello que se imaginan o desean que ocurra. Por ejemplo, muchos de los razonamientos erróneos de los estudiantes en el manejo de las series, guardan semejanza con el estilo de trabajo que condujo a Euler a resultados paradójicos.

c) Algunas paradojas fueron "provocadas" a través de la inserción de un error intencional (geométrico, algebraico o lógico) en la formulación de un problema. Por ejemplo, la imagen geométrica común de cómo es el comportamiento de una función en sus puntos de máximo motiva la percepción de la condición suficiente de máximo en la forma: "si una función es creciente antes del punto y decreciente después, el punto es de máximo". Esta afirmación es correcta cuando la función es continua en el punto, pero falsa en el caso general. Esta percepción incompleta suele inducirse al presentar casi exclusivamente ejemplos y ejercicios donde ella "proporciona una respuesta correcta", además los gráficos ilustrativos comúnmente utilizados son de funciones continuas. Sin dudas, la mejor forma de enfrentar esta situación es el planteamiento no de un contraejemplo, sino de un problema donde este conocimiento insuficiente provoque una situación paradójica.

Así las situaciones didácticas que recurren a una paradoja no tienen por qué reproducir más o menos fielmente una situación histórica, también pueden ser confeccionadas por el profesor inspirándose en la historia, o incluso diseñarse especialmente para poner de manifiesto algún tipo de dificultad específica presentada por los estudiantes. Veamos algunos ejemplos utilizados en nuestra práctica docente.

Previo a la definición formal de convergencia uniforme de una serie enunciamos y "demostramos" el teorema de Cauchy sobre la continuidad de la suma. Seguidamente discutimos la serie $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}$ que da lugar a una función discontinua. Esta contradicción nos lleva a realizar una revisión cuidadosa de los pasos seguidos en la "demostración", pero los llevamos a cabo concretamente en la serie del ejemplo. Así es posible descubrir cuáles son las suposiciones implícitas que se habían aceptado y estar en condiciones de realizar la "crítica matemática", en el sentido dado a esta frase por Lakatos (1982). Comentemos que, en esta situación, el contraejemplo histórico propuesto por Abel como "excepción" al teorema de Cauchy es demasiado complicado para poder soportar un análisis semejante y por tanto, es recomendable sustituirlo por otro más adecuado. De esta forma hemos utilizado la historia, pero no hemos pretendido copiar lo ocurrido en la historia, hemos actuado de forma próxima a lo que Grattan-Guinness denominó *historia-sátira* (2004).

Otra situación paradójica inspirada en la historia es la propuesta a través de la siguiente pregunta: ¿será correcta la igualdad $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}=\left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{1}=-2$? Explica tu respuesta. Es importante en la discusión de este ejemplo destacar dos aspectos importantes: en primer lugar, nos referimos a la detección de que la situación es paradójica, pues es muy común que los estudiantes que se inician en el cálculo en forma completamente acrítica acepten respuestas claramente absurdas. La otra cuestión es que la explicación del resultado paradójico permite patentizar que el teorema fundamental del cálculo requiere la continuidad de la función integrando en todo el intervalo de integración.

En la práctica del cálculo de anti-derivadas, los alumnos no suelen comprender la insistencia del profesor y los textos en la necesidad de añadir mecánicamente, cada vez que se calcula una primitiva, la "inútil" constante *C*. Esto les parece aburrido y completamente superfluo y más aún, cuando observan la misteriosa desaparición de la constante en las respuestas obtenida mediante los programas informáticos. Una situación paradójica adecuada para llamar la atención sobre este problema es la siguiente: A través de los cambios de variables $t=\operatorname{sen}x$ y $t=\cos x$ se obtienen los resultados $\int \operatorname{sen}x\cos x\,dx=\frac{\operatorname{sen}^2 x}{2}$ y $\int \operatorname{sen}x\cos x\,dx=-\frac{\cos^2 x}{2}$, lo que implica la igualdad absurda $\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x=0$.

Sin dudas, nuestra propuesta aún tiene limitaciones y puntos débiles, fundamentalmente de índole práctica, es necesario mejorarla y enriquecerla con la experiencia de su adaptación y aplicación en diferentes grupos de alumnos, por distintos profesores y en otros niveles de enseñanza. Pero no albergamos la menor duda de que con tal forma de aprendizaje de la matemática es posible comprender que, no se introducen definiciones para probar teoremas, no se prueban teoremas simplemente para probar otros teoremas, no se idean algoritmos de cálculo para resolver ejercicios desprovistos de sentido, sino todas estas acciones surgen de la necesidad de resolver problemas, de racionalizar y organizar el saber y poder hacer más y mejor matemática significativa, porque como comentó un alumno participante en esta experiencia: *trabajar solo con el estilo formal es como caminar con los ojos cerrados*.

Referencias y bibliografía

Artigue, M. (1996) Teaching and learning elementary analysis, en *Proceedings of the 8th International Congress on Mathematical Education*, Sevilla, pp.15-29.

Bressoud, D. (1994) *A Radical Approach to Real Analysis*. The Mathematical Association of America, Washington D.C.

David, P. (1965)*The Mathematics of Matrices*. Blaisdell

Fauvel, J.; Maanen, J. (2000) *History in Mathematics Education. The ICMI Study*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Grattan-Guinness, I. (2004) History or Heritage? An important distinction in Mathematics and for Mathematics Education. *American Mathematical Monthly*. 111 (1), 1-12.

Gray, E.; Tall, D. (1994) Duality, ambiguity and flexibility: A proceptual view of simple arithmetic. *Journal of Research in Mathematics Education*, 25(2), 115–141.

Guzmán, M. (1996) Sobre el papel del matemático en la educación matemática, Conferencia Plenaria, en *Proceedings of the 8th International Congress on Mathematical Education*, Sevilla

Guzmán, M. (2007) Enseñanza de las Ciencias y la Matemática. *Revista Iberoamericana de Educación.* (43), 19-58.

Hairer, E.; Wanner, G. (2008) Analysis by its History, Springer.

Kleiner, I. (2006) Principle of Continuity. A brief history, *Mathematical intelligencer*. 28(4), 49-57.

Kleiner, I.; Movshovitz-Hadar, N. (1994) The role of paradoxes in the evolution of mathematics, *American Mathematical Monthly*. 101 (10), 963-974.

Lakatos, I. (1982). *Pruebas y Refutaciones*, Alianza Editorial, Madrid.

Legrand, M. (1993) Débat scientifique een cours de mathématiques. *Repères IREM*. 10, 123-158.

Legrand, M. (2000) Scientific Debate in Math courses, en *The teaching and learning of mathematics at university level: an ICMI study*, pp.127-135.

Poincaré, H. (1889) La logique et l'intuition dans la science mathématique et dans l'enseignement. *L'enseignement mathématique*. 5, 157-162.

Poincaré, H. (1908), *Science et méthode*, París, Flammarion.

Polya, G. (1974) *Cómo plantear y resolver problemas*. Ed. Trillas, México

Sánchez, C. (1994). Usos y Abusos de la Historia de la Matemática en el Proceso de Aprendizaje, en Nobre, S.(ed.) *Procc. Meeting of the HPM group.* Blumenau, Brasil.

Sánchez, C.; Valdés, C. (1999) Por un enfoque histórico-problémico en la educación matemática, *Revista Ciencias Matemáticas*. 17(2), 137-148.

Sánchez, C.; Valdés, C. (2000). Proposiciones para un estudio dinámico de la medida, en John A. Fossa (ed.) *Facetas do Diamante. Ensaios sobre Eduacação Matemática e Historia da Matemática.* Editora da SBHMAT. Rio Claro.

Sánchez, C.; Valdés, C. (2004). *De los Bernoulli a los Bourbaki. Una historia del arte y la ciencia del cálculo* Ed. Nivola. Madrid

Sánchez, C.; Valdés, C. (2007). *Las Funciones. Un paseo por su historia*. Ed. Nivola. Madrid

Valdés, C.; Sánchez, C. (2011). *Introducción al Análisis Matemático*. Ed. Félix Varela. La Habana.