



La educación matemática como un campo de investigación y como un campo de práctica: Resultados, Desafíos

Michèle Artigue

LDAR, Université Paris Diderot-Paris 7

France

artigue@math.jussieu.fr

Resumen

En este texto, considerando la educación matemática como un campo de investigación y como un campo de práctica, nos preguntamos sobre los resultados alcanzados y los desafíos que se deben enfrentar. Hacemos especial hincapié en las evoluciones del campo resultando del desarrollo de los enfoques socio-culturales y antropológicos, especialmente en ciertas contribuciones de la teoría antropológica de lo didáctico. En cuanto a los desafíos, queremos poner el énfasis en aquellos desafíos ligados a nuestro objetivo común de garantizar a todos los alumnos una educación matemática de calidad, refiriéndonos particularmente a un documento publicado recientemente por la UNESCO sobre los desafíos de la educación matemática básica al que contribuimos

Palabras claves: matemática, investigación en educación, didáctica, teoría antropológica, desafíos educativos.

I Introducción

Celebramos en este simposio el cincuentenario de la CIAEM. Es una excelente oportunidad para preguntarnos, después cincuenta años del nacimiento de esta organización, en qué estado está la educación matemática, vista tanto como campo de investigación y que como campo de práctica. Es la reflexión sobre este tema que me gustaría compartir con ustedes en esta contribución. No pretendo ser exhaustiva, confiando en mi propia experiencia para identificar logros y evoluciones que me parecen importantes y apuntar a desafíos que debemos enfrentar.

Hace cincuenta años, la educación matemática como campo de investigación sólo comenzaba a emerger. Recordemos que si celebramos hoy el cincuentenario de la CIAEM, el primer congreso ICME tuvo lugar en 1969 y la revista *Educational Studies in Mathematics* fue creada en 1968 por iniciativa de Hans Freudenthal, entonces Presidente de la ICMI. A principios de los años sesenta, como lo demostró muy bien la importante obra histórica que acompañó la

celebración de su centenario (Menghini, Furinghetti, Giacardi y Arzarello, 2008), ICMI seguía confinado en la tradición de estudios e informes que fueron puestos en obras a partir de su creación en 1908. Hans Freudenthal iba a cambiar esta tradición, renovando las ambiciones de esta venerable institución, y poniendo de relieve la necesidad de establecer la educación matemática no sólo como un campo de práctica y reflexión sobre la práctica sino también como un campo de investigación. A lo largo de los años, esta ambición se llevó a cabo y aunque algunos siguen cuestionando su legitimidad para reconocerse como campo científico, este campo de investigación se ha ido gradualmente institucionalizado. Laboratorios y centros de investigación, programas de maestría y doctorado, revistas especializadas, libros y conferencias, asociaciones y redes se han ido multiplicando en el mundo. El caso de América Latina, como tal, es particularmente instructivo. Hoy en día, es imposible que un investigador en educación matemática puede pretender conocer este campo de investigación en su globalidad, dominar la multiplicidad de conceptos y marcos teóricos que se han desarrollado. Igual que en cualquier campo científico se han creado dominios y subdominios, y « Handbooks » permiten a cada uno hacerse una idea de cómo el conocimiento avanza más allá de su dominio personal de competencia.

Mi dominio de competencia, como todos, es limitado. Sin embargo, mis trabajos de investigación comenzados en los años 70 en una escuela primaria asociada al Instituto de Investigación en Educación Matemática (IREM) de la Universidad París 7, consideraron luego diferentes niveles de escolaridad hasta el nivel universitario y varios dominios matemáticos: números y geometría inicialmente, luego algebra y análisis. Sus problemáticas también fueron diversas: estudio de concepciones, desarrollo de ingenierías didácticas, preguntas relativas a la integración de herramientas tecnológicas en la enseñanza matemática, problemas de transición institucional y, más recientemente, relaciones y conexiones entre marcos teóricos y praxeologías de investigación. A lo largo de los años, mi experiencia se ha enriquecido de los aportes de mis estudiantes, de múltiples colaboraciones, y mi compromiso con ICMI me ayudó a sobrepasar las fronteras de la cultura de enseñanza y de investigación donde había crecido. Por tanto, al reflexionar, mi visión de este campo y de sus logros me parece cada vez más parcial.

Asumiendo estas limitaciones, en la primera parte de esta contribución, quiero hacer hincapié de algunos logros de la investigación que me marcaron personalmente porque me obligaron a pensar de forma diferente, a cuestionar posiciones comunes incluso en el mundo de la investigación. Luego, en la segunda parte, abordaré el problema también crucial de los desafíos.

II Educación matemática como campo de investigación: logros importantes

En el congreso ICME-11, Jeremy Kilpatrick y yo compartimos una conferencia plenaria sobre un tema similar, tratando de responder a la pregunta siguiente: “What do we now know that we did not know 15 years ago in mathematics education, and how have we come to know it?” En mi respuesta (Artigue & Kilpatrick, à paraître), hacía una declaración que me parece importante retomar aquí. Lo que nos aparece como avances recientes en este campo generalmente era en gestación muchos años antes y, por tanto, en cierto sentido, la sola respuesta razonable a la pregunta formulada es: "Nada." Dicho esto, si situémonos al nivel de la comunidad de educación matemática, con lo que se requiere para poder hablar de conocimiento en términos de consenso, de triangulación de resultados de investigaciones empíricas, no hay duda de que hemos avanzado sustancialmente.

II.1 Consolidaciones evidentes y nuevos dominios invertidos

De hecho, el campo ha consolidado conocimientos adquiridos en los dominios matemáticos investigados desde largo tiempo: campo numérico, geométrico y algebraico, como lo demuestran los “Handbooks” más recientes (cf. por ejemplo, (Lester, 2007) (English, 2008)). Asimismo se ha asegurado su adaptación a la evolución de los contextos culturales y sociales, a los progresos de los medios de la enseñanza, notablemente éstos debidos a los avances tecnológicos. Porque, como lo señaló Jeremy Kilpatrick, en la conferencia citada, en el mundo de la educación las respuestas que la investigación puede aportar nunca son definitivas. Ellas se sitúan tanto en el tiempo como en el espacio. Cada generación debe trabajarlas y ponerlas en su sitio. Como ya se ha señalado por ejemplo en el estudio ICMI sobre el álgebra (Stacey, Chick y Kendal, 2004), la investigación en esta área se ha visto profundamente afectada por el desarrollo de investigaciones sobre las hojas de cálculo, poniendo en evidencia la existencia de un mundo intermediario entre aritmética y álgebra que podría atenuar las discontinuidades identificadas entre estos dos dominios, las investigaciones sobre los programas de cálculo formal (CAS) que llevaron a reconsiderar la relación entre el trabajo técnico y conceptual en ese dominio, y también por las comparaciones internacionales que han mostrado la existencia de diferentes entradas y progresiones posibles en este campo matemático.

La investigación también ha invertido seriamente en áreas consideradas hace 15 años como marginales, y que hoy en día son reconocidas como componentes esenciales de la formación matemática que nuestros sistemas educativos deberían asegurar a los alumnos, porque esas áreas ya no son marginales en las ciencias matemáticas y también porque juegan un papel esencial en la interacción entre las matemáticas y la sociedad. Esto es el caso particularmente de las probabilidades y la estadística, y no es coincidencia que también celebramos en este simposio, la publicación del libro asociado al primer estudio ICMI sobre la educación estadística (Batanero, Burrill y Lectura, 2011). También es el caso de la modelización que fue el tema de un reciente estudio ICMI (Blum, Galbraith, Henn y Niss, 2007) y cuyo grupo emblemático ICTMA se convirtió en 2003 grupo de estudio afiliado a la ICMI.

II.2 Descentramiento de la investigación del alumno hacia el docente

Una constatación unánime es que la investigación, inicialmente centrada en el alumno, en la comprensión de su funcionamiento cognitivo y en la elaboración de organizaciones didácticas respetuosas tanto de la epistemología de la disciplina como del funcionamiento cognitivo, se ha desplazado hacia el docente, considerándolo como un actor esencial y problemático de la relación didáctica. La investigación se interesó en sus creencias, conocimientos y prácticas. Los investigadores trataron de identificar los conocimientos necesarios para realizar esa labor, entender sus características, sus interconexiones, la manera de cómo se forman y se desarrollan (Even & Ball, 2008). La distinción introducida en 1986 entre “content knowledge”, “pedagogical content knowledge” y “pedagogical knowledge” (Schulmann, 1986) fue trabajada y revisada dando lugar a construcciones tales como aquella propuesta por Deborah Ball y sus colegas (Ball, Hill & Bass, 2005). Aproximaciones teóricas específicas también se han desarrollado, tales como la aproximación dual de las prácticas de enseñanza (Robert y Rogalski, 2002) que combina contribuciones didácticas y de ergonomía cognitiva para pensar la complejidad del trabajo docente o la teoría de la acción conjunta (Sensevy & Mercier, 2007). La investigación también se interesó en las prácticas de formación del profesorado y en sus efectos, analizando sus limitaciones y tratando de comprender las razones para el éxito de ciertas prácticas. Es

emblemático de este interés el trabajo que se ha desarrollado internacionalmente en torno a la práctica japonesa dicha de “Lesson Study” (Isoda, Stephens, Ohara y Miyakawa, 2007).

Los conocimientos adquiridos en este campo, a su vez, han impactado substancialmente nuestra visión de las relaciones entre investigación y práctica, entre investigadores y profesores, y más generalmente entre instructores y aprendices. Esto nos lleva hoy a cuestionar el lenguaje unidireccional que se utiliza de modo predominante para expresar las relaciones entre el mundo de la investigación y su entorno: distribución, difusión ... También estos conocimientos nos llevan a repensar la idea misma de recurso educativo, concibiendo éstos como lo proponen Ghislaine Gueudet y Luc Trouche en su aproximación documental como objetos cuya concepción se continua necesariamente en el uso, los cuales deben ser pensados para permitir ese trabajo continuo de concepción y para sostener las génesis instrumentales asociadas (Gueudet y Trouche, 2010).

El trabajo colectivo que hemos realizado, hace casi dos años, durante la última Escuela de Verano de Didáctica de las Matemáticas en Francia ilustra particularmente bien el cuestionamiento permitido por el progreso de la investigación. En ésta, hemos revisado el concepto de ingeniería didáctica que expresa para nuestra comunidad desde los años 80 las relaciones consustanciales existentes entre investigación fundamental y diseño didáctico, examinando sus fundamentos, su uso y sus evoluciones, pensando su posible futuro (Margolinas et al., 2011). También se refleja esta evolución en construcciones originales, como la noción de "comunidad de investigación" (Jaworski, 2007) que combina las aportaciones de la teoría de las comunidades de práctica y de la teoría de la actividad para pensar las interacciones entre investigadores y docentes, así como las dinámicas que se pueden desarrollar entre sus comunidades respectivas.

II.3 La consolidación de los enfoques socio-culturales

Pero si estos cambios son esenciales, ellos no son los únicos. Ellos se combinan con avances que se sitúan a un nivel más meta-didáctico y afectan globalmente la investigación. En nuestra presentación conjunta con Jeremy Kilpatrick, habíamos discutido específicamente dos: la consolidación de los enfoques socio-culturales por un lado (Sriraman y English, 2010), y la creciente atención prestada a la dimensión semiótica de la actividad matemática por el otro (Sáenz-Ludlow y Presmeg, 2006). Yo me centraré particularmente en el primero, y evocaré el segundo en la mesa redonda dedicada al impacto de la tecnología en el currículo, ya que es en este contexto de investigación, a través de colaboraciones con varios investigadores, que ésta dimensión se hizo esencial para mí. No se puede negar el hecho que las tecnologías informáticas han contribuido a este progreso, como lo demuestran por ejemplo los números especiales de la revista *Educational Studies in Mathematics* (Nemirovsky y Borba, 2004) y (Edwards, Radford y Arzarello, 2009) o el reciente estudio ICMI (Hoyle y Lagrange, 2010). Las tecnologías informáticas, en primer lugar han cambiado drásticamente los medios semióticos de trabajo matemático, haciendo del estudio semiótico una dimensión ineludible del estudio del potencial de éstas tecnologías para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. En segundo lugar, nos han proporcionado los medios técnicos de un análisis detallado de la mediación semiótica, teniendo en cuenta su multi-modalidad, sin limitarse a la lengua natural y a los registros semióticos de representación establecidos.

El campo de la educación matemática es un campo en el que coexisten una variedad de enfoques teóricos (Sriraman y English, 2010). Sin embargo, no se puede negar que en las dos

últimas décadas hemos visto importantes cambios, y en particular la influencia creciente de los enfoques socio-culturales. Este cambio teórico ha tomado diversas formas, y cada uno de acuerdo con sus experiencias y con sus intereses de investigador, es sensible a este cambio de manera diferente. El campo controversial de la Etnomatemática cuyo padre fundador Ubiratan D'Ambrosio ha sido honrado por ICMI de la prestigiosa medalla Félix Klein (D'Ambrosio, 2008), El campo de la educación matemática crítica que pone la dimensión moral y política de la educación matemática, los cuestionamientos de justicia social y de equidad, al centro de sus preocupaciones (Skovsmose y Valero, 2008), o los diversos trabajos relevantes del marco teórico de la socio-epistemología (Cantoral y Farfán, 2003) publicados de manera notable en la revista *Relime*, son sin duda emblemáticos de este cambio para muchos participantes en esta conferencia. Dentro de mi comunidad didáctica, es con la teoría antropológica de lo didáctico (TAD) iniciada por Yves Chevallard (Chevallard, 1992, 2002) que esta evolución se ha materializado. No es mi intención presentar aquí esta teoría, el lector interesado puede referirse por ejemplo a la síntesis (Bosch y Gascón, 2006), pero quisiera mostrar cómo, a lo largo de su desarrollo progresivo, esta teoría ha contribuido y contribuye hoy en día a la modificación de enfoques en los cuestionamientos didácticos.

II.4 La contribución de la TAD: transiciones institucionales

Es supervisando la tesis doctoral de Brigitte Grugeon (Grugeon, 1995) donde este cambio comenzó para mí. La TAD no era en esta época tan desarrollada como hoy, pero su estado ya era suficientemente avanzado para mostrar lo que podía ofrecer al trabajo didáctico. En los orígenes de esta investigación se encuentra la constatación de un fracaso: el de clases de adaptación creadas en Francia para permitir a los mejores estudiantes de los liceos de formación profesional (LP) continuar sus estudios en liceos de enseñanza general y tecnológica. Muchos de estos estudiantes motivados se convertían en unos meses en estudiantes en estado de fracaso académico, y poco a poco perdían confianza en sí mismos. Al centro de este fracaso: el álgebra, y para explicarlo razonamientos muy tentadores como el siguiente: la orientación de estos estudiantes en la educación profesional sobre todo se debía a su fracaso en la educación general de la enseñanza media, por eso no era sorprendente que unos años más tarde, a pesar de su éxito en el LP, se recuperan estudiantes siendo cognitivamente incapaces de seguir una educación general. La investigación en didáctica del álgebra, incluso podía ser puesta al servicio de estos argumentos. Ella permitía proponer a los estudiantes tareas bien conocidas, clasificar sus respuestas usando categorías bien identificadas, e interpretarlas en términos de concepciones y de niveles de conceptualización para confirmar su debilidad.

En la investigación de Brigitte Grugeon, la adopción de un enfoque antropológico permitió cuestionar e ir más allá de esta visión. Lo que este enfoque ha permitido cambiar realmente es la problemática de la investigación, proyectando el problema dentro de una clase más amplia de problemas: los problemas de la transición institucional, porque lo que estaba en juego desde el comienzo era la transición entre dos instituciones: el liceo de formación profesional y el liceo de enseñanza general. La teoría antropológica llevó a postular que estas dos instituciones habían desarrollado relaciones institucionales diferentes con el dominio del álgebra que ambas reconocían como un dominio de enseñanza. Estas diferencias podían ser de diversos tipos. Algunos objetos podían existir en una institución y no en otra. Pero estas diferencias no eran las más problemáticas, ya que eran fácilmente identificables. Las diferencias de relaciones institucionales para objetos comunes, cuando una lectura superficial de los programas de estudio

da la impresión que es posible pasar de uno a otro con una simple operación de "cortar y pegar" y con cambios de estilo mínimos, eran más problemáticas.

Postular su existencia, incluso antes de tratar de identificarles, conducía a otra problematización en la investigación. ¿Era legítimo atribuir a meras dificultades cognitivas de los alumnos su fracaso en álgebra en este proceso de transición institucional? ¿Podíamos plantearnos la hipótesis de que este fracaso se debía en parte, o era fuertemente reforzado por sutiles diferencias en las relaciones institucionales? A esto se añadiría una dificultad más, también inherente a las transiciones institucionales. El conocimiento matemático que los estudiantes desarrollan es contextualizado. Sólo una pequeña parte de ese conocimiento se descontextualiza en forma de saber (Brousseau, 1997). Los docentes lo saben muy bien, incluso si no lo explicitan, y este conocimiento se manifiesta en las estrategias que desarrollan para ayudar a los estudiantes a movilizar los conocimientos necesarios, evocando un momento, un episodio en la historia de clase (Matheron, 2000). Cualquier transición institucional mina estas estrategias de evocación, ya que no hay más historia que compartir, y el establecimiento de las conexiones necesarias a la movilización del conocimiento quedando bajo la exclusiva responsabilidad del estudiante, se convierte en algo mucho más aleatorio.

Es situándose en este enfoque que Brigitte Grugeon ha abordado el problema de la transición entre liceo profesional y liceo general en álgebra, negándose a ser atrapada por las primeras tentadoras interpretaciones. Esto le permitió otra mirada sobre los estudiantes, una mirada mucho más constructiva. También ha resaltado que para esos estudiantes de liceos profesionales, cuya cultura algebraica se había organizada principalmente en torno al mundo de las fórmulas, y no como el liceo general en torno al mundo de ecuaciones, se disponía de otras palancas para el aprendizaje, en particular a través del enriquecimiento del trabajo sobre fórmulas, su complejización técnica gradual y su puesta en relación con el mundo funcional. Pero estas palancas eran escondidas por la jerarquía de los valores académicos. Era necesario para hacerlas visibles, poner en evidencia esta jerarquía y cuestionarla. El enfoque institucional permitió hacerlo y, a continuación, concebir una ingeniería didáctica mejor adaptada a estos estudiantes que permitió obtener al cabo de dos años resultados no milagrosos sino, por lo menos, inesperados.

Es interesante notar que la investigación no se detuvo allí y que la colaboración con la comunidad EIAH (Entornos informáticos para el aprendizaje humano) permitió la transformación de una herramienta metodológica que se había construido en la tesis en una herramienta de diagnóstico de las competencias algebraicas de los estudiantes en la educación obligatoria, la cual fue progresivamente informatizada y refinada (Delozanne et al., 2010). El cambio de perspectiva impregna esta herramienta de diagnóstico. De hecho, es diseñada para permitir identificar las coherencias de funcionamiento de los estudiantes e identificar, con base en los logros de la investigación, competencias en emergencia a partir de las cuales se podría construir progresiones. Las experimentaciones de uso de esta herramienta también llevaron a asociar al diagnóstico perfiles de los estudiantes proporcionando una visión más sintética y, hoy en día, a diseñar y experimentar planes de aprendizaje diferenciados para los estudiantes de diferentes perfiles (una diferenciación pedida por la institución educativa que en este caso, como en muchos otros, subestima en gran medida los requisitos de las demandas que formula). Todo esto se hace con una visión participativa del diseño de recursos de enseñanza que ilustra las evoluciones mencionadas anteriormente en cuanto a las relaciones entre investigación y práctica. En particular, en la actualidad, el proyecto se desarrolla en estrecha colaboración con la asociación de profesores

Sésamat (www.sesamath.net) que está implementando el diagnóstico en su plataforma *Mathenpoche* y se asocia con el diseño y la experimentación de planes de aprendizaje diferenciados (Grugeon-Allys & al., 2011)

Después de esta investigación, de alguna manera fundadora, la TAD se ha utilizado en varias investigaciones sobre transiciones institucionales, y particularmente transición entre enseñanza secundaria y universidad. Frederic Praslon, por ejemplo, en su tesis sobre el concepto de derivada y su entorno (Praslon, 2000), cuestionó la visión usual de esta transición en el campo del análisis elemental en términos de transición hacia un pensamiento matemático avanzado, el AMT (Tall, 1991) haciendo hincapié en el salto cognitivo que representa el paso del mundo proceptual del cálculo al mundo formal del análisis, para retomar la terminología introducida por David Tall (Tall, 2004). El demostró que la situación era aún más compleja. Lo que estaba en juego en la transición era en realidad un conjunto de micro-rupturas en las relaciones institucionales, por eso menos fácilmente identificables por sus actores, pero cuya acumulación expresaba un cambio decisivo de cultura. El desarrollo de la TAD, con la introducción del concepto de praxeología para modelar las prácticas matemáticas y didácticas, la estructuración de las praxeologías en praxeologías puntuales, locales, regionales y globales (Chevallard, 2002), ha ido progresando y enriqueciendo las herramientas conceptuales disponibles para investigar estas relaciones institucionales y sus discontinuidades. Es así como, los trabajos sobre la enseñanza de los límites en España fueron capaces de poner de relieve los cambios radicales de relaciones institucionales entre la escuela secundaria y la universidad, y expresarlos en términos praxeológicos (Bosch y Gascón Fonseca, 2004). Según estos autores, las praxeologías relativas a este concepto en el bachillerato son esencialmente puntuales, rígidas y aisladas, centradas en su bloque práctico-técnico, mientras que, en la universidad son de repente regionales y centradas en su bloque tecnológico-teórico, sin que en ningún momento sean puestas en marcha praxeologías locales relativamente completas para garantizar la interconexión entre estos dos tipos de praxeologías. Más recientemente, la tesis de Ridha Najar destacó otras rupturas institucionales con respecto en este caso al mundo funcional en su dimensión conjuntista (Najar, 2010). El muestra que el mundo funcional conjuntista ya está presente en el liceo Tunecino, particularmente en el contexto del estudio de las transformaciones geométricas, pero que se encuentran características praxeológicas comparables a las identificadas en la investigación realizada en España sobre límites: dominación de praxeologías puntuales y rígidas en el liceo, centradas sobre el bloque práctico, al menos en términos de "topos" del alumno (lo que está bajo su responsabilidad matemática), praxeologías regionales en la universidad y subestimación de las necesidades técnicas y semióticas que genera el trabajo con objetos funcionales para alumnos que han trabajado sobre todo los objetos funcionales en el contexto del álgebra elemental y del análisis. Todas estas investigaciones como la tesis de Brigitte Grugeon obligan a cuestionar las interpretaciones cognitivas usuales, y a percibir las transiciones institucionales como cambios culturales con dimensiones explícitas y también en gran parte implícitas, y a cuestionar las estrategias desarrolladas para ayudar a los actores de estas transiciones, tanto los docentes como los estudiantes, a enfrentarlas.

II.5 La contribución de la TAD: estudios comparativos y jerarquía de los niveles de co-determinación

En la última década, la TAD ha seguido desarrollándose, dotándose de nuevas herramientas, así como una dimensión de diseño didáctico a través de las nociones de « actividad de estudio y investigación », y de « curso de estudio y investigación ». Yo no voy a entrar en este

aspecto de la teoría enviando el lector interesado a (Chevallard, 2011), y a los trabajos del grupo AMPERES (Noirfalise y Matheron, 2007), pero mencionaré brevemente otra conceptualización: la jerarquía de niveles de co-determinación cuyo interés he experimentado personalmente en un contexto comparativo. Estudios comparativos han proliferado en los últimos años, motivados en parte por el creciente impacto sobre políticas educativas de evaluaciones internacionales a gran escala, tales como TIMSS y PISA. Resuelta en nuestra comunidad de educación matemática la necesidad de asumir sus responsabilidades en relación con este fenómeno, aportando una mirada crítica sobre estas evaluaciones, sobre las interpretaciones que se hacen de los datos recogidos y sobre la posterior utilización política (Keitel y Kilpatrick, 1999), realizando también los estudios que considera necesarios para responder a las múltiples preguntas que surgen. El Estudio ICMI 13 (Leung, Graf & López-Real, 2006) que llevó a cabo una síntesis de trabajos permitiendo profundizar la comparación entre culturas de la educación matemática en el este de Asia de tradición confuciana y países de tradición occidental, es emblemático en este sentido, tan como el « Learner's Perspective Study » iniciado por David Clarke, que estudia prácticas de enseñanza consideradas exitosas en 12 países diferentes (Clarke, Keitel y Shimizu, 2006).

Con Carl Winslow, teniendo como objetivo la preparación de un proyecto especial para la conferencia del Espacio Matemático Francófono, EMF2009, realizamos un meta-análisis de estudios comparativos considerando estudios a gran escala, tales como TIMSS y PISA, y también objetos más locales como lo son necesariamente tesis de doctorado centradas en estos temas (Artigue y Winslow, 2010). Necesitábamos para desarrollar este meta-estudio de un marco conceptual que permita, incluso para los estudios comparando el rendimiento matemático de estudiantes en áreas específicas, analizar cómo en la comparación se habían tomado en cuenta las condiciones y limitaciones socio-culturales que condicionaban los aprendizajes evaluados. La jerarquía de los niveles de co-determinación desarrollada en el marco de la TAD nos pareció una herramienta conceptual apropiada. De hecho, la TAD plantea que la ecología de las praxeologías matemáticas y didácticas depende de condiciones y limitaciones que se sitúan en niveles diferentes. Ella diferencia 9 niveles diferentes desde el nivel de un tópico matemático específico, tal como la resolución de ecuaciones del primer grado hasta el nivel de la civilización. La figura 1 recuperada en (Artigue Coagri-Nassour, Smida y Winslow, 2011) especifica estos distintos niveles en la interacción dialéctica (de ahí el término co-determinación). La jerarquía de los niveles sub-disciplinarios se refiere a la organización curricular en un contexto determinado, y se puede relacionar con la estructuración en praxeologías puntuales (nivel del tópico), locales (nivel del tema), regionales (nivel del sector) y global (nivel del dominio). Los niveles superiores expresan la dependencia de la enseñanza de una disciplina, determinada de condiciones y limitaciones externas a esta disciplina y, esencialmente difíciles de cambiar por la sola voluntad de los actores de la relación didáctica. Esta herramienta nos llevó a considerar diez categorías a priori posibles para estudios comparativos, y situarlos en relación con estas categorías las distintas obras incluidas en el meta-estudio, cuestionando los niveles involucrados en la comparación, la metodología utilizada para llevar a cabo la comparación y los recursos movilizados para la interpretación, la manera de cómo el estudio articulaba relaciones horizontales (el mismo nivel en contextos diferentes) y relaciones verticales (distintos niveles en el mismo contexto) y cómo se establecían las relaciones causales identificadas, cuando habían.

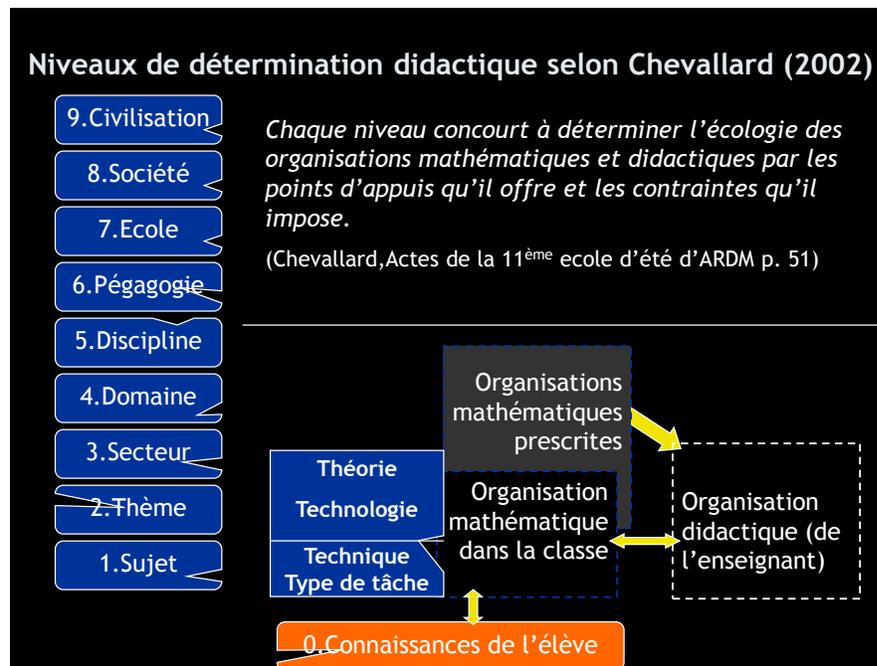


Figura 1. La herramienta de análisis elaborada (Artigue, Coagri-Nassouri, Smida & Winslow, 2011, p. 50)

Este enfoque ha resultado fructífero. Permitió ubicar trabajos diferentes dentro de un marco común, destacando la diversidad existente de tipos de estudios y la riqueza ya acumulada, la posible complementariedad entre investigaciones, y también algunas deficiencias y posibles derivas. Asimismo, se puso de relieve la dificultad referida a problemas metodológicos que plantean estas investigaciones, y la vigilancia que deben demostrar los investigadores para resistir a la tentación de hacer hablar los datos más allá de lo que se puede, sea por la operación de agrupamientos y promedios abusivos, por la extrapolación abusiva de resultados obtenidos en contextos muy específicos, o por la interpretación abusiva de las relaciones observadas entre niveles de co-determinación en términos de causalidad. Se demostró también la necesaria vigilancia de mantener frente al poder ejercido por las culturas dominantes cuyos modelos culturales no son en absoluto referencias neutras, y la necesidad de prestar mayor atención a las cuestiones lingüísticas.

Desde entonces, reinvertí esta herramienta en un proyecto CAPES-COFECUB con colegas brasileños (Alves Dias, Artigue, Jahn y Campos, 2010). Nuestro objetivo era desarrollar conjuntamente recursos para facilitar la transición entre enseñanza secundaria y universitaria en el dominio de las funciones. Nos pareció necesario en un primer momento investigar cuál era la cultura funcional en ambos países a fines de la educación secundaria y cuáles eran las expectativas al comienzo de la universidad, para entender lo que estaba en juego en esta transición en los dos países. El estudio reveló diferencias muy importantes e inesperadas entre las dos culturas si se considera las influencias comunes a las que todos somos sometidos en esta era de globalización y la centralidad de la noción de función en matemática. Para entender las razones de tales diferencias que se manifestaban en jerarquías tópico-tema-sector-dominio muy diferentes en los dos países, identificar las coherencias subyacentes a cada opción curricular y su impacto en la transición secundario-universidad, fue necesario involucrar a todos los niveles de

co-determinación. Y esta consideración de los diferentes niveles de la escala de co-determinación también nos ayudó a entender cuál era la libertad de acción en cada sistema, y ver en que realmente podría consistir nuestra colaboración en la producción de los recursos. Este trabajo y el marco teórico que lo apoyo ayudó también a mi parecer a evitar la trampa de imponer los valores de una cultura dominante, una trampa que es tan difícil de evitar en las relaciones entre centros y periferias, a pesar de nuestra buena voluntad,.

Aquí se termina esta primera parte donde traté de explicar cómo un enfoque específico, el de la TAD, ha contribuido para tomar en cuenta la dimensión social y cultural inherente a todo proyecto de aprendizaje o de enseñanza. Este es sólo un enfoque entre los múltiples que nos ofrece la investigación en educación matemática para apoyar esta dimensión. Ella me es más accesible porque ha sido desarrollada dentro de mi propia cultura y porque la comunidad a la que pertenezco hizo el esfuerzo de organizar sus relaciones con otros componentes de esta cultura, particularmente la teoría de las situaciones didácticas (Brousseau, 1997). Con los años se ha convertido para mí en un instrumento operacional que utilizo y combino con otros marcos cuando es posible, respetando la consistencia interna de cada uno, como lo muestra por ejemplo el desarrollo de la aproximación instrumental de la integración tecnología que mencionaré en la mesa redonda sobre el impacto de la tecnología sobre los currículos (Artigue, 2002) (Guin, Ruthven y Trouche, 2005). Algunos pueden sorprenderse de la importancia dada a la TAD en mi presentación. Pero tomar en cuenta seriamente la dimensión socio-cultural de la educación matemática significa tomar en cuenta el hecho de que nuestras praxeologías de investigación son ellas mismas socialmente y culturalmente situadas (Artigue, Bosch y Gascón, 2011). Espero que el camino del cual describí aquí algunos episodios ayudará a comprender mejor el carácter situado de la TAD y, al mismo tiempo, la capacidad de esta teoría para interactuar con marcos y estructuras teóricas que, aunque diferentes, admiten lo que hemos llamado "sensibilidades claves" próximas en nuestros trabajos sobre la articulación de marcos teóricos (Artigue, 2009). Me parece que es un trabajo vital para nuestra comunidad si queremos superar la imagen fragmentada y a veces poco coherente que entrega muy a menudo la investigación en educación matemática, y un requisito necesario para la comunicación de nuestra comunidad con el exterior.

III Los desafíos de la educación matemática

Paso ahora al tema de los desafíos. Como en cualquier campo científico, algunos de éstos desafíos son más bien internos, resultando de preguntas que surgen del propio desarrollo del campo, otros son más bien externos, ligados a las relaciones de este campo con el mundo exterior, incluso si la distinción entre desafíos internos y externos no siempre es fácil de hacer, como se muestra en el párrafo anterior.

Son numerosos y se pueden formular de diversas maneras. Por ejemplo, teniendo que decidir sobre los desafíos que enfrenta hoy la ICMI en el Simposio organizado para la celebración de su centenario, Morten Blomhøj identificaba y comentaba de manera muy pertinente, los diez desafíos siguientes (Blomhøj, 2008):

- The challenge of keeping the meta-reflections on mathematics education research alive
- The challenge of defining and strengthening the relations to the supporting sciences
- The challenge of avoiding isolation among sub-paradigms

- The challenge of supporting the interplay between research and development of practices
- The challenge of integrating mathematics in general liberal education for democracy
- The challenge of defining evidenced based practices of mathematics teaching
- The challenge of mathematics education for all
- The challenge of improving teacher education and teacher professional development
- The challenge of integrating ICT in mathematics education
- The challenge of integrating mathematical modeling in mathematics education.”

En un texto recientemente publicado por la UNESCO sobre los desafíos de la enseñanza de las matemáticas en la educación básica en la preparación del que estuve estrechamente asociada (UNESCO, 2011), el principal desafío identificado es el de asegurar una educación matemática de calidad para todos, en coherencia con el "objetivo del Milenio" adoptado por las Naciones Unidas en 2000. En el texto, una vez aclarado lo que se entiende por educación matemática de calidad y la relación entre ésta y el concepto cada vez más utilizado de "Mathematical Literacy", se afirma que uno no puede esperar cumplir este desafío sin afrontar varios otros. El primer es, por supuesto, el de la accesibilidad, sabiendo que más de 75 millones de niños están siempre privados del acceso a la educación y que muchos de los que comienzan una educación básica no pueden terminarla. Pero incluso cuando el acceso a la educación básica está garantizado para todos, el acceso de todos a una educación de calidad está lejos de ser garantizado. Sin introducir prioridades, el documento se centra en 12 desafíos entre los múltiples que se deben afrontar para cambiar esta situación. Reproducimos a continuación la lista, el lector que quisiera obtener más información puede referirse al documento disponible en línea:

- El desafío de satisfacer demandas de competencia matemática cuyas exigencias van creciendo en nuestras sociedades.
- El desafío de la tensión entre la satisfacción de las necesidades de educación para todos y de educación de calidad, dos ambiciones que a menudo se considera imposible de cumplir al mismo tiempo.
- El desafío de desarrollar planes de estudios combinando de modo coherente y equilibrado la progresión en el contenido matemático y el desarrollo de competencias más transversales.
- El desafío de avanzar hacia prácticas de enseñanza más eficaces y estimulantes y de la producción de recursos adaptados a estos cambios.
- El desafío de garantizar la coherencia de las prácticas de evaluación con los valores que sustentan el concepto de educación matemática de calidad como se entiende en el texto.
- El desafío de la formación inicial y del desarrollo profesional del docente, y también el desafío de su contratación y retención, muy dependiente de su estatuto.
- El desafío de garantizar la complementariedad entre educación formal e informal.
- El desafío de la organización y control del diseño curricular, cuya formas más comunes son tan a menudo criticadas justificadamente.

- El desafío tecnológico, teniendo especialmente en cuenta lo que hoy pueden ofrecer las tecnologías digitales para desarrollar colaboraciones, compartir recursos y fortalecer la solidaridad.
- El desafío de la organización de sinergias productivas entre las diferentes comunidades que contribuyen a la educación matemática: matemáticos, didactas, formadores de docentes, docentes, responsables institucionales y comunidades educativas en general.
- El desafío de la diversidad social, cultural, lingüística y de género, percibiendo esta diversidad como una riqueza y no sólo como una fuente de problemas.
- Y, último pero esencial, el desafío de la investigación, haciendo que esta investigación responda mejor a las expectativas legítimas de la sociedad.

Incluso si las formulaciones son diferentes, como son las audiencias a priori anticipadas, ambos discursos me parecen muy coherentes. Nuestra ambición común es de hecho ayudar a hacer de la idea de educación de calidad para todos más que un lema, una realidad. También compartimos, sin duda, una misma visión general de lo que representa una educación matemática de calidad hoy en día, y de la distancia que nos separa de ésta. Las convergencias que poseemos no tienen nada inesperado. Pero, si existen convergencias, la pregunta: cómo responder con eficacia a estos desafíos, sigue siendo una pregunta muy abierta. Sin duda, no podremos tener éxito sin el apoyo de una investigación de calidad, respetuosa de nuestra diversidad, pero también capaz de articular claramente sus logros y mostrar cómo puede servir la educación matemática como campo de prácticas, fortalecer la formación de los profesores y su desarrollo profesional, adaptándose a la diversidad de los contextos y necesidades cambiantes en materia de enseñanza de las matemáticas. Para ello, debemos encontrar maneras de enfrentar teóricamente como prácticamente la cuestión de los cambios de escala, encontrar equilibrios más satisfactorios entre metodologías cualitativas y cuantitativas, convencer de que somos capaces de construir formas de evidencia creíbles para resistir con eficacia a las formas, inadecuadas, que ciertas instituciones tratan de imponernos. Por otra parte, incluso si nuestra contribución como investigadores es esencial, no podemos actuar solos, y considerando las múltiples presiones que enfrenta hoy el campo de la educación, la tentación del aislamiento es una tentación muy peligrosa. Los cambios sustanciales y sostenibles sólo son posibles si se ponen en marcha las sinergias necesarias entre las distintas comunidades que participan en la educación matemática, y si se desarrollan y fortalecen las colaboraciones y solidaridades necesarias a nivel local, regional e internacional. Es con este espíritu que la ICMI, la IMU (International Mathematical Union) en relación con la UNESCO y el ICIAM (International Council for Industrial and Applied Mathematics), recientemente lanzaron el proyecto CANP (Capacity and Networking Project), cuyo objetivo es promover y apoyar el desarrollo de redes regionales de matemáticos, profesores de matemáticas y didactas para aumentar las capacidades y desarrollar las sinergias y la solidaridad en la formación de los docentes. Este proyecto está estructurado en torno a la realización de escuelas o seminarios de dos semanas de duración, dirigidos indiscriminadamente a todos los implicados en la formación del profesorado, y organizando de manera coordinada la respuesta a ambas necesidades de la formación matemática y didáctica de los docentes en el contexto regional considerado. La primera realización, apoyada también por CIMPA (Centre International de Mathématiques Pures et Appliquées), y co-organizado por igual por matemáticos y educadores tendrá lugar en Malí en septiembre de 2011 para países de África Occidental francófona. La

segunda podría ser organizada el próximo año en América Central con un fuerte apoyo, espero que el CIAEM.

IV Références

- Alves, M. ; Artigue, M. ; Jahn, A. ; Campos, T. (2010). A comparative study of the secondary-tertiary transition. In, Pinto M.F. & Kawasaki T.F. (Eds.), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Belo Horizonte, Brazil: PME. 2, 129-136.
- Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7, 245–274.
- Artigue, M. (2009). Connecting Approaches to Technology Enhanced Learning in Mathematics : The TELMA Experience. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 14 (3).
- Artigue, M.; Winslow, C. (2010) International comparative studies on mathematics education : a viewpoint from the anthropological theory of didactics. *Recherche en Didactique des Mathématiques*. 30 (1), 47-82.
- Artigue, M.; Coagri-Nassouri, C. ; Smida, H., Winslow, C. (2011). Projet Spécial 2. Evaluations internationales : Impacts politiques, curriculaires et place des pays francophones. In A. Kuzniak et M. Sokhna (Eds.) Actes du Colloque International Espace Mathématique Francophone 2009, Enseignement des mathématiques et développement, enjeux de société et de formation, *Revue Internationale Francophone*, N° Spécial 2010, pp. 1-65.
<http://fastef.ucad.sn/EMF2009/colloque.htm>
- Artigue, M.; Kilpatrick, J. (2008). What Do We Know? And How Do We Know It? *Proceedings of the 11th International Congress of Mathematics Education*, Monterrey, Mexico, Juillet.
- Artigue, M.; Bosch, M.; Gascon, J. (2011). Research praxeologies and networking theories. *Proceedings of the CERME 7 Conference*, Rzeszow, Pologne, Février.
- Ball, D.; Hill, H.; Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching. Who knows mathematics well enough for teach third grade, and how can we decide? *American Educator*. 29 (3), 14-17, 20-22, 23-46.
- Batanero, C.; Burrill, G.; Reading, C. (2011). *Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education*. New York : Springer.
- Blomhøj, M. (2008). ICMI's challenges and future, In M. Menghini, F. Furinghetti, L. Giacardi, F. Arzarello (Eds.), *The first century of the International Commission on Mathematical Instruction (1908-2008). Reflecting and shaping the world of mathematics education*. Istituto della enciclopedia Italiana. Roma, pp. 169-180
- Blum, W.; Galbraith, P.; Henn, H.; Niss, M. (2007). *Modelling and Applications in Mathematics Education. The 14th ICMI Study*. New York : Springer.

- Bosch, M.; Fonseca, C.; Gascón, J. (2004). Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 24 (2.3), 205-250.
- Bosch, M. ; Gascón, J. (2006) 25 years of the didactic transposition. *ICMI Bulletin*. 58, 51–65.
- Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathématiques, 1970–1990*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Cantoral, R.; Farfán, R. (2003). Mathematics education : A vision of its evolution. *Educational Studies in Mathematics*. 53(3), 255-270.
- Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 12(1), 77-111.
- Chevallard, Y. (2002). Organiser l'étude. In J.L. Dorier y al. (Eds), *Actes de la 11^e Ecole d'été de didactique des mathématiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage, pp. 3-22 & 41-56.
- Chevallard, Y. (2011). La notion d'ingénierie didactique, un concept à refonder. Questionnement et éléments de réponse à partir de la TAD. In Margolinas, C., Abboud-Blanchard, M., Bueno-Ravel, L., Douek, N., Fluckiger, A., Gibel, P., et al. (Eds.). (2011). *En amont et en aval des ingénieries didactiques*. Grenoble: La pensée sauvage.
- Clarke, D.; Keitel, C.; Shimizu, Y. (2006). *Mathematics classrooms in twelve countries: The insider's perspective*. Rotterdam: Sense Publishers.
- D'Ambrosio, U. (2008). *Etnomatemática. Eslabón entre las tradiciones y la modernidad*. Mexico : Limusa.
- Delozanne, E.; Previt, D.; Grugeon-Allys, B.; Chenevotot-Quentin, F. (2010). Vers un modèle de diagnostic de compétences, *Revue Technique et Sciences Informatiques*. Editions Lavoisier Hermès Sciences. 29 (8-9), 899-938.
- Edwards, L.; Radford, L.; Arzarello, F. (2009). Gestures and Multimodality in the Construction of Mathematical Meaning. *Educational Studies in Mathematics*. 70.2.
- English, L.D. (Ed.) *Handbook of International Research in Mathematics Education* (2nd edition). London: Routledge, Taylor & Francis.
- Even, R.; Ball, D. (2008). *The professional education and development of teachers of mathematics: The 15th ICMI Study*. New York: Springer.
- Grugeon, B. (1995). *Etude des rapports institutionnels et des rapports personnels des élèves dans la transition entre deux cycles d'enseignement*. Thèse de Doctorat. Université Paris 7.
- Grugeon-Allys, B.; Pilet, J.; Delozanne, E.; Chenevotot, F.; Vincent, C.; Prévit, D.; El Kechai, N. (2011). PepiMep : différencier l'enseignement du calcul algébrique en s'appuyant sur des outils de diagnostic, *MathémaTICE* n°24, <http://revue.sesamath.net/spip.php?article338>
- Gueudet, G.; Trouche, L. (2010) *Ressources vives. Le travail documentaire des professeurs, le cas des mathématiques*. Rennes : Presses Universitaires de Rennes.
- Guin, D.; Ruthven, K.; Trouche, L. (2005). *The Didactical Challenge of Symbolic Calculators. Turning a Computational Device into a Mathematical Instrument*. New York : Springer.

- Hoyles, C.; Lagrange, J. (2010). *Digital technologies and mathematics education. Rethinking the terrain: The 17th ICMI Study*. New York: Springer.
- Isoda, M.; Stephens, M.; Ohara, Y.; Miyakawa, T. (2007). *Japanese Lesson Study in Mathematics. Its impact, diversity and potential for educational improvement*. Singapore : Word Scientific.
- Jaworski, B. (2007). Theory in developmental research in mathematics teaching and learning: Social practice theory and community of inquiry as analytical tools. In D. Pitta-Panzani & G. Philippou (Eds.), *Proceedings of the Vth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Larnaca, Cyprus: Department of Education, University of Cyprus, pp. 1688-1697.
- Keitel, C.; Kilpatrick, J. (1999). The rationality and irrationality of international comparative studies. In G. Kaiser, E. Luna, & I. Huntley (Eds.), *International comparisons in mathematics education*. London: Falmer, pp. 241–256.
- Lester, F. (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Information Age Publishing, Inc., Greenwich, Connecticut.
- Leung, F.; Graf, K.; Lopez-Real, F. (2006). *Mathematics education in different cultural traditions: A comparative study of East Asia and the West* (New ICMI Study Series 13). New York: Springer.
- Matheron, Y. (2000). *Une étude didactique de la mémoire dans l'enseignement des mathématiques au collège et au lycée. Quelques exemples*. Thèse de doctorat. Université d'Aix-Marseille 1.
- Matheron, Y.; Noirfalise, R. (2007) *Une recherche de la Commission inter-IREM (CII) Didactique soutenue par l'INRP : « Dynamiser l'étude des mathématiques dans l'enseignement secondaire (collège et lycée) par la mise en place d'AER et de PER* http://educmath.inrp.fr/Educmath/ressources/cdamperes/matheron_noirfalise.pdf
- Menghini, M.; Furinghetti, F.; Giacardi, L.; Arzarello, F. (2008). *The first century of the International Commission on Mathematical Instruction (1908-2008). Reflecting and shaping the world of mathematics education*. Istituto della enciclopedia Italiana. Roma.
- Najar, R. (2010). *Effet des choix institutionnels d'enseignement sur les possibilités d'apprentissage des étudiants. Cas des notions ensemblistes fonctionnelles dans la transition Secondaire/Supérieur*. Thèse de Doctorat. Université Paris 7.
- Nemirovski, R. ; Borba, M. (Eds.) (2004). PME Special Issue : Bodily Activity and Imagination in Mathematics Learning. *Educational Studies in Mathematics*, 57 (3).
- Praslon, F. (2000). *Continuités et ruptures dans la transition terminale S / DEUG Sciences en analyse: Le cas de la notion de dérivée et son environnement*. Thèse de Doctorat. Université Paris 7.
- Robert, A.; Rogalski, J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche, *Revue Canadienne de l'Enseignement des Sciences, des Mathématiques et des Technologies*. 2 (4), 505-528.

- Saenz-Ludlow, A.; Presmeg, N. (2006). Semiotic perspectives in mathematics education: A PME special issue. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1–2).
- Sensevy, G.; Mercier A. (2007). *Agir ensemble. L'action conjointe du professeur et des élèves*. Rennes : Presses Universitaires de Rennes.
- Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4–14.
- Skovsmose, O.; Valero, P. (2008). Democratic access to powerful mathematics ideas. In L.D. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (2nd edition). London: Routledge, Taylor & Francis, pp. 383-408.
- Sriraman, B.; English, L. (2010). *Theories of Mathematics Education. Seeking New Frontiers*. New-York : Springer.
- Stacey, K.; Chick, H.; Kendal, M. (2004). *The future of the teaching and learning of algebra: The 12th ICMI Study*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Tall, D. (1991). *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Tall, D. (2004). Thinking through three worlds of mathematics. In M. Holmes & A. Fuglestead (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Bergen, Norway: Bergen University College. 4, 281-288
- UNESCO (2011). *Les défis de l'enseignement des mathématiques dans l'éducation de base*. Paris : UNESCO. <http://unesdoc.unesco.org/images/0019/001917/191776F.pdf>

Agradecimientos: Quiero agradecer Carolina Ruminot para su revisión de la traducción.