XIII CONFERENCIA INTERAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
CIAEM 2011
26 - 30 Junio, 2011
Recife, Brasil
50 años
del Comité Interamericano de Educación Matemática

# Problemas históricos atractivos para el aprendizaje de la Matemática

Carlos **Sánchez** Fernández
Universidad de La Habana
Cuba
csanchez@matcom.uh.cu
Concepción **Valdés** Castro
Universidad de La Habana
Cuba
concha@matcom.uh.cu

**Resumen**

En este curso se pretende compartir ideas sobre cómo organizar actividades docentes centradas en la resolución de problemas generados por temas clásicos de la historia de la matemática. Trataremos de mostrar cómo la historia puede servir no sólo como fuente de anécdotas y problemas atractivos, sino además, para aclarar la heurística y la lógica del desarrollo de conceptos y métodos matemáticos. El curso se divide en dos partes, en la primera investigaremos problemas aritméticos asociados a la propiedad pitagórica y los números metálicos, en la segunda nos concentraremos en problemas adecuados para una introducción al Cálculo. Según sea el interés del grupo de participantes trataremos de generar problemas y ejercicios con mayor o menor nivel de complejidad. En ambas partes del curso nos preocuparemos por mostrar la unidad dialéctica entre números y figuras, ecuaciones y curvas, así como el entrañable encanto del quehacer matemático.

*Palabras claves:* Historia de la Matemática, resolución de problemas, propiedad pitagórica, números metálicos, introducción al Cálculo

## Introducción.

### ¿A qué llamamos problematización histórica?

La resolución de problemas ha sido la forma de proceder fundamental en el quehacer matemático desde las primeras necesidades de contar y medir, por ello le concedemos a la problematización del contenido un papel protagónico en cualquier acción dirigida a elevar la calidad de la Educación Matemática. Por otra parte, la necesidad de cambiar el discurso matemático tradicional para que las actividades docentes sean más atractivas y se comprenda mejor cómo es el quehacer de los matemáticos nos ha llevado a considerar el ingrediente de la historia de la matemática.

Nuestro interés en este curso es compartir algunas experiencias acumuladas en el uso de la historia de la matemática tanto en la organización de actividades docentes curriculares, como para la formación de profesores de enseñanza secundaria y para introducir en la investigación matemática a jóvenes de cierto talento. A la forma de actuación que referiremos, al principio, la denominamos *enfoque histórico-problémico* (Sánchez & Valdés, 1997 y 2000) y más adelante la hemos nombrado *problematización histórica*. En esencia, simplemente consiste en apoyarse en dos pilares fundamentales que tienen un fuerte vínculo entre sí:

- la historia de la matemática, y
- la problematización del contenido.

En este enfoque la historia de la matemática va a servir no sólo como fuente de problemas y de anécdotas interesantes, sino que, además, puede aclarar cuáles fueron aquellos problemas que motivaron la aparición de un concepto y por qué, cuál era la concepción de rigor del momento, cuáles los métodos que se usaban, cuáles las concepciones que existían y cómo ellas influyeron para que el desarrollo se realizara de esa manera y no de otra, así entonces, se podrán analizar los errores y pre-concepciones de los estudiantes con una nueva óptica (ver diferentes razones del uso de la historia y variados procedimientos, por ejemplo, en el estudio del ICMI editado por Fauvel & Maanen, 2000 o en el reciente artículo de Jankvist, 2009).

Otra posibilidad que brinda la *problematización histórica* es la *visión dinámica* que puede proporcionar de la matemática, eliminando la opinión bastante generalizada de que es una ciencia acabada, fósil. Este enfoque permite apreciar a la Matemática como un organismo vivo, en constante desarrollo, con problemas aún vigentes y desafiantes, pero sobre todo con significado (Vinner, 2000)

Concebimos la problematización del contenido en un sentido amplio, con el fin de explotar no solo las bondades del método heurístico, sino también como instrumento para la comprensión de los mecanismos de progreso de la Matemática, en fin, como medio de ampliación de la *cultura matemática*. Esto no quiere decir que se reproduzca textualmente toda la trayectoria histórica del problema, lo que se pretende es usar como inspiración a la historia, en una forma semejante (no idéntica) a lo que Grattan-Guinness (2009) llama *history-satire*, o lo que Lakatos (1983) llamaba *reconstrucción racional de la historia*.

Los problemas históricos que se comentarán pueden ser útiles tanto para introducir conceptos y resultados que aparecen en los programas oficiales de matemática de los últimos años de la secundaria, como en los primeros años universitarios, pero también en círculos de interés, seminarios y otras actividades que suelen realizarse con los alumnos que presentan talento e inclinación hacia esta disciplina e incluso, también se han utilizado para actividades de divulgación de la matemática.

Una de las grandes lecciones que podemos extraer del análisis histórico de los problemas matemáticos es que las soluciones incompletas o incluso erróneas no deben ser vistas como degradantes, son simplemente parte de la marcha normal del proceso general de resolución de problemas matemáticos. Por eso, no tememos hablar o proponer problemas cuya resolución completa ha demorado varios siglos, como es el caso de la cuadratura del círculo o del llamado enigma de Fermat o que aún están sin resolver como la conjetura de Goldbach. Nuestra experiencia nos dice que los participantes agradecen el tratamiento de este tipo de problemas *semi-abiertos o casi-cerrados.*

Es imposible mostrar con claridad y eficacia las bondades de un método con el tratamiento de temas demasiado heterogéneos. Hemos decidido circunscribirnos a dos temas clásicos de mucha vigencia: la geometría aritmética asociada a la *propiedad pitagórica* por una parte y por otra las cuadraturas y los problemas de optimización como *introducción al Cálculo*. En la medida de las posibilidades y en consideración de los intereses de los participantes en el curso trataremos de mostrar una adecuada cantidad de problemas y ejercicios, con mayor o menor nivel de complejidad. Pero siempre nos esforzaremos por mostrar la sinergia entre números y figuras, ecuaciones y curvas- en definitiva, el entrañable encanto del quehacer de los matemáticos (Sánchez & Valdés, 2010; Valdés & Sánchez, 2011).

## Problemas asociados a la propiedad pitagórica y los números metálicos.

El "Teorema de Pitágoras" puede ser considerado el resultado matemático más popularmente conocido de la Historia de la Matemática (Eves, 1995). El texto que lo ha inmortalizado es el Libro I de los *Elementos* de Euclides. Hoy sabemos que aunque no es nada evidente, su formulación es muy simple y asimilable en cualquier cultura. En particular, aparece en una de las tabletas babilónicas que se conservan en la Universidad de Columbia, New York, con más de 3600 años de antigüedad y en una de las principales fuentes de la matemática china el *Chou Pei Suang Ching* (La aritmética clásica del gnomon y de los caminos circulares de los cielos) escrito antes que los *Elementos*.

La formulación del Teorema de Pitágoras en casi todos los textos antiguos es de carácter geométrico, pero posteriormente se ha relacionado con múltiples asuntos tanto aritméticos, como analíticos. El teorema, como se formula hoy, destaca una singular relación numérica entre las longitudes de los catetos a, b y la longitud de la hipotenusa c de cualquier triángulo rectángulo, la llamada propiedad pitagórica: $c^2 = a^2 + b^2$.

Pero lo más atractivo de la propiedad pitagórica, es que no solo es válida para todos los triángulos rectángulos, sino que los caracteriza completamente, es decir, cualquier triángulo tal que las longitudes de sus lados verifiquen la identidad aritmética $c^2 = a^2 + b^2$, tiene necesariamente un ángulo de 90 grados. En resumen, la propiedad aritmética de descomposición en suma de cuadrados está relacionada de manera biunívoca con la propiedad geométrica denominada "Teorema de Pitágoras".

Hoy se conocen más de 500 demostraciones del teorema con el uso de variadas técnicas geométricas, algebraicas, por tángrams, mecánicas o mixtas. (En Loomis 1972, aparecen 367 demostraciones). A nosotros nos interesan sobre todo las propiedades enigmáticas y fructíferas derivadas del "Teorema de Pitágoras" que exponemos a continuación en forma de problemas y ejercicios con algunos breves comentarios históricos.

**Problema 1. Encontrar todos los triángulos rectángulos cuyos tres lados tengan longitud entera**

Ante todo unas definiciones simples. Llamaremos trío pitagórico a una terna de números (a,b,c) que representan respectivamente los valores de los dos catetos y c la longitud de la hipotenusa, diremos que es una terna pitagórica simple si a, b y c no tienen factor común, es decir mcd (a,b,c)=1. En tal caso también se dice que a, b y c son coprimos. Por ejemplo (3,4,5) es un trío pitagórico simple, pero (9,12,15) aunque representa un triángulo rectángulo no es un trío pitagórico simple porque sus elementos tienen el factor común 3, no son coprimos. Existen varias fórmulas para generar tríos pitagóricos (a,b,c), pero se hará énfasis en la restricción de búsqueda en valores enteros.

En la resolución del Problema 1, con la restricción de que los valores de las longitudes sean enteros, pueden aparecer muchos problemas particulares o variantes con otras restricciones mayores o menores. Por ejemplo, son comunes los problemas en que se analiza la existencia y caracterización de triángulos rectángulos con lados enteros y alguna restricción adicional:

A. *Tres lados de longitudes enteras consecutivas*. En este caso la restricción es muy fuerte y la solución es única $(3,4,5)$.
*B.* *Catetos enteros sucesivos* Este caso es una variante del anterior con una condición menos restrictiva. ¿Qué puede asegurarse de la longitud de la hipotenusa? ¿Es siempre entera?
*C.* *Un cateto y la hipotenusa enteros sucesivos*. A veces este caso parece más complicado que el anterior. Se puede mostrar la tabla particular siguiente:

| *a-impar* | *b-par* | *c* |
|---|---|---|
| 3 | 4 | 5 |
| 5 | 12 | 13 |
| 7 | 24 | 25 |
| 9 | 40 | 41 |
| 11 | 60 | 61 |

*¿Cuál es la ley de formación en este caso?¿Y si suponemos la hipotenusa dos unidades mayor que uno de los catetos?* El primer caso se atribuye a los pitagóricos y este último caso se atribuye a Platón y su Academia.

D. *Que su área sea un cuadrado perfecto*
Una solución de este problema aparece en una carta de Fermat a su amigo Carcaví y el método que usa es el de *descenso infinito*. En realidad, Fermat demuestra el siguiente resultado auxiliar:
*Si el área de un triángulo rectángulo con lados enteros fuera un cuadrado, entonces existe otro de hipotenusa menor con la misma propiedad*
El profesor puede ayudar con alguna indicación conveniente.
E. *Que el área sea el duplo de un cuadrado perfecto*
La solución de este problema fue usada por Fermat para probar que la ecuación $x^4 + y^4 = z^4$ no tiene solución en enteros.
F. *Los dos catetos iguales.* Asociado a esta condición aparece el problema de las *irracionalidades* que en dependencia de los intereses de los participantes se puede profundizar más o menos

En la búsqueda de fórmulas generadoras de tríos pitagóricos los investigadores atribuyen a Diofanto de Alejandría (s. III d. C.) una técnica geométrica utilizable para hallar los puntos racionales de una curva algebraica (Bashmakova, 1997).

**Problema 2. Hallar geométricamente las soluciones racionales de la ecuación $x^2+y^2=1$**

*¿Es factible generalizar el procedimiento usado para hallar puntos racionales en curvas algebraicas de grado mayor o igual a* 3*?*

Este problema no es nada fácil y aquí solo se persigue llamar la atención sobre lo sorprendente que es la respuesta en un sentido general. Como se sabe este problema está ligado con el famoso enigma de Fermat (recomendamos leer Río 2005 que tiene atractivos problemas históricos relacionados)

**Problema 3. ¿Qué números enteros se descomponen en sumas de dos cuadrados perfectos?**

(Los números que se descomponen, como por ejemplo el 5=4+1 o 41=25+16, son llamados *números hipotenúsicos*)

Obsérvese que en este caso no es necesariamente un cuadrado perfecto el número que se pretende representar como suma de cuadrados. Al igual que en los problemas anteriores se pueden formular variantes más simples para comenzar la investigación, por ejemplo:

*Clasifica los números enteros menores de* 20 *en hipotenúsicos y no hipotenúsicos y halla alguna posible regla*.

En una de sus numerosas notas marginales sobre la copia de la traducción al francés de la *Aritmética* de Diofanto, Pierre de Fermat afirma que ha demostrado un resultado general.

*Todo número primo de la forma* $4k+1$ *es la suma de dos cuadrados.*

Una atractiva demostración de este resultado y otras ideas de carácter histórico se pueden encontrar en (Aigner & Ziegler 2005)

**Problema 4. Dado dos triángulos rectángulos ¿Existe un tercer triángulo rectángulo con hipotenusa igual al producto de las hipotenusas de los dos triángulos dados? Es decir, ¿el producto de dos números hipotenúsicos será un número hipotenúsico?**

Este problema fue resuelto por Vieta (s. XVI) con una fórmula aritmética hallada por Diofanto y puede relacionarse con números complejos y en particular con los llamados *enteros de Gauss*: $a+ib$ donde $a$ y $b$ son números enteros.

**Problema 5. Con regla y compás dividir un segmento en dos partes tales que la diferencia entre los cuadrados de sus longitudes sea igual a su producto.**

Muestre que el segmento mayor en la división anterior es media geométrica entre el segmento menor y el segmento total.

Decimos que dos números positivos $a$ y $b$, $a>b$, están en proporción o *razón áurea* si se cumple que: $\frac{a+b}{a}=\frac{a}{b}$. Esto es, el todo es a la parte mayor, como la parte mayor es a la parte menor. Al valor numérico de esta razón se le llama *número de oro* y desde principios del siglo XX se denota con la letra griega Φ (Fi mayúscula) o φ (fi minúscula) en homenaje al escultor griego **Fidias** (s. V a. C.) quien la usó sistemáticamente en sus obras. Su valor aproximado con 20 cifras decimales exactas es

$$\Phi=1{,}61803398874989484820\ldots$$

La proporción áurea se ha encontrado tanto en algunas figuras geométricas como en la naturaleza en elementos tales como caracoles, flores, hojas y tallos de algunas plantas, el cuerpo y el rostro humanos, etc. Desde el punto de vista puramente matemático Φ es notable por estar entre los números que son raíces de ecuaciones algebraicas, se definen por una proporción y en cambio no es posible representarlos como cociente de dos números enteros. Por tanto, se clasifican como números *irracionales algebraicos*.

En el siglo XX se han estudiado otros números irracionales algebraicos que por la forma como se definen constituyen una generalización del número de oro. Son los llamados *números metálicos* que se pueden definir como las raíces positivas de la ecuación cuadrática $x^2 - Nx - 1 = 0$. Esta ecuación en el caso $N = 1$ define el número áureo.

Se pueden proponer varios ejercicios relativamente sencillos

1. Halla una expresión aritmética para los números metálicos. Por ejemplo,

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

2. Prueba que las potencias del número de oro cumplen la relación siguiente: $\Phi^n = \Phi^{n-1} + \Phi^{n-2}$ para todo $n > 1$.
3. Investiga la existencia de una relación similar a la anterior con las potencias del número de plata (N=2) y el número de bronce (N=3).

Otra generalización del número de oro se hace cambiando la ecuación cuadrática que lo define por una ecuación cúbica similar, es decir, $x^3 - x - 1 = 0$. La única raíz real (irracional) de esta ecuación es denominada *número plástico*. El número plástico se introdujo en el siglo XX por un monje benedictino con formación profesional de arquitecto. El monje diseñó una bella abadía en Holanda para su orden monástica basándose en las propiedades del número plástico.

*¿Eres capaz de hallar algunas de las propiedades del número plástico similares a las de los números metálicos?*

## Problemas atractivos para una introducción al Cálculo

### Problemas de cuadraturas

En la Grecia Antigua existía una gran fascinación por la belleza, por la armonía, por lo simple. Se observa una tendencia a construir lo complejo a partir de lo elemental, lo que explica el porqué tenían gran interés en resolver los problemas de construcción geométrica utilizando solamente la regla y el compás, los dos instrumentos asociados a las figuras geométricas más sencillas: la recta y la circunferencia. Un tipo de problema que investigaban era la *cuadratura de figuras planas*. Para los helenos *cuadrar una figura* era construir, solo con regla y compás, un cuadrado que tuviera la misma área que la figura plana original, de esta forma la simplicidad del cuadrado se impondría a la complejidad de la figura (González, 1992; Sánchez & Valdés 2000). Uno de los problemas que primero resolvieron fue el siguiente:

**Problema 1. Cuadrar un polígono.**

La forma que puede tener un polígono es muy variada, pero su característica distintiva, el estar limitado por un número finito de segmentos de rectas, sin dudas es un factor que facilita el cálculo de su área. Por esta razón fueron los polígonos las primeras figuras en ser cuadradas. Sin embargo, cuadrar un polígono arbitrario puede ser dificultoso, ya que su forma puede ser caprichosa. Por esta razón, para comprender mejor este problema los helenos consideraron algunos casos particulares más sencillos y después trataron de generalizar el método seguido o los resultados obtenidos. ¿Qué tipo de figura podríamos intentar en primer lugar? Por su forma, el polígono más cercano al cuadrado es el rectángulo, entonces comentaremos el método heleno para resolver el problema de *la cuadratura de un rectángulo***.**

Una vez resuelto este caso sencillo es natural proponernos cuadrar otros dos tipos de polígonos sencillos, por ejemplo, propiedades geométricas elementales permiten apreciar que la *cuadratura del paralelogramo y el triángulo* se obtienen de forma inmediata de la del rectángulo. Además, es interesante comentar, cómo este proceso corresponde nítidamente a las fórmulas que usamos actualmente y que los helenos no podían escribir por la ausencia de un simbolismo algebraico.

La resolución del problema 1 en general se facilita si antes somos capaces de resolver el problema auxiliar de *cuadrar la figura formada por la unión de dos cuadrados*, lo que nos brinda una oportunidad de hacer un uso no habitual de la propiedad pitagórica.

Uno de los problemas más famosos de la geometría griega clásica griega fue:

**Problema 2. Cuadrar un círculo.**

Al tratarse de una figura curvilínea, desde muy temprano fue utilizado el recurso de inscribir y circunscribir figuras poligonales, para después proceder a aumentar el número de lados de los polígonos y así lograr una buena aproximación al área requerida. Pero este método no proporcionaba una solución que satisficiera los cánones de rigor de la matemática helena: daba un valor aproximado del área, pero no mostraba cómo construir un cuadrado equivalente al círculo. Ante la enorme dificultad de este problema, comenzaron a resolverse problemas relacionados asequibles, con la esperanza de más tarde o más temprano cuadrar el círculo. Destacaremos los dos más significativos:

Problema 2a. *Encontrar una relación entre el área de un círculo y su radio*.

Problema 2b. *Encontrar una relación entre la longitud de una circunferencia y su radio.*

En ambos casos, para una circunferencia de radio $r$, se llegaron a conclusiones equivalentes a las fórmulas $A = kr^2$ y $L = k'r$, donde $A$ y $L$ denotan respectivamente el área del círculo y la longitud de la circunferencia y $k$ y $k'$ son constantes. El problema de la cuadratura del círculo estaría resuelto si se conociera cuál es el valor de $k$, lo cual supuso un reto formidable para varias generaciones de matemáticos. De esta manera comenzó la larga y tormentosa historia del problema de la cuadratura del círculo y la cacería de las cifras decimales del número que hoy denotamos por $\pi$.

En dependencia de los objetivos que persiga el profesor, hay una gama muy amplia de posibilidades para continuar explotando este problema: el estudio de otros problemas de la geometría elemental considerados por los helenos, como la cuadratura de lúnulas y otras figuras curvilíneas o algunos de los tantísimos esfuerzos realizados hasta conseguir una prueba de la imposibilidad de cuadrar el círculo y la importancia encontrada actualmente a las fabulosas aproximaciones conseguidas del número $\pi$ (Dunham, 1995; Bailey, 1997).

Para un acercamiento más directo a la noción de integral es conveniente introducir a los alumnos en la forma de trabajo que comenzó a utilizarse en el siglo XVII, los razonamientos con infinitesimales e indivisibles. Con este fin podemos apelar a problemas tomados de las obras de Kepler, Galileo y especialmente Cavalieri (González Urbaneja, 1992; Hairer & Wanner, 2008; Valdés & Sánchez, 2011).

Un tipo de ejemplo muy instructivo es la cuadraturas de figuras limitadas por parábolas o hipérbolas generalizadas:

**Problema 3. Cuadrar la figura limitada por una curva de la forma $y=x^k$, el eje de abscisa y dos rectas paralelas al eje de ordenadas.**

Por supuesto, lo adecuado es comenzar por los casos más sencillos, cuando $k=2$ o $k=3$, utilizando la división de la base de la figura por puntos equidistantes. Enseguida se advierte la complejidad de los cálculos para valores mayores de $k$ y, especialmente para los casos en que $k$ es negativo o fraccionario. Aquí puede explicarse la variante propuesta por Fermat de utilizar puntos que formen una progresión geométrica para subdividir la base de la figura. La comparación de estas dos formas de aproximación sugiere naturalmente el cuestionamiento acerca de la posibilidad de que ambas conduzcan al mismo resultado.

El método de Fermat, como él mismo advirtió, sirve para cuadrar todas las parábolas e hipérbolas, excepto uno de los casos que cabría imaginar entre los más sencillos $k=-1$. Esta discusión conduce al establecimiento de la relación entre el problema de la cuadratura de la hipérbola equilátera con los logaritmos y el análisis de cómo este vínculo sirvió de punto de partida para pasar del logaritmo como instrumento de cálculo al logaritmo como función (Edwards, 1979; Hairer & Wanner, 2008; Valdés & Sánchez, 2011).

Enfatizaremos en cómo el análisis de los problemas anteriores o de otros semejantes, constituyen un instrumento útil para lograr una disposición más favorable de los alumnos en el enfrentamiento a la noción de *integral de una función*.

**Problemas de extremos**

Desde la antigüedad clásica pueden encontrarse problemas relacionados con la determinación de valores máximos y mínimos para ciertas magnitudes, por supuesto, siempre analizados por una vía puramente geométrica. Por ejemplo, en los *Elementos* de Euclides aparecen los enunciados siguientes:

**Problema 4a. Dado un segmento AB, encontrar un punto C entre A y B tal que el rectángulo formado con los segmentos AC y CB tenga la mayor área posible.**

**Problema 4b. En un triángulo ABC inscribir un paralelogramo ADEF que tenga área máxima.**

El estilo de presentación de los *Elementos* no admite que en la solución se incluya comentario alguno acerca de la forma en que se llegó a la respuesta, solo aparece argumentada la construcción geométrica propuesta. Sin embargo nosotros podemos imaginar, por ejemplo para el primer problema que, antes de conjeturar la posición del punto $C$ como el punto medio del segmento, debe haber transcurrido un periodo de experimentación con diferentes opciones, en especial los casos extremos en que $C$ está muy cercano a $A$ o $B$ y además que este mismo proceso fue el que arrojó luz sobre la construcción realizada.

La solución de estos problemas por la vía exclusivamente geométrica permite aplicar a un problema atractivo las propiedades de los rectángulos y triángulos estudiadas en la enseñanza elemental. Pero también estos problemas pudieran ser enfocados utilizando el simbolismo algebraico (que solo comenzó a utilizarse en el siglo XVII), así lo reduciríamos a encontrar el valor máximo de la expresión polinómica $x(a-x)$ (donde $a$ es la longitud del segmento $AB$). Es interesante discutir la solución de este problema haciendo uso de una nueva notación y revelar cómo esta nueva forma de expresión matemática brinda una perspectiva mucho más general y eficiente de resolver algunos problemas. También puede ser instructivo un análisis de cómo la solución euclidiana al primer problema es en esencia una forma geométrica de "completar el cuadrado en la expresión $x(a-x)$".

El resultado así obtenido puede ser reformulado en términos geométricos o algebraicos bien diferentes, dando solución a problemas con aspecto diferente:

**Problema 5a. Entre todos los rectángulos de perímetro dado, el cuadrado tiene área máxima.**

**Problema 5b. La media geométrica entre dos números positivos es menor que la media aritmética entre ellos.**

El primero de los dos problemas anteriores es un caso particular del llamado *problema isoperimétrico* y constituye una posibilidad para la discusión de una serie de problemas sumamente atractivos que permiten revelar el encanto de la matemática, algunos resolubles en términos elementales y otros pertenecientes a ramas superiores de la matemática (Sánchez & Valdés, 2010).

Estos y otros problemas de índole geométrica y física, como por ejemplo la determinación de la trayectoria de un rayo de luz, motivaron que se pensara en la búsqueda de algoritmos más generales para la solución de problemas de máximos y mínimos. Una primera idea muy reveladora la encontramos en los interesantes trabajos de Fermat (González, 1992; Valdés & Sánchez, 2011).

Para la determinación de los puntos de máximo y mínimo de una curva, Fermat analizó su comportamiento geométrico en los puntos cercanos a aquellos donde toma la forma de una cumbre (máximo) o una hondonada (mínimo) y de esa forma obtuvo el algoritmo siguiente: Se forma el cociente $\frac{f(x+e)-f(x)}{e}$ y, después de simplificar, se coloca $e=0$. Seguidamente, la expresión así obtenida Fermat la iguala a cero y resuelve la ecuación correspondiente. Esto le proporciona los valores de $x$ donde la curva puede tener máximos o mínimos.

Como forma de confirmación de la validez de su método, Fermat resuelve el problema 1 y comunica por carta a Descartes sus ideas. Pero Fermat también enfrentó problemas mucho más difíciles que mostraron la potencia de su algoritmo. Entre los que resolvió está un problema que en su época era realmente difícil y muy discutido:

**Problema 6. Encontrar la trayectoria de un rayo de luz que atraviesa un medio no homogéneo.**

Una característica muy interesante del trabajo de Fermat es la analogía que estableció entre el problema general del hallazgo de los puntos de extremo de una curva y la determinación de su recta tangente en un punto, otro de los problemas cardinales de la época.

Los métodos tanto de cuadratura como de determinación de puntos de extremo de una curva o de sus tangentes ideados por Fermat y sus contemporáneos permitió que, en la segunda mitad del siglo XVII, se distinguieran dos tipos de algoritmos capaces de resolver una amplia gama de problemas. Pero en muchas ocasiones la aplicación de estos algoritmos requería de gran creatividad y mucha habilidad en su manejo. Esto motivó al inglés Newton y al germano Leibniz a buscar algoritmos más eficientes para el tratamiento de estos problemas. Sin embargo el mérito fundamental de Newton y Leibniz radica en la interrelación encontrada entre los problemas de cuadratura y de hallazgo de extremos y tangentes a las curvas. Esta relación es la expresada en lo que actualmente denominamos teorema fundamental del cálculo y convirtió la gran amalgama de técnicas infinitesimales existentes en un potente instrumento algorítmico para la resolución de problemas (Valdés & Sánchez, 2011).

**Referencias y bibliografía**

Aigner, M.; Ziegler, G. (2005). *EL LIBRO de las demostraciones.* Ed. Nivola. Madrid.

Bailey, D.; et al. (1997). The quest for Pi, *The Math. Intelligencer* V.19, N.1.

Bashmakova, I. (1997). *Diophantus and Diophantine Equations* (transl. A. Schenitzer). Math. Ass. of America, Washington, D.C.

Dunham,W. (1993). *Viaje a través de los genios*, Ed. Pirámide, Madrid.

Dunham,W. (1995). *El universo de las matemáticas*, Ed. Pirámide, Madrid.

Edwards, C. (1979). *The Historical Development of the Calculus*, Springer-Verlag.

Eves, H. (1995). *Introdução à Historia da Matemática*, ed. Unicamp, Sao Paulo

Fauvel, J.; Maanen, J. (2000). *History in Mathematics Education. The ICMI Study*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht

González Urbaneja, P.M. (1992) *Las raíces del cálculo infinitesimal en el siglo XVII*, Alianza Editorial, Madrid.

Grattan, I. (2009). History or Heritage? An important distinction in Mathematics and for Mathematics Education. En *Routes of learning. Highways, pathways and byways in the history of mathematics*. Baltimore MD: John Hopkins Univ. Press.

Guzmán, M**.** (1991). *Para Pensar Mejor*, Ed. Labor, Madrid.

Guzmán, M. (2007). Enseñanza de las Ciencias y la Matemática. *Revista Iberoamericana de Educación. (*43), 19-58

Hairer, E.; Wanner, G. (2008). *Analysis by its History*, Springer Verlag, Berlín.

Jankvist, U. (2009). A categorization of the "whys" and "hows" of using history in mathematics education. *Educational Studies in Math*. Preprint online.

Lakatos, I. (1983). La Historia de la ciencia y sus reconstrucciones racionales. En *La Metodología de los Programas de Investigación Científica*. Alianza Universidad. Madrid.

Loomis, E. (1972). *The Pythagorean Proposition*. NCTM. Washington D. C.

Polya, G. (1974). *Cómo plantear y resolver problemas*. Cuarta reimpresión en español. Editorial Trillas. México D.F.

Río, Á. (2005). *El reto de Fermat*. Ed. Nivola. Madrid.

Sánchez, C.; Valdés, C. (1997). *Ilustración del uso de la historia de la matemática en una enseñanza centrada en resolución de problemas.* Revista Educación Matemática. México, 86-96.

Sánchez, C.; Valdés, C. (2000). Proposiciones para un estudio dinámico de la medida, en John A. Fossa (ed.) *Facetas do Diamante. Ensaios sobre Eduacação Matemática e Historia da Matemática.* Editora da SBHMAT. Rio Claro

Sánchez, C.; Valdés, C. (2010). *El Entrañable Encanto de las Matemáticas*. Ed. Félix Varela. La Habana.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*, Academic Press, Florida

Valdés, C.; Sánchez, C. (2011). *Introducción al Análisis Matemático*. Ed. Félix Varela. La Habana.

Vinner, O. (2000). Procedures, Rituals and Man's Search for Meaning. En *9th*. *International Congress on Mathematical Education. Selected Lectures*, Japan.