XIII CONFERENCIA INTERAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
CIAEM 2011
26 - 30 Junio, 2011
Recife, Brasil
50 años del Comité Interamericano de Educación Matemática

La interacción entre modelos y teorías en la enseñanza de la cronotopía

Carlos E. **Vasco**
Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá
Universidad del Valle, Cali
Colombia
carlosevasco@gmail.com

Resumen.

La teoría de modelos en lógica formal permite refinar los conceptos de *modelo* y de *teoría* para producir descripciones más finas de las actividades noético-semióticas sobre el espacio-tiempo que constituyen la Cronotopía. Estas descripciones que explicitan el trabajo sobre los modelos como distinto del trabajo sobre las teorías y que aclaran el papel de los morfismos de interpretación de las teorías en los modelos permiten potenciar la manera de enseñar la Cronotopía por medio del diseño y gestión de situaciones-problema de tipo taller que sean apropiadas para estimular y guiar los procesos de aprender.

La Cronotopía

En el encuentro XVI de Geometría y sus Aplicaciones en Bogotá en 2005, en la XII Conferencia Inter-Americana de Educación Matemática en Querétaro, México, y en el XXI Encuentro con la Matemática de Castel San Pietro en Italia en 2007, presenté un ambicioso programa de la disciplina matemática del futuro que incluye todo lo que ahora llamamos "geometría", y que llamé "Cronotopía". Para resumir brevemente lo dicho en las conferencias citadas, propuse la ecuación siguiente:

Cronotopía = Cronología + Cronometría + Topología + Topometría

La Cronotopía incluye el estudio del espacio, del tiempo y del espacio-tiempo relativista. Se trata, como diría Carlo Federici, de una física general del espacio-tiempo, que incluye la cinemática, antes de la introducción de la dinámica con magnitudes como la masa o la carga eléctrica.

Se distinguen en ella los aspectos *-lógicos, antes de las medidas numéricas, y los aspectos *-métricos, que incluyen el estudio de las magnitudes espaciales y temporales con sus cantidades, unidades y sistemas de medición. Así, lo que llamamos "geometría" en sus aspectos lógicos está incluida en la Topología y, si se incorporan los aspectos métricos, en la Topometría.[1]

Modelos y teorías

Cuando se habla de "modelos", se suele entender "modelos con su teoría", a los que podríamos llamar "modelos teóricos", y cuando se habla de "teorías", se suele entender "teorías con su modelo para interpretarlas", a las que podríamos llamar "teorías modélicas".

La tesis central de este trabajo es que, al menos para la Cronotopía, los procesos de enseñarla y aprenderla se facilitan y potencian con la ayuda de la distinción entre los modelos mentales, por un lado y, por otro, las teorías formuladas en lenguaje articulado, simbólico o no, conectadas con los modelos por medio de morfismos de interpretación.

Comencemos por un rápido recorrido histórico. Hacia 1930, con los teoremas de Gödel, se empezó a distinguir explícitamente la verdad de un proposición de la validez de un teorema en un sistema axiomático. En esa década, en Polonia, sobre todo en el trabajo de Tarski, se empezó a distinguir la teoría como un sistema de proposiciones o fórmulas enunciadas en un lenguaje formalizado, y el modelo como un conjunto de elementos con ciertas operaciones y relaciones específicas, que se llamaba indistintamente colección, clase, conjunto, familia, sistema o estructura.

La palabra "grupo" no aparece en esa lista, porque ya se había especializado durante el siglo XIX para ciertos sistemas de transformaciones invertibles y, por ello, dentro de las matemáticas, "grupo" ya no se toma como sinónimo de agrupación, agregado, clase o conjunto.

Desde los años 30, el grupo Bourbaki llamó a los grupos, anillos y cuerpos "estructuras algebraicas", que tenían un conjunto de elementos con una o dos operaciones binarias. Las estructuras algebraicas se contraponían a las estructuras de orden, que sólo tenían el conjunto de elementos y una relación reflexiva, antisimétrica y transitiva, y a las estructuras topológicas, que eran de segundo orden, en el sentido de que, además del conjunto de elementos, tenían un conjunto de subconjuntos de elementos llamados "vecindades", con relaciones entre los elementos y las vecindades, y relaciones y operaciones entre vecindades.

En los fascículos iniciales de Bourbaki tampoco se precisó la relación entre los conjuntos, las estructuras y los tipos de estructuras, y se intentó presentar la matemática en singular como una teoría presentable exclusivamente en una combinación de lenguaje verbal técnico y fórmulas simbólicas, pues se rechazaba explícitamente el uso de figuras e imágenes, incluso para la geometría.

Después de la guerra de 1939 al 45, con el trabajo en los lenguajes formales y en los incipientes lenguajes de programación, se empezó a precisar una teoría más fina sobre los

---

[1] La Cronotopía, a la que llamé con tan poca modestia "el Programa de Bogotá" para lo que se suele

modelos y las teorías, que históricamente se llamó "Teoría de Modelos". En ella se distinguía claramente entre *teorías* como conjuntos de fórmulas con una relación de implicación, y *modelos* como subconjuntos de elementos con sus operaciones y relaciones. La referencia fundamental sigue siendo el texto de Chang & Kiesler (1973).

A mi parecer, la motivación más fuerte para distinguir explícitamente entre teorías y modelos vino precisamente de la geometría, y más precisamente, de la pluralidad de las geometrías que sorprendieron a los matemáticos durante el siglo XIX.

El cuestionamiento de la naturalidad y la hegemonía de la geometría euclidiana y la reaparición de la geometría proyectiva que ya venía desde Desargues y Pascal en el siglo XVII obligó a reflexionar sobre las relaciones entre las geometrías formalizadas con axiomas, teoremas y demostraciones y la realidad física.

La dualidad de la geometría proyectiva plana proporcionó la motivación más sorprendente para la separación entre teorías y modelos: si se interpreta "punto" como una recta y "recta" como un punto, se mantiene la verdad de la proposición.

El primer ejemplo lo proporciona el primer axioma de Euclides: "Dos puntos diferentes determinan una única recta". Su dual es: "Dos rectas diferentes determinan un único punto". Esto no se cumple en la geometría euclidiana, pero si se agrega un punto en el infinito para cada haz de paralelas del plano euclidiano, sí se cumple en el plano proyectivo.

La desazón que produce darle sentido a los puntos en el infinito y la dificultad para responder por qué se toma un solo punto en el infinito en vez de dos, uno por cada extremo del haz de rectas, se pueden atenuar si uno piensa en el modelo de la geometría de Riemann en la esfera, pero en la teoría identifica "punto" como una pareja de puntos antipodales, y "recta" como una circunferencia maximal, llamada imprecisamente "círculo máximo", en la misma esfera, considerándola como compuesta por sus parejas de puntos antipodales.

Ya "punto" no significa lo que antes pensábamos que era un punto, porque son dos, ni "recta" significa lo que antes pensábamos que era una recta, pues es curva, pero todas las demostraciones parecen funcionar perfectamente, y la dualidad es comprobable por una inspección cuidadosa del modelo mental de la geometría de la esfera.

Con ciertos refinamientos lingüísticos se puede comprobar que un teorema de la geometría proyectiva plana sigue siendo teorema si se cambia la interpretación usual de "recta" y de "punto", pues en una teoría en que todos los axiomas son duales, cada paso de una demostración sigue siendo válido formalmente con las dos interpretaciones.

Todo esto podría haberse formulado a comienzos del siglo XIX, antes de la aparición de la geometría no euclidiana de Bolyai, Lobatchevsky y Gauss, que ahora llamamos "hiperbólica", pero esas reflexiones y preguntas no se concretaron en una teoría específica.

La geometría hiperbólica puso en tensión el campo de la geometría, pero fue tenida sólo como una curiosidad lógica durante cuarenta años, hasta que, hacia 1860, Beltrami inventó un modelo tridimensional euclidiano para una región del plano hiperbólico. La trompeta de Beltrami, generada por la revolución de la tractriz, permitía interpretar "punto" y "recta" de manera que se pudiera comprobar en ese modelo el cumplimento del axioma no-euclidiano de la multiplicidad de paralelas por un punto exterior a una recta dada.

En pocos años, Riemann, Klein y Poincaré inventaron modelos sólidos y planos y desarrollaron teorías rigurosas para estas y otras geometrías no euclidianas, en particular la geometría de Riemann que ahora llamamos "elíptica".

Aunque no podamos seguirlas en su totalidad por falta de tiempo, propondré luego algunas experiencias tipo "taller" sobre estos temas, que diseñé para la primera promoción del doctorado interinstitucional en educación en la Universidad del Valle. Nos apoyarán en lo que digo solamente en teoría, siguiendo por el rabillo del ojo mis modelos mentales, con la esperanza de que el lector o auditor puedan seguir lo que digo e interpretarlo en algunos de sus propios modelos mentales.

La interacción entre modelos y teorías en geometría se extendió muchísimo desde 1860 hasta 1960, pero no se formalizó explícitamente en la lógica hasta los años 70. Lo que he aprendido al respecto lo debo más que todo a los seminarios con Xavier Caicedo en la Universidad Nacional.

Desde los tiempos de la renovación curricular en el Ministerio de Educación de 1975 a 1993, trabajé las geometrías desde el enfoque de sistemas, con la distinción entre tres tipos de sistemas: los sistemas concretos físicos o imaginados a partir de los cuales se podían construir diferentes sistemas conceptuales, cada uno de los cuales, a su vez, se podía representar con sistemas simbólicos diferentes.

Propuse explícitamente el enfoque de sistemas desde 1980, pero se precisó en una primera versión completa para los marcos teóricos de las áreas curriculares del MEN en 1984 y se perfeccionó en la introducción al programa de noveno grado en 1991, programa que nunca pasó de una limitada experimentación en Bogotá, Medellín y Cali (Vasco, 1980). La presentación rigurosa, con la especificación a los sistemas geométricos, se publicó en la revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas y Naturales en el mismo año 1991 (Vasco, 1991).

Pero la relación entre los sistemas conceptuales y los sistemas simbólicos no era todavía muy precisa; sólo pude formularla más rigurosamente con las ideas de Raymond Duval, quien vino a dar un curso en el doctorado de la Universidad del Valle, y trajo su libro recién publicado en francés en 1995 sobre semiosis y pensamiento humano. Myriam Vega lo tradujo al castellano en 1999 y en Colombia empezamos a utilizar sus ideas desde entonces, hoy ya muy extendidas en el ámbito europeo y latinoamericano (Duval, 1995/2004).

Raymond Duval nos enseñó a distinguir las representaciones internas, como imágenes mentales siempre traicioneras y escurridizas, producidas y procesadas por la actividad noética, de las representaciones semióticas externas y materializadas como productos de los registros semióticos de representación.

Los registros semióticos de representación completan la propuesta del enfoque de sistemas que utilicé en la renovación curricular en matemáticas de 1978 a 1993, mostrando cómo articular los sistemas conceptuales y los simbólicos con una distinción sutil pero potente: la distinción entre la representación semiótica como un sistema simbólico externo, materializado, producido por la actividad semiótica, y el registro semiótico de representación como sistema productor de representaciones semióticas materializadas, así sean efímeras.

Esa distinción permite otra muy potente también: el trabajo de transformación de una representación semiótica particular a otra del mismo registro, lo que se llama "tratamiento", y la transformación de una representación semiótica particular perteneciente a un registro semiótico a otra perteneciente a otro, lo que se llama "conversión".

Otro aporte a la distinción entre modelos y teorías viene de las neurociencias. Antonio Damasio (2010) en su libro "*Self comes to mind*" (en español "*Y el cerebro creó al hombre*"), propone distinguir "mapa" como el sustrato neuronal e "imagen" como la contraparte consciente, percibida y conocida del mapa. Un caso paralelo a esta distinción cognitiva es la distinción entre "emoción" como sustrato neuronal, y "feeling" como contraparte consciente, percibida y sentida de la emoción. Así, "feeling" ya podría traducirse como "afecto" o "afección" en el sentido de "afectación subjetiva" por la emoción, en un sentido que precisa la propuesta de William James modificada por Baird (aunque me parece que es más cercana a la de Magda Arnold).[2]

Otro caso paralelo sería la excitación nerviosa aguda bioquímica y bioeléctrica como patrón fisiológico y el dolor como fenómeno psicológico. Otro sería la deprivación de nutrientes y los desequilibrios bioquímicos en los fluidos sanguíneo y linfático, y el hambre como fenómeno mental experimentado por la persona que lo sufre. Para precisar lo que entendemos por modelo mental tenemos pues que tener en cuenta esta idea de Damasio de distinguir el mapa de la imagen, el primero como configuración materializada y el otro como fenómeno mental percibido por un agente consciente.

En metodología de la investigación, el mapa correspondería a los modelos materiales como prototipos o como facsímiles y a sus contrapartes neuronales, y la imagen correspondería a los modelos mentales como fenómenos de la conciencia. El mapa correspondería a las teorías escritas con sus axiomas, definiciones, demostraciones y teoremas y sus contrapartidas neuronales, y la imagen a las teorías mentales como habla silenciosa o subvocal en lo que un agente-hablante experimenta como discurso interior.

En geometría, puede pensarse en la figura como dibujo en cuanto mapa, y la figura como modelo mental o imagen mental, y así la expresión "razonar sobre la figura" tendría ahora una doble interpretación: sobre el dibujo como mapa o sobre el modelo mental como imagen, y ambos tipos de razonamiento se diferencian de "razonar en la teoría", guiándose o no por el modelo o por el dibujo ("con la figura" o "sin la figura"). Esto amplía y precisa la distinción ya muy útil entre figura y construcción en geometría dinámica computacional; la distinción entre figura y dibujo en la didáctica de la geometría, y entre "razonar con la figura" y "razonar sobre la figura" en la geometría euclidiana usual.

Suele haber múltiples desfases y discrepancias entre la teoría y el modelo (por ejemplo, lo que designo como "una recta" en mi modelo mental no puede carecer de ancho

[2] Es conveniente estudiar a este respecto el libro de Antanas Mockus (1988), Representar y disponer. Toda la tetralogía de Antonio Damasio ha sido para mí una guía en la teorización de estos temas de la representación, la cognición y la emoción en el Doctorado en Ciencias Sociales, Niñez y Juventud de la Universidad de Manizales y el Cinde. Los cuatro libros son:
"Self comes to mind" (2010). En español: Y el cerebro creó al hombre (2010).
"Looking for Spinoza" (2003). En busca de Spinoza (2005).
"The feeling of what happens" (1999). El sentimiento de lo que sucede (2000).
"Descartes' error" (1994). El error de Descartes (1999).

o espesor, pues no sería perceptible) y entre el modelo mental y el modelo materializado (una recta del modelo mental puede aparecer con ligeras desviaciones en el modelo materializado o dibujo). Esto precisa lo que todo profesor de geometría ha sabido desde siempre: se trata de demostrar teoremas rigurosos con la ayuda de figuras que no pueden cumplirlos. Pero todavía no hemos mencionado la relación de todo esto con lo real, la realidad o mi realidad.

Adelanto ahora una primera sugerencia metodológica: al "echar teorías", no dejemos de mirar por el rabillo del ojo al modelo y, de vez en cuando, hagamos el esfuerzo de enfocar la mirada sobre el morfismo de interpretación para jugar con diferentes interpretaciones.

La segunda sugerencia metodológica es paralela a la primera: al "jugar con el modelo", hagamos el esfuerzo de refrenar la verbalización espontánea para producir proposiciones formalizables y así poder, de vez en cuando, enfocar la mirada sobre el morfismo de interpretación para ensayar diferentes expresiones.

Ahora ya podemos precisar la diferencia entre modelo y sistema, pero esta distinción requiere la categoría *representar*. Todo modelo es un sistema utilizado por un agente para representar otro subproceso u otro sistema, pero no todo sistema es un modelo (aunque podría llegar a serlo si un agente lo utiliza para representar algún subproceso o sistema). La diferencia está en el propósito con el que se construye el sistema: un modelo se construye para representar a otro sistema o proceso.

Representar no se reduce a ser una imagen de otro, sino que puede incluir muchas otras maneras de actuar en lugar de otro, de prestarse a servir de sustituto de otro, de fungir en vez de otro.

"Representar" tiene direcciones y sentidos diferentes cuando el agente detiene momentáneamente su actividad para tratar de expresar algo intramental "hacia afuera", y produce una representación externa materializada (así sea efímera), y cuando trata de interpretar una representación externa materializada para reorientar su actividad con representaciones internas logradas "hacia adentro".

Para diferenciar esos dos sentidos (en el doble sentido de "sentido", en el campo semiótico y en el campo de la física del movimiento) voy a utilizar "expresar" en el sentido "hacia afuera" e "interpretar" en el sentido "hacia adentro". Al primero lo llamo "semiosis proyectiva" o "expresiva", y podría llamarse "proceso noético-semiótico" en ese orden; al segundo lo llamo "semiosis inyectiva" o "interpretativa", y podría llamarse "proceso semiótico-noético" en ese orden si quisiéramos insistir en el cambio de sentido.

Pero como esos cambios de sentido son muy frecuentes y cíclicos, es mejor no cambiar el orden, sino hablar de perturbaciones de la actividad noético-semiótica, la cual prosigue sin cesar, aun durante el sueño, como lo muestra la rápida reinterpretación onírica de los primeros sonidos del reloj despertador.

Perturbaciones noético-semióticas

El hecho de que en el flujo de la conciencia lo noético y lo semiótico siempre vayan juntos no quiere decir que no sean diferentes. La actividad neuronal cortical y subcortical que en el nivel conciente llamamos "pensar" precede, se desvía y se transforma con las semiosis proyectivas y se guía por ellas a la vez que busca nuevas formas de expresión al no encontrar recursos semióticos ya preexistentes en la cultura.

Hay pues unos modelos mentales ("aquí adentro") y otros extramentales ("allá afuera"). Hay unos que son facsímiles, otros que son prototipos y otros que son ambas cosas. Los facsímiles se diseñan para representar subprocesos semejantes a ellos (en la dirección del pasado hacia el presente), y los prototipos para iniciar subprocesos semejantes a ellos (en la dirección del presente hacia el futuro). Un modelo determinado puede tener ambas funciones en distintos momentos.

Modelos y sistemas

Como todo modelo es un sistema, podemos precisar tres aspectos que tiene todo modelo: son los tres aspectos que la Teoría General de Sistemas TGS propone para todo sistema: el sustrato, la dinámica y la estructura.

El *sustrato* es el conjunto de componentes que seleccionamos y recortamos del trasfondo o campo subyacente, llamado en inglés "background". La *dinámica* es el conjunto de operaciones, transformaciones o transiciones que construimos mentalmente para reparar los cortes y congelamientos temporales y recuperar el dinamismo de los procesos. La *estructura* es el conjunto de relaciones que construimos mentalmente para reparar los cortes espaciales y recuperar la interconexión entre los componentes que recortamos.

Con la precisión de los tres aspectos que tiene todo sistema, podríamos describir más detalladamente un modelo mental como un sistema que construimos para representar un subproceso en el que desagregamos, desglosamos, cortamos, recortamos o diseccionamos algunos componentes o elementos, e intentamos reparar los cortes, in-cisiones o de-cisiones por medio de relaciones, correspondencias, nexos, conexiones, lazos, enlaces ("links") o referencias entre ellos. Este sería un modelo con sustrato y estructura, pero sin dinámica, que llamamos "modelo estático". Si además tratamos de modelar las acciones y actividades a través de operaciones o transformaciones mentales, tendríamos un modelo con sustrato, dinámica y estructura, que llamamos "modelo dinámico".

Estas consideraciones permiten precisar la diferencia entre un sistema estático y un sistema dinámico, utilícese o no como modelo. Así puede develarse el abuso de la expresión "sistema dinámico" en ciertos discursos que quieren valorizarse por el uso impreciso y engañoso de la teoría matemática de los sistemas dinámicos.

La consecuencia central de lo anterior para la metodología de la investigación es que todo proyecto de investigación tiene como propósito crear o modificar un modelo mental del subproceso investigado con una teoría que lo precise y refine en cuanto a la explicitación discursiva del sustrato, la estructura y la dinámica de ese modelo.

En síntesis, un modelo M es un sistema en el cual se va a interpretar una teoría:

$M = (\mathrm{Comp}, \mathrm{Op}, \mathrm{Rel}) = (C, \Omega, R) = (S, D, E)$.

Comp = C es el conjunto de componentes o el sustrato S, Op = Ω es el conjunto de operaciones o la dinámica D, y Rel = R es el conjunto de relaciones del modelo o su estructura E.

Lenguajes y teorías

Desde la Teoría General de Procesos TGP, lenguajear es sólo un tipo de subproceso, una cierto tipo de acción o actividad de algunos actores; no puede pues agotar todas sus acciones o actividades ni las de todos los actores (Vasco, 1995).

Lo real incluye por supuesto los actores que lenguajean y cada modelo mental va siempre acompañado por lenguaje y se reconfigura constantemente por el lenguaje y por el intento de recordarlo, comunicarlo, describirlo y refinarlo. No todo lenguaje es articulado, y hay lenguajes más apropiados para expresar, comunicar y refinar modelos que otros, así como hay lenguajes más apropiados para expresar, comunicar y refinar teorías sobre los modelos.

Al subconjunto de proposiciones de un lenguaje articulado (que llamaremos "chomskiano") que acompaña al modelo lo llamamos "su teoría". Se suele considerar como teoría no sólo el subconjunto sino un sistema de fórmulas con operaciones de transformación de fórmulas y al menos una relación de implicación entre fórmulas.

Un lenguaje L es articulado si tiene símbolos diferentes para términos, predicados y proposiciones o fórmulas, y es chomskiano si todas sus proposiciones o fórmulas básicas se generan por aplicación de un predicado a uno más términos.

Un lenguaje articulado L es un sistema:

L = (Term, Pred, Form; Op; Rel) = (T, P, F; Ω; R)

Las operaciones sobre proposiciones son las conectivas y los cuantificadores:

Ω = Conect È Cuant.

Las relaciones entre proposiciones deben tener al menos una relación binaria de inferencia |— ("de … se deduce …"):

Rel = { |— }.

El lenguaje articulado es chomskiano si las proposiciones o fórmulas atómicas o básicas Bas se obtienen por aplicación de los predicados Pred a los términos Term:

Bas = gen[Pred](Term).

Los predicados unarios o monádicos se aplican a un solo término: $P_1(t)$.

Los predicados n-arios o n-ádicos a n términos: $P_2(t_1, t_2)$, … , $P_n(t_1, t_2, …, t_n)$.

Esta exigencia de generación de todas las proposiciones atómicas o básicas por la aplicación de los predicados a los términos podríamos llamarla "El axioma de Chomsky", pues bastaría recordar que en los lenguajes naturales los sintagmas nominales corresponden a los términos de los lenguajes formales y los sintagmas verbales (mejor llamados "sintagmas predicales") corresponden a los predicados.

Si se hace un análisis paralelo sobre los términos y se distinguen los términos atómicos (constantes y variables) de los moleculares (obtenidos de los atómicos por aplicación de operadores), se ve la necesidad de introducir en los lenguajes naturales la distinción entre sintagmas nominales simples y compuestos, siendo los segundos la aplicación de sintagmas transductores a sintagmas nominales simples (ver Vasco, 2000).

Las proposiciones o fórmulas moleculares Prop (o Form) del lenguaje L se obtienen por aplicación de las operaciones Ω (conectivas y cuantificadores) a las proposiciones atómicas o básicas Bas:

Prop = Form = gen[Ω](Bas).

A veces se entiende el lenguaje L como un sistema con tres tipos de elementos:

L = (Term, Pred, Form; Op; Rel).

A veces se reduce el lenguaje a las proposiciones moleculares Prop = Form:

L = (Form, Op, Rel) = (P, Ω, R).

A veces se identifican L = P = Prop = F = Form.

Para precisar qué es una teoría, se selecciona un subconjunto S de las proposiciones o fórmulas de un lenguaje articulado L:

S = Subprop Ì Prop

Una teoría T es un sistema cuyo sustrato es un subconjunto S de proposiciones o fórmulas, su dinámica tiene al menos una operación binaria de conjunción y al menos una relación binaria de implicación:

T = (Subprop, Subop, Rel) = (S, Ù, |—).

A veces se reduce la teoría al sistema con la relación de implicación:

T = (S, |—),

y a veces se identifica la teoría sólo con el subconjunto de proposiciones o fórmulas:

T = S.

Considero la teoría T como un subconjunto de proposiciones de un lenguaje articulado chomskiano, las cuales, si están ya formalizadas se suelen llamar "fórmulas bien formadas" ("wff's") o simplemente "fórmulas", ya sea con operaciones que incluyen la conjunción, o también con relaciones que incluyen la implicación sintáctica.

Como contraste con los lenguajes articulados no chomskianos, piénsese paralelamente en la teoría verbalizada respecto a un modelo mental y en la escritura musical de una melodía que surge en el cerebro, con los doce semitonos como digitalizaciones de sonidos de un continuo ("pasar de la rampa a la escala"), y con la notación musical en una partitura; las llamadas "frases musicales" no representan ni términos ni predicados, y sólo pueden superponerse en la armonía o yuxtaponerse en la ejecución ("componer" = "superponer" + "yuxtaponer"). No conforman pues un lenguaje articulado chomskiano.

Por eso, el morfismo de interpretación va de los signos de la teoría hacia los componentes, operaciones y relaciones del modelo, pero no es suficiente por sí solo para explicar el proceso (más bien lingüístico) de creación de nuevos términos, transductores o predicados (fórmulas), y menos todavía para el proceso (más bien artístico) de producción de nuevas formas expresivas para plasmar en forma materializada los modelos mentales todavía no verbalizados (con frecuencia ni siquiera verbalizables en lenguajes articulados).

El proceso noético-semiótico de cambiar la terminología e inventar nuevas formulaciones para intentar fijar, comunicar y cuestionar conceptualizaciones requiere modelos más complejos y cíclicos, con fases de exploración, ensayos de expresión, modificaciones de los morfismos de interpretación previos, pruebas ("puestas-a-prueba") de esos morfismo de interpretación recién modificados, simulaciones de comunicación externa (así parezcan sólo internas por desdoblamientos alternantes del sujeto fenomenológico), materializaciones con distintos medios, recursos y perturbaciones de los registros semióticos previamente utilizados y otros recursos y rodeos. Aquí es donde la posibilidad de escribir los nuevos términos, transductores y predicados y de diagramar los nuevos modelos permite una objetivación de estos procesos noético-semióticos.

En síntesis, los modelos son sistemas no lingüísticos que configuramos para representar subprocesos. Las teorías son sistemas lingüísticos que configuramos para hablar sobre nuestros modelos. Los modelos son imaginados. Las teorías son lenguajeadas. Los modelos son análogos. Las teorías son digitales.

La teoría de cada modelo tiene unos aspectos más descriptivos con los que cada uno de nosotros trata de precisarse a sí mismo y de comunicar a otros su propia construcción mental y otros más explicativos y prescriptivos con los que precisamos, delimitamos, restringimos, extendemos o potenciamos el modelo. Los aspectos más descriptivos se van configurando con una cierta independencia hasta permitir que el mismo modelo pueda servir de interpretación para varias teorías y los aspectos explicativos y prescriptivos se van configurando con cierta independencia hasta permitir que la misma teoría se pueda interpretar en varios modelos.

El morfismo de interpretación

Ahora es necesario reflexionar sobre las formas de relacionar las teorías con los modelos. Ya insinuamos la idea básica al respecto, que es la de *morfismo de interpretación*, que tiene que ser triple: debe permitir interpretar los términos, los transductores u operadores y los predicados o relatores.

Podría sustituirse la pareja *modelo/teoría* por la tríada *modelo/teoría/morfismo de interpretación*.

En la pareja *modelo/sistema*, el constructo más abstracto es el de sistema, como agregado mental de tres aspectos: un conjunto de componentes o elementos (sustrato), un conjunto de operaciones o transformaciones mentales (dinámica) y un conjunto de relaciones o nexos (estructura).

Como recopilación de lo anterior, recuérdese que inicialmente se habló de los modelos como construcciones mentales. Lo mismo sucedió con los sistemas. Aun lo que parece ser un sistema "allá afuera", extramental, es un proceso que nos parece fácilmente modelable, generalmente porque fue construido por otros o por nosotros mismos. En la TGP los sistemas son herramientas mentales que utilizamos para vérnoslas con los procesos: la actividad de los agentes se reduce a evitar, desviar, frenar, mantener o acelerar subprocesos, directa o indirectamente.

Terminemos esta sección con un estudio de caso. Hilbert analiza la lógica de las demostraciones euclidianas y logra formular axiomas que capturan toda la geometría plana euclidiana. Pero sólo puede hacerlo "mirando por el rabillo del ojo" al modelo euclidiano en su imaginación. Por ejemplo, los axiomas de dimensión no se podrían seleccionar, como lo muestro en el artículo sobre la cronotopía. Algo parecido sucede con el intento de formular teoría sobre el ángulo. Tiene que mirar de reojo al modelo y formular teoría, que le queda mal en cuanto a distintas maneras de precisar el morfismo de interpretación.

El juego de definiciones permite experimentar la articulación de los modelos mentales y las teorías por el morfismo de interpretación. En los artículos sobre la Cronotopía mencioné las definiciones de cuadrado, como aquella que llamé “la definición 4-3-2”: “Un cuadrado es un polígono de cuatro lados, al menos tres de ellos iguales, que forman al menos dos ángulos rectos” (Vasco, 2006, vol. 1, p. 18)

Si se quiere agregar otro acertijo para el juego de definiciones con modelos, teorías y morfismos de interpretación, piénsese un poco en mi definición preferida de triángulo: “Un triángulo es una partición del plano en siete regiones lograda con tres cortes rectos”. Es útil detenerse un momento y ensayar con tres cortes rectos paralelos (se forman cuatro regiones), dos paralelos y una recta secante (seis regiones), tres cortes por rectas concurrentes (seis regiones), y…

Los talleres de modelos y teorías

1. El primer taller podría ser el de la aritmo-geometría pitagórica. Retrocedamos 2600 años en el tiempo y pensemos en Pitágoras tratando de enseñar a un grupo de jóvenes novicios, los “akusmáticos”, lo que había aprendido de las matemáticas en Mesopotamia y Egipto. Comenzaba con un bastón de punta afilada con el que hacía huecos y trazos en la arcilla o la arena de Crotona en el sur de Italia.

Comenzaba así:

. :   .˙.   : :   ...

¿Es aritmética o geometría? Estamos antes de cualquier distinción entre ellas.

Si usted ve una sucesión, es porque lee de izquierda a derecha. Y si cree que es una sucesión como función de N hacia un espacio X, ¿qué espacio es X? Y, ¿qué es N? Al menos no empieza por cero. ¿Son los números naturales, o son instancias de ellos, o son símbolos de ellos? Estamos todavía antes de los números naturales o enteros.

¿Dónde están los segmentos que los unen? ¿Y por que no las rectas que pasan por ellos? Hay una teoría que se queda sólo en enunciar propiedades de las parejas, ternas, etc. de puntos; otra que además enuncia propiedades de los segmentos entre parejas de puntos, y otra que además enuncia propiedades de las rectas determinadas por parejas de puntos.

Esta última da lugar a la geometría proyectiva que llamo “temporalizada” (“timed”), porque en los segundos pares produce puntos y en los impares rectas que pasan por los puntos producidos en el momento anterior. Por ejemplo, la teoría de los cuadriláteros comienza con el cuadrivértice en el segundo 0, luego con seis rectas en el segundo uno, luego aparecen tres puntos más en el segundo 2, luego aparece la diagonal externa y dos rectas más que pasan por el centro, etc.

Eso es claro en el modelo, pero no ha sido enunciado como teoría. Mirando por el rabillo del ojo al modelo, se puede empezar inmediatamente a formular proposiciones de la teoría.

2. El segundo taller es el que yo llamo irónicamente "La recta (¿?) numérica". Nos parece natural que los números naturales se modelen mentalmente en una recta numérica. Robbie Case y Juan Pascual-Leone propusieron la teoría de que los niños necesitan el modelo de la recta numérica para dominar los números naturales. Pero al estudiar la aritmética en preescolar y primaria creo poder asegurar que hay muchas dificultades en esa teoría.

La primera no es muy grave: puedo afirmar que no se trata de una recta sino de una semirrecta, y que no necesariamente es horizontal, y si lo es, culturalmente el origen estaría a la izquierda en nuestras culturas y a la derecha en los árabes e israelíes.

La segunda es que he podido comprobar que hay al menos dos modelos de semirrecta numérica horizontal de izquierda a derecha: la de los niños comienza con segmentos aproximadamente iguales de largos, con o sin marcas verticales que los separen, y los números se marcan o se cuentan sobre los segmentos:

_1_ _2_ _3_ …

La de los maestros comienza con un trazo vertical debajo del cual los maestros escriben el cero, luego otro con el uno debajo, etc.

La primera no sirve para contar, pero sí sirve para modelar el tiempo: los siglos primero, segundo, etc. después de Cristo; el primero, segundo, etc. año de vida; el primero, segundo, etc. día de la semana; la primera, segunda, etc. hora del día, etc.

Parece que este modelo fue el que usó Descartes cuando inventó la geometría analítica.

La segunda es la preferida de los matemáticos.

Pero el modelo mejor es el que llamo "la semifila numérica de bolitas".

• • • • …

Ese sí sirve, porque en nuestra cultura empieza por el primero, el segundo, el tercero, que antes se llamaban "números ordinales", hasta que los matemáticos los cambiaron por lo ordinales de Cantor que no son los mismos.

Ese modelo es más apropiado para contar la cardinalidad de colecciones discretas, y sirve también como el sistema más sencillo de numeración:

•, ••, •••, •••• …

Este sistema de la semifila numérica de bolitas es claramente isomorfo con el modelo de la semifila numérica de barritas

| | | | …

Esta semifila produce los numerales I, II, III, IIII, etc. Los hemos visto que perduran al menos durante toda la primaria y hasta en jóvenes y adultos para los juegos y notaciones deportivas y cotidianas, tal vez con una tachadura de las cuatro primeras barritas para el número cinco.

Aquí el modelo mental tiene una estructura dada no sólo por el orden de izquierda a derecha, sino por la alineación o colinealidad.

La colinealidad expresa propiedades del espacio mental generado por el cerebro, que no es espacial en el mismo sentido que el espacio del movimiento cotidiano. El último estudio que conozco sobre esto es el de Izarda, Picad, Spelke y Dehane sobre los niños Mundurucú en el Amazonas (Izarda, et al. 2011). Estos niños se desempeñan tan bien en temas de geometría euclidiana sin ninguna escolaridad formal como adultos y niños europeos. Un ejemplo de pregunta es. Imagínese una recta que corta una de las dos rectas de una pareja de rectas paralelas; si prolonga la que corta la una, ¿corta la otra?

3. El tercer taller ejercita al tallerista en efectuar mentalmente el paso del modelo del disco plano de Poincaré al disco de Klein por medio de la proyección estereográfica al modelo esférico seguida de la proyección vertical para bajar al de Klein.

Luego se ejercita el paso al modelo del semiplano de Poincaré por proyección desde otro polo. Así se pueden inventar otros modelos, como el modelo parabólico de Minkowski, el modelo cónico y el modelo plano hiperbólico.

4. Otro taller se inicia a la manera usual de entender las superficies de Riemann en análisis complejo, y enseña a comparar la esfera de Riemann con el modelo hemisférico de Poincaré: si se dobla el ángulo, parece igual al de Riemann, por el simple teorema del ángulo central y el ángulo inscrito.

5. Un taller muy ilustrativo de la distinción entre modelo y teoría es el que enseña a visualizar la dualidad de la geometría proyectiva por la idea del trompo (no en el sentido usual del trompo de cuerda sino del giróscopo).

6. Diseñé otros talleres muy divertidos que llamé “de las geometrías de la Tierra por dentro” y “de la Tierra por fuera”, para compararlas con la geometría elíptica de Riemann. Pude lograr un resultado inesperado: la geometría de Riemann en la esfera no es no-euclidiana por el quinto postulado de Euclides, pero si se toma el quinto postulado con el enunciado de Playfair, sí es no-euclidiana.

En estos talleres se puede modelar mentalmente el punto como disco y la línea como segmento diametral; el punto como segmento diametral y la línea como disco; el punto como bipunto y la línea como círculo maximal en la esfera, y viceversa; el punto como recta y la línea como plano, y viceversa; el punto como semirrecta sobre el plano horizontal y la línea como semiplano menos una semirrecta del borde, y viceversa; el punto como segmento radial y la línea como semidisco menos un radio, y viceversa; el punto como punto y la línea como semicírculo semiabierto en la semiesfera con medio ecuador, y viceversa. Basta una sola teoría e ir cambiando el morfismo de interpretación. La mirada al modelo por el rabillo del ojo permite corregir el lenguaje y descartar los no-teoremas.

La distinción entre modelos y teorías permite la exploración de los puntos orientados (hacia adentro o hacia afuera) y las líneas orientadas; se hace girar el trompo y la regla de la mano derecha y la doble cubierta de la esfera y las representaciones de los grupos de Lie.

La extensión del trompo de tres a cuatro dimensiones puede hacerse de dos maneras. La primera es considerar el segmento que imaginamos como eje del trompo como la sombra o proyección de otro disco ortogonal al visible en un espacio de cuatro dimensiones. Es el trompo simétrico, que podría llevar al análisis de dos variables complejas.

La segunda manera es considerar el disco que imaginamos como la sombra o proyección de una bola tridimensional en un espacio de cuatro dimensiones. Es el trompo asimétrico, que podría llevar al análisis cuaterniónico.

Conclusión

Piénsese finalmente en la dualidad de la mano derecha y la mano izquierda; claramente las distinguimos con nuestra imagen mental corporal, pero esa dualidad no se deja capturar por ninguna teoría formal. La regla de la mano derecha en física es claramente discernible de la de la mano izquierda si hay un modelo mental tridimensional en el que se ubique un modelo mental del agente, con un morfismo preciso de interpretación; tiene una ventaja sobre otros modelos: se puede proyectar sobre las dos esquinas del salón de clase.

Lo mismo puede decirse de la dualidad "arriba y abajo". No hay teoría que las distinga; más bien, cualquier teoría puede inducir a errores por la pulsión a interpretarla inadecuadamente, como al hablar de "base" y "altura" en un triángulo, etc. Un triángulo equilátero que "descansa" sobre la punta no parece ser triángulo para los niños, quienes prefieren llamarlo "flecha".

Un último ejemplo: el teorema de Desargues en el plano dice que si dos triángulos son perspectivos desde un punto, lo son desde una línea. El modelo tridimensional muestra que eso tiene que ser así, por tratarse de una pirámide con base en el triángulo de mayor área, con el otro triángulo producido por un corte de la pirámide por un plano; pero la sola teoría en el plano no permite demostrarlo directamente.

La teoría muestra que el antecedente y el consecuente del teorema de Desargues son duales: dos tripuntos producen por las parejas de vértices homólogos tres líneas concurrentes si y sólo si dos triláteros producen por las parejas de lados homólogos tres puntos colineales. Si la geometría proyectiva plana es autodual, ambas proposiciones tienen que ser verdaderas o ambas falsas. Eso es lo que dice el teorema… Todo esto puede hacerse con el solo tratamiento de la teoría una vez formulada en lenguaje técnico formalizable. No hace falta saber cómo se va a fijar el morfismo de interpretación. No hace falta modelo ni demostración directa.

Con estos talleres y ejemplos, espero no necesitar más motivación para convencer a lectores y auditores de la conveniencia, la productividad y la diversión inagotable de jugar a la Cronotopía con la distinción explícita entre modelos, teorías y morfismos de interpretación.

Referencias

Chang, C. C., and Keisler, H. J. (1973). *Model theory*. Amsterdam: North-Holland.

Damasio, A. (2010). *Self comes to mind. Constructing the conscious brain*. New York: Random House/Pantheon Books. (Obra publicada simultáneamente en español: *Y el cerebro creó al hombre*. Barcelona: Destino).

Duval, R. (2004). *Semiosis y Pensamiento Humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. (2a. ed. Trad. Myriam Vega Restrepo). Cali: Peter Lang/Universidad del Valle. [Original: Sémiosis et pensée humaine. Bern: Peter Lang, 1995; primera edición en español: Universidad del Valle, 1999].

Izarda, V., Picad, P., Spelke, E. S., and Dehaene, S. (2011). Flexible intuitions of Euclidean geometry in an Amazonian indigene group. *PNAS Online*-Early Edition. Disponible en el URL

http://www.pnas.org/content/early/2011/05/18/1016686108.full.pdf

Mockus, A. (1988). *Representar y disponer*. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia-Centro Editorial.

Vasco, C. E. (2011). La cronotopía, antes y después de la geometría. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática* (Costa Rica), año 6, n. 9, 77-91. ISSN 1659-2573. Disponible en el URL:

http://www.cimm.ucr.ac.cr/ojs/index.php/CIFEM/article/view/681

Vasco, C. E. (2007a). La cronotopìa o la matematica dello spazio-tempo, prima e dopo la metrica. *La Matematica e la sua Didattica* (Bologna), *21*(4), 455-470. ISSN 1120-9968.

Vasco, C. E. (2007b). La cronotopìa o la matematica dello spazio-tempo, prima e dopo la metrica. En: B. D'Amore e S. Sbaragli (Eds.), *Allievi, insegnanti, sapere: La sfida della didattica della matematica* (Incontri con la matematica, n. 21. Comune di Castel S. Pietro Terme, 2-3-4 Novembre 2007, pp. 71-79). Bologna: Pitagora Editrice. ISBN 88-371-1702-7.

Vasco, C. E. (2006). Cronotopía: Un "Programa de Bogotá" para lo que se suele llamar "Geometría". En: C. Ruiz et al. (Eds.), *Memorias: XVI Encuentro de Geometría y sus aplicaciones - IV Encuentro de Aritmética* (Bogotá, Junio 23-24-25 de 2005, vol. 1, pp. 1-28). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional. ISBN 19628040 (2 vols., 724 pp.).

Vasco, C. E. (2000). Una teorización cognitiva acerca de la diferencia entre conceptos predicativos o relacionales y conceptos operativos o funcionales. En: J. J. Botero, J. Ramos y A. Rosas (Comps.), *Mentes reales: La ciencia cognitiva y la naturalización de la mente* (pp. 183-202). Bogotá: Siglo del Hombre/Universidad Nacional de Colombia.

Vasco, C. E. (1995). La teoría general de procesos y sistemas. En: Misión Ciencia, Educación y Desarrollo. *Educación para el Desarrollo* (Informes de Comisionados I. Colección Documentos de la Misión, Tomo 2, pp. 377-652). Santafé de Bogotá: Presidencia de la República–Consejería Presidencial para el Desarrollo Institucional-Colciencias. (Con la colaboración de Hernán Escobedo, Teresa León y Juan Carlos Negret).

Vasco, C. E. (1991). Conjuntos, estructuras y sistemas. *Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, 18*(69), 211-223.

Vasco, C. E. (1980). El concepto de sistema como clave del currículo de matemática. *Notas de Matemática* (Universidad Nacional de Colombia), n. 10, 1-14.