XIII CONFERENCIA INTERAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
CIAEM 2011
26 - 30 Junio, 2011
Recife, Brasil
50 años del Comité Interamericano de Educación Matemática

Resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales mediante diagonalización de matrices

Angélica R. **Arnulfo**
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura – Universidad Nacional de Rosario
Argentina
aarnulfo@fceia.unr.edu.ar
Cintia G. **Cianciardo**
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura – Universidad Nacional de Rosario
Argentina
cintiac@fceia.unr.edu.ar
Marina **Morzán**
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura – Universidad Nacional de Rosario
Argentina
morzan@fceia.unr.edu.ar
José A. **Semitiel**
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura – Universidad Nacional de Rosario
Argentina
semitiel@fceia.unr.edu.ar

Resumen

El presente trabajo, es una propuesta de enseñanza diseñada para alumnos de Análisis Matemático III de las carreras de Ingeniería de la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura de la UNR. En dicha asignatura, se estudian las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias pero no se trabaja con Sistemas de Ecuaciones Diferenciales. Sin embargo, en la práctica, se necesita más de una Ecuación Diferencial para modelizar, por ejemplo, sistemas mecánicos y eléctricos. Es por esto que surge la siguiente propuesta de enseñanza cuyo propósito es además de propiciar una metodología para resolver Sistemas de Ecuaciones Diferenciales, involucrar conceptos del Álgebra Lineal como los de autovalores y autovectores y diagonalización de una matriz.

Palabras clave: sistemas de ecuaciones diferenciales, modelización matemática, autovalores y autovectores, diagonalización, articulación entre asignaturas.

Introducción

El presente trabajo, es una propuesta de enseñanza diseñada para alumnos de Análisis Matemático III (AM3) de las carreras de Ingeniería de la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura (FCEIA) de la Universidad Nacional de Rosario (UNR). Está enmarcado en el proyecto 1ING299 "*El aprendizaje de las Ecuaciones Diferenciales como herramientas de modelización en la Matemática básica para las carreras de Ingeniería*" dirigido por la Lic. Martha Fascella de la FCEIA – UNR.

En AM3, se estudian las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias pero no se trabaja con Sistemas de Ecuaciones Diferenciales. Sin embargo, en la práctica, se necesita más de una Ecuación Diferencial para formular matemáticamente diversas situaciones a las cuales el alumno se deberá enfrentar. Es por esto que surge la siguiente propuesta de enseñanza cuyo propósito es además de propiciar una metodología para resolver Sistemas de Ecuaciones Diferenciales, involucrar conceptos del Álgebra Lineal como los de autovalores y autovectores y diagonalización de una matriz.

Nuestra intención, además de tratar la articulación entre asignaturas como un modo donde los estudiantes vean la necesidad de utilizar contenidos estudiados anteriormente para poder entender nuevos conocimientos, es fomentar la modelización e incorporar, de la manera más natural posible, un contenido ausente en las Matemáticas que se dictan en la FCEIA pero que se hacen uso en otras asignaturas.

Marco Teórico

En el cursado de AM3 se ha trabajo con métodos para resolver ecuaciones diferenciales que involucran una sola variable dependiente. Sin embargo muchas aplicaciones requieren usar dos o más variables dependientes siendo cada una función de una misma variable independiente (por lo general, el tiempo). Tales problemas conducen a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.

Las Ecuaciones Diferenciales tienen una gran importancia por su carácter integrador de la Matemática. Consideramos, que es importante transferir estos conocimientos a situaciones relacionadas con áreas de interés del estudiante para que pueda utilizarlos en la solución de problemas que se le presenten durante el ejercicio de su profesión.
El Álgebra Lineal es una de las herramientas fundamentales en diversas ciencias. Originariamente dedicada a la resolución de sistemas de ecuaciones, su abstracción y formalismo la hacen a veces un poco árida de entender. Sin embargo la inmensidad de sus aplicaciones bien vale el esfuerzo.

La estrategia de resolución de problemas es mucho más rica que la aplicación mecánica de un algoritmo, pues implica crear un contexto donde los datos guarden una cierta coherencia. Para ponderar la importancia de los sistemas de ecuaciones diferenciales basta decir que con ellos se modelan sistemas físicos complejos (mecánicos y eléctricos).

La modelización es una de las áreas más atractivas de la ingeniería y las ciencias aplicadas. De hecho, los ingenieros necesitan construir modelos para resolver problemas de la vida real. El objetivo de un modelo consiste en reproducir la realidad de la forma más fiel posible, tratando de entender cómo se comporta el mundo real y obteniendo las respuestas que pueden esperarse de determinadas acciones. La selección del modelo adecuado para reproducir la realidad es una etapa crucial para obtener una solución satisfactoria a un problema real. Las estructuras matemáticas asociadas no son arbitrarias, sino una consecuencia de la realidad misma. Los modelos matemáticos proporcionan un armazón en el que se interrelacionan conceptos de diferentes ciencias y, en este sentido, la modelización se manifiesta como una importante herramienta para enseñar matemáticas y ciencia. Por otra parte, el uso de modelos puede contribuir a reafirmar conceptos básicos en la ciencia, enriqueciendo el aprendizaje.

La teoría de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias no sólo interesa al matemático, sino que es útil a cualquier ciencia que pueda expresar sus leyes en lenguaje matemático. La Física, la Química, la Biología, la Ecología y la Economía son algunos ejemplos de tales disciplinas.

Patricia Sadovsky sostiene que la modelización es un proceso que atraviesa diferentes momentos -recorte de una problemática frente a cierta realidad, identificación de un conjunto de variables pertinentes a esta problemática, producción de relaciones entre las variables tomadas en cuenta, elección de una teoría para operar sobre ellas y producir conocimiento nuevo sobre dicha problemática- relacionándolos y dando a esta actividad condiciones análogas a las que la comunidad científica realiza cuando produce matemáticamente (“modelizando” desde lo disciplinar). Esto requiere de los alumnos la toma de decisiones respecto de la pertinencia de los recursos utilizados, lo que los convierte en responsables de los resultados obtenidos, los valida y los confronta con sus pares y los hace reflexionar sobre lo realizado. Así, la clase de matemática adquiere un valor formativo que va más allá de la matemática (“modelizando” desde lo actitudinal). Dado el valor potencial de la tecnología para reforzar el aprendizaje, los alumnos pueden comprometerse con los problemas de modelización de situaciones reales y desarrollar así sus ideas y su comprensión sobre los conceptos matemáticos relacionados.

La modelización matemática como metodología de enseñanza-aprendizaje tiene como propósito no solamente hacer que los alumnos asimilen mejor el contenido matemático que se les está transmitiendo sino que, principalmente, se coloca como un procedimiento de enseñanza en que el alumno deja de ser un sujeto pasivo para ser activo en el proceso de aprendizaje. Nos basaremos en el aprendizaje significativo, que es quien sustenta la resolución de problemas, el alumno deberá retomar lo que ya sabe del Algebra Lineal y aplicarlo a la solución de Sistemas de Ecuaciones Diferenciales y así verá la utilidad de estos conceptos.

La Propuesta

Nuestra propuesta consiste en presentar, a través de un problema físico, sistemas de ecuaciones diferenciales lineales, su resolución y la conexión entre distintas áreas de la Matemática, en particular con el Álgebra Lineal. La misma, surgió básicamente por los siguientes tres motivos:

- ✓ la ausencia de este contenido en las asignaturas matemáticas de las carreras de Ingeniería de la FCEIA,
- ✓ la articulación entre asignaturas como un modo donde los estudiantes vean la necesidad de retomar contenidos anteriores para poder entender nuevos conocimientos
- ✓ la importancia de la modelización matemática de problemas

La propuesta para incorporar este contenido, será implementado en AM3 a través de guías de trabajo donde el alumno, a partir de un problema motivador (sistema masa-resorte), deberá:

- ✓ Plantear el modelo matemático que describe el sistema masa-resorte (conceptos no matemáticos vinculados al problema) como un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden.

- ✓ Expresar el sistema obtenido en otro equivalente de primer orden y dar su expresión matricial.
- ✓ Encontrar una forma para dar la solución general del sistema haciendo uso de conceptos del Álgebra lineal (autovalores, autovectores, diagonalización) y de la teoría general de los sistemas de *n* ecuaciones diferenciales lineales de primer orden.
- ✓ Resolver el problema numérico planteado.

Nuestra intención es que cada docente elabore una guía conveniente para desarrollar lo propuesto en los ítems anteriores, de modo que el alumno incorpore este nuevo contenido haciendo uso de la modelización y de las herramientas mencionadas del Álgebra Lineal.

El problema y su resolución

Dos masas m_1 y m_2 están conectadas a tres resortes ideales con constantes de resortes k_1, k_2 y k_3 como se muestran en la Figura 1:

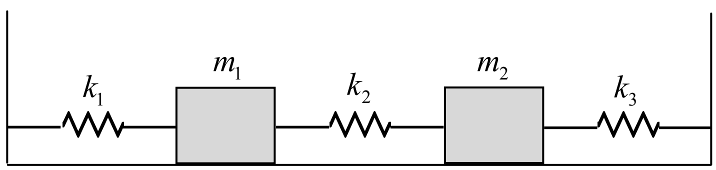

Figura 1

Sean $x_1 = x_1(t)$ y $x_2 = x_2(t)$ los desplazamientos hacia la derecha de las masas m_1 y m_2 respectivamente desde su posición de equilibrio, de modo que los tres resortes no estén estirados ni comprimidos, es decir que $x_1(0) = x_2(0) = 0$.

Halle las ecuaciones de movimiento del sistema para el caso particular en que $m_1 = m_2 = 1\,\text{kg}$, $k_1 = k_3 = 1\,\text{kg/m}$ y $k_2 = 4\,\text{kg/m}$.

Presentamos un modelo de resolución del problema motivador, para que sea tenida en cuenta por cada docente en el momento de elaborar una guía de trabajo, el cual conducirá, dado que mostraremos que la matriz asociada al sistema tiene únicamente autovalores complejos distintos, a un caso particular en cuanto a la solución general del sistema de ecuaciones diferenciales, con lo que se descartan todas las otras situaciones posibles referidas a la naturaleza de los autovalores y en consecuencia a la resolución del sistema de ecuaciones diferenciales.

A partir de la configuración mostrada en la *Figura* 1, aplicamos la ley de movimiento de Newton a los dos diagramas de cuerpos libres que se aprecian en la *Figura* 2.

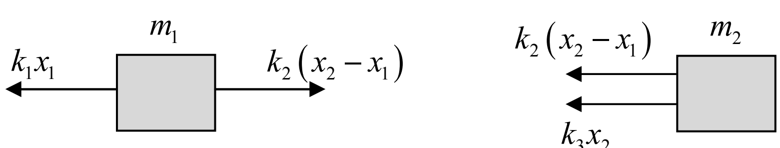

Figura 2

Con ello obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} m_1 x_1'' = -k_1 x_1 + k_2 \left(x_2 - x_1\right) \\ m_2 x_2'' = -k_2 \left(x_2 - x_1\right) - k_3 x_2 \end{cases} \tag{1}$$

o equivalentemente:

$$\begin{cases} x_1'' = -\dfrac{k_1 + k_2}{m_1} x_1 + \dfrac{k_2}{m_1} x_2 \\ x_2'' = \dfrac{k_2}{m_2} x_1 - \dfrac{k_3 + k_2}{m_2} x_2 \end{cases} \tag{2}$$

Mediante las sustituciones: $y_1 = x_1$, $y_2 = x_1'$, $y_3 = x_2$ y $y_4 = x_2'$, transformamos el sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden (2), en el siguiente sistema equivalente de primer orden:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -\dfrac{k_1 + k_2}{m_1} y_1 + \dfrac{k_2}{m_1} y_3 \\ y_3' = y_4 \\ y_4' = \dfrac{k_2}{m_2} y_1 - \dfrac{k_3 + k_2}{m_2} y_3 \end{cases} \tag{3}$$

Llamando $a = -\dfrac{k_1 + k_2}{m_1}$, $b = \dfrac{k_2}{m_1}$, $c = \dfrac{k_2}{m_2}$ y $d = -\dfrac{k_3 + k_2}{m_2}$, el sistema (3) puede expresarse matricialmente de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \\ y_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ c & 0 & d & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \tag{4}$$

o equivalentemente:

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\,\mathbf{y} \tag{5}$$

donde $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ c & 0 & d & 0 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$.

La teoría general de sistemas de *n* ecuaciones diferenciales lineales de primer orden está estrechamente vinculada a la teoría de ecuaciones diferenciales lineales de orden *n*. Por consiguiente, para obtener la solución general de (5), propongamos como solución:

$$\mathbf{y}(t)=\mathbf{v}\,e^{\lambda t}\ ,\quad \text{con } \lambda\in\mathbf{C} \tag{6}$$

derivando (6) obtenemos:

$$\mathbf{y}'(t)=\mathbf{v}\,\lambda\,e^{\lambda t} \tag{7}$$

sustituyendo (6) y (7) en (5) resulta:

$$\mathbf{v}\lambda\,e^{\lambda t}=\mathbf{A}\,\mathbf{v}\,e^{\lambda t}\ \Leftrightarrow\ \mathbf{A}\,\mathbf{v}=\lambda\,\mathbf{v}$$

Si $\mathbf{v}\neq\mathbf{0}$, λ es autovalor de la matriz **A** y $\mathbf{v}$ es el autovector correspondiente a λ. Recíprocamente, si λ es autovalor de **A** y $\mathbf{v}$ su correspondiente autovector, la función dada por $\mathbf{y}(t)=\mathbf{v}\,e^{\lambda t}$ es solución de (5).

De lo dicho anteriormente, para resolver (5), y por consecuencia (1), bastará con encontrar los autovalores y autovectores correspondientes a la matriz $\mathbf{A}$.

Luego, tendremos que λ es autovalor de **A** si se verifica la ecuación característica:

$$\det\left(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}\right)=0 \tag{8}$$

En nuestro caso se trata de la ecuación:

$$\lambda^4-\left(a+d\right)\lambda^2+\left(ad-bc\right)=0 \tag{9}$$

Esta ecuación tiene cuatro raíces complejas contadas de acuerdo a su multiplicidad y ninguna de ellas nula, es del tipo bicuadrática por lo que para resolverla, efectuamos la sustitución $z=\lambda^2$, obteniendo la ecuación cuadrática:

$$z^2-\left(a+d\right)z+\left(ad-bc\right)=0 \tag{10}$$

Los coeficientes de la ecuación (10) son:

$$-\left(a+d\right)=\frac{k_1+k_2}{m_1}+\frac{k_3+k_2}{m_2}>0$$

$$ad-bc=\frac{\left(k_1+k_2\right)\left(k_3+k_2\right)}{m_1\,m_2}-\frac{k_2{}^2}{m_1\,m_2}=\frac{k_1k_3+k_1k_2+k_2k_3}{m_1\,m_2}>0$$

Como todos los coeficientes de (10) son positivos, la ecuación no tendrá raíces positivas. Sus soluciones vienen dadas por:

$$z_1=\frac{\left(a+d\right)+\sqrt{\left(a-d\right)^2+4cb}}{2}\quad \text{y}\quad z_2=\frac{\left(a+d\right)-\sqrt{\left(a-d\right)^2+4cb}}{2} \tag{11}$$

Dado que $a<0$, $d<0$, $b>0$ y $c>0$ (porque son valores que dependen de las constantes de los resortes y de las masas de los cuerpos) resultará siempre $\left(a-d\right)^2+4cb>0$ por lo que z_1 y z_2 nunca serán raíces complejas.

Entonces z_1 y z_2 serán soluciones reales negativas y distintas de la ecuación (10), por lo que resultará que la ecuación (9) tendrá dos pares de raíces complejas conjugadas. Sean $\lambda_1=p+iq$,

$\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = p - iq$, $\lambda_3 = r + is$ y $\lambda_4 = \overline{\lambda_3} = r - is$ las cuatro soluciones de la ecuación (9), las que serán los autovalores de **A**.

Es fácil probar que si $\mathbf{v}_1 = \mathbf{a} + i\,\mathbf{b}$ es un autovector complejo asociado al autovalor λ_1, entonces $\mathbf{v}_2 = \overline{\mathbf{v}_1} = \mathbf{a} - i\,\mathbf{b}$ es un autovector complejo asociado al autovalor $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$.

Análogamente $\mathbf{v}_3 = \mathbf{c} + i\,\mathbf{d}$ y $\mathbf{v}_4 = \overline{\mathbf{v}_3} = \mathbf{c} - i\,\mathbf{d}$ son autovectores complejos asociados a los autovalores λ_3 y $\lambda_4 = \overline{\lambda_3}$, respectivamente.

Dado que la matriz **A** tiene todos sus autovalores distintos, resulta diagonalizable, por lo que existirán las matrices **D**, que es una matriz diagonal cuyos elementos diagonales son los autovalores de **A** y **P** que es una matriz cuadrada cuyas columnas forman una base de vectores propios $\mathbf{v}_i$ asociados a los valores propios λ_i de **A**, $\forall i = 1,2,3,4$. La matriz **A** se puede expresar como:

$\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{D}\,\mathbf{P}^{-1}$

siendo $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 & \mathbf{v}_4 \end{pmatrix}$

Así, la ecuación (5) puede escribirse de la forma $\mathbf{y}' = \mathbf{P}\mathbf{D}\,\mathbf{P}^{-1}\mathbf{y}$

o equivalentemente, $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{y}' = \mathbf{D}\,\mathbf{P}^{-1}\mathbf{y} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{y}\right)' = \mathbf{D}\left(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{y}\right)$ (12)

Si definimos el nuevo vector de incógnitas $\mathbf{z} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{y}$, sustituyendo en (12) obtenemos $\mathbf{z}' = \mathbf{D}\,\mathbf{z}$.

Si $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix}$, la ecuación anterior representa al sistema $\begin{cases} z_1'(t) = \lambda_1 z_1(t) \\ z_2'(t) = \lambda_2 z_2(t) \\ z_3'(t) = \lambda_3 z_3(t) \\ z_4'(t) = \lambda_4 z_4(t) \end{cases}$

Y resolviendo cada una de las ecuaciones diferenciales que conforman el sistema, que resultan ser a variables separables, obtenemos:

$$\begin{cases} z_1(t) = c_1\, e^{\lambda_1 t} \\ z_2(t) = c_2\, e^{\lambda_2 t} \\ z_3(t) = c_3\, e^{\lambda_3 t} \\ z_4(t) = c_4\, e^{\lambda_4 t} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} c_1\, e^{\lambda_1 t} \\ c_2\, e^{\lambda_2 t} \\ c_3\, e^{\lambda_3 t} \\ c_4\, e^{\lambda_4 t} \end{pmatrix}$$

con c_1, c_2, c_3 y c_4 son constantes arbitrarias.

Como $\mathbf{z} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{y}$, resulta que $\mathbf{P}\mathbf{z} = \mathbf{y}$, de donde la solución general de (5) será:

$$\mathbf{y}(t) = c_1\mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t} + c_3\mathbf{v}_3 e^{\lambda_3 t} + c_4\mathbf{v}_4 e^{\lambda_4 t} \tag{13}$$

Teniendo en cuenta los datos del problema $m_1 = m_2 = 1\,\text{kg}$, $k_1 = k_3 = 1\,\text{kg/m}$ y $k_2 = 4\,\text{kg/m}$, la ecuación característica es $\lambda^4 + 10\lambda^2 + 9 = 0$ y sus soluciones son $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$, $\lambda_3 = 3i$ y $\lambda_4 = -3i$.

Si $\lambda_1 = i$, se tiene que $(\mathbf{A} - i\mathbf{I})\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -i & 1 & 0 & 0 \\ -5 & -i & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 1 \\ 4 & 0 & -5 & -i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$, de donde $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}$ es un autovector asociado al autovalor $\lambda_1 = i$.

Por lo visto anteriormente, $\mathbf{v}_2 = \overline{\mathbf{v}_1} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}$ será el autovector asociado al autovalor $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = -i$.

Si $\lambda_3 = 3i$, se tiene que $(\mathbf{A} - 3i\mathbf{I})\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -3i & 1 & 0 & 0 \\ -5 & -3i & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -3i & 1 \\ 4 & 0 & -5 & -3i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$, de donde $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} i \\ -3 \\ -i \\ 3 \end{pmatrix}$ es un autovector asociado a $\lambda_3 = 3i$, y $\mathbf{v}_4 = \overline{\mathbf{v}_3} = \begin{pmatrix} -i \\ -3 \\ i \\ 3 \end{pmatrix}$ será el autovector asociado al autovalor $\lambda_4 = \overline{\lambda_3} = -3i$.

Sustituyendo los valores anteriormente obtenidos en (13), la solución general de (5) es:

$$\mathbf{y}(t) = c_1 \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} e^{it} + c_2 \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} e^{-it} + c_3 \begin{pmatrix} i \\ -3 \\ -i \\ 3 \end{pmatrix} e^{3it} + c_4 \begin{pmatrix} -i \\ -3 \\ i \\ 3 \end{pmatrix} e^{-3it}$$

Trabajando algebraicamente se obtiene que:

$$\mathbf{y}(t) = \underbrace{\left(c_1 + c_2\right)}_{K_1} \underbrace{\begin{pmatrix} \operatorname{sen} t \\ \cos t \\ \operatorname{sen} t \\ \cos t \end{pmatrix}}_{\widetilde{y_1}} + \underbrace{\left(c_3 + c_4\right)}_{K_2} \underbrace{\begin{pmatrix} -\operatorname{sen} 3t \\ -3\cos 3t \\ \operatorname{sen} 3t \\ 3\cos t \end{pmatrix}}_{\widetilde{y_2}} + \underbrace{i\left(c_1 - c_2\right)}_{K_3} \underbrace{\begin{pmatrix} -\cos t \\ \operatorname{sen} t \\ -\cos t \\ \operatorname{sen} t \end{pmatrix}}_{\widetilde{y_3}} + \underbrace{i\left(c_3 - c_4\right)}_{K_4} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos 3t \\ -3\operatorname{sen} 3t \\ -\cos 3t \\ 3\operatorname{sen} 3t \end{pmatrix}}_{\widetilde{y_4}}$$

Es importante entender que los vectores $\widetilde{y_1}$, $\widetilde{y_2}$, $\widetilde{y_3}$ e $\widetilde{y_4}$ constituyen un conjunto linealmente independiente de soluciones reales de la ecuación (5). Estamos justificados para considerar K_1, K_2, K_3 y K_4 como totalmente arbitrarias y reales teniendo así que cualquier combinación lineal de ellas constituye una solución general de (5).

Dado que $x_1(t) = y_1(t)$ y $x_2(t) = y_3(t)$, las ecuaciones de movimiento del sistema masa-resorte son:

$$\begin{cases} x_1(t) = c_1 \operatorname{sen} t - c_2 \cos t - c_3 \operatorname{sen} 3t + c_4 \cos 3t \\ x_2(t) = c_1 \operatorname{sen} t - c_2 \cos t + c_3 \operatorname{sen} 3t - c_4 \cos 3t \end{cases}$$

Usando el hecho que los tres resortes no están estirados ni comprimidos:

$$\begin{cases} x_1(0) = -c_2 + c_4 = 0 \\ x_2(0) = -c_2 - c_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad c_2 = c_4 = 0$$

Resultando entonces que las ecuaciones de movimiento del sistema masa-resorte de la *Figura 1* son:

$$\begin{cases} x_1(t) = c \operatorname{sen} t - k \operatorname{sen} 3t \\ x_2(t) = c \operatorname{sen} t + k \operatorname{sen} 3t \end{cases} \qquad c,\ k \text{ constantes arbitrarias}$$

Comentarios finales

La enseñanza de la Matemática debe contribuir a que el estudiante de ingeniería se desarrolle con una visión del mundo que favorezca la formación de un pensamiento productivo, creador y científico. El propio contenido de la matemática como disciplina de estudio, los principios de su estructuración, la metodología de introducción de nuevos conceptos, teoremas y procedimientos, son elementos que pueden y deben influir positivamente en este sentido. Sin embargo, este aporte real que la matemática puede hacer a la formación del ingeniero, muy a menudo queda oculto para los estudiantes; los temas tratados en las clases pueden parecer muy abstractos y los profesores se desgastan en el logro de habilidades que poco tributan al perfil que nos ocupa.

Enseñar Matemática en Ingeniería es mucho más que transmitir un repertorio de resultados o técnicas. Es fundamentalmente formar a los estudiantes en un desarrollo creativo de sus capacidades y en un uso inteligente de estrategias matemáticas ante problemas del contexto ingenieril. Según Carlos D´Attellis, "*Nada mejor para el alumno de ingeniería que toma cursos de matemática que percibir que está estudiando algo que necesita imperiosamente en el campo que más le interesa: el de las aplicaciones concretas*".

En nuestra experiencia docente observamos que la mayoría de los estudiantes de ingeniería tienen dificultades en el abordaje de cualquier cuestión que involucre el pensamiento formal, como así también para modelizar situaciones concretas y de ese modo lograr un aprendizaje significativo. Además, no logran tener una visión integrada de los conocimientos que adquieren en las distintas asignaturas matemáticas del ciclo básico, y mucho menos transferir esos conocimientos a nuevas situaciones, evidenciándose estos en la falta de habilidad para el análisis y la resolución de problemas.

De parte de los docentes debemos admitir que no siempre la organización de los contenidos es la más apropiada, ya que suele basarse en un listado de conocimientos tal vez poco relacionados y con objetivos formulados en forma ambigua o excesivamente general. Además, "amparados" en la falta de tiempo, es frecuente que omitamos las aplicaciones a problemas concretos de cada rama de la ingeniería, lo cual atenta contra la motivación de los estudiantes. Sin embargo, considerar problemas de aplicación no tiene por qué insumir un notable tiempo adicional. Para afirmar esto, nos basamos, por un lado en la experiencia que hemos recogido en nuestros años de docencia, y por otra parte en los avances realizados por diferentes proyectos de investigación existentes en nuestra facultad, en nuestra universidad y en otros ámbitos académicos del país y del exterior.

En el presente trabajo intentamos mostrar a partir de un problema motivador, cómo conceptos estudiados en distintas asignaturas de carreras de Ingeniería, como lo son Álgebra y Geometría II (de primer año, segundo semestre) y Análisis Matemático III (de segundo año, primer semestre) pueden estar estrechamente vinculados, para poder entender nuevos conocimientos como lo es el de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales.

Para finalizar, cabe reproducir palabras del Dr. Santaló: "*Hay que tener en cuenta la pedagogía, pero hay que ir educando al alumno en el esfuerzo personal para aprender por su cuenta. Lo importante es poner a su disposición buenos textos, buenas guías y un buen conocimiento de la materia por parte del profesor*".

Referencias Bibliográficas

Arnulfo, Angélica R., Cianciardo, Cintia G., Semitiel, José A. y otros. (2006). Relación entre Matemática y Aplicaciones: La percepción de los estudiantes de Ingeniería. XIII EMCI Nacional y V EMCI Internacional, Oberá-Misiones, 10-13 octubre, (paper).

Arnulfo, Angélica R., Cianciardo, C., Semitiel, J. (2010). Una introducción a los sistemas de ecuaciones diferenciales utilizando herramientas del álgebra lineal. XVI EMCI Nacional y VIII EMCI Internacional, Olavarría-Buenos Aires, Mayo 2011, (paper).

D´Attellis, Carlos E. (1993). Matemáticas en carreras de ingeniería. Conferencia Inaugural del 4° Encuentro Nacional sobre Enseñanza de Matemática en carreras de Ingeniería, Rosario-Santa Fe.

Edwards, C., Penney, D. (2001). *Ecuaciones Diferenciales* (2da ed.). México: Editorial Pearson Educación.

Zill, D., Cullen, M. (2009). *Ecuaciones Diferenciales con problemas con valores en la frontera* (7ma ed.). México: Cengage Learning Editores S.A. de C.v.

Kreyszig, E. (2002). *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería* (Vol. 1). México: Editorial Limusa Wiley.

Martínez Luaces V. (2002). El modelado en la enseñanza de la Matemática como asignatura de servicio. VI Reunión de Didáctica de la Matemática del Cono Sur, Buenos Aires, 21-26 julio, (paper).

Sadovsky, P. (2005). *Enseñar Matemática hoy. Miradas, sentidos y desafíos*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Santaló, Luis A. y colaboradores. (1994). *Enfoques. Hacia una didáctica humanística de la matemática*. Buenos Aires: Editorial Troquel S.A.