Números separables

María del Rosario **Muñoz** Marín
Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Málaga
España
chamuma@ctima.uma.es
Blas Carlos **Ruiz** Jiménez
Departamento de Lenguajes y Ciencias de la Computación, Universidad de Málaga
blas@lcc.uma.es
España
Manuel **Ruiz** Muñoz
IES Fuente Lucena, Alhaurín el Grande, Málaga
España

Resumen

Entre los problemas de teoría de números elemental (aquellos que se formulan con un conocimiento básico de la disciplina) aparecen problemas aún abiertos que involucran sumas de divisores, como la existencia de números perfectos impares. Estudiamos en este artículo una generalización interesante de los números perfectos: los números l–separables, aquellos naturales tales que sus divisores positivos pueden repartirse en l grupos disjuntos con idéntica suma.

Exponemos un estudio de la separabilidad que motiva tanto la enseñanza de resultados esenciales de la teoría de números, como la escritura de eficientes programas de ordenador para analizar la distribución de los números separables. Estos permiten establecer y justificar, entre otras, la siguiente conjetura: para cada natural positivo l, el conjunto de números l-separables es infinito.

Palabras clave: teoría de números, sumas de divisores, números separables, matemática recreativa, Haskell.

Introducción

Hace 2300 años ocurrió un decisivo hecho en la historia de las matemáticas: la aparición de *Elementos* de Euclides (325–265 a.C.), que, como dice Tom (Apostol, 1976), *transformó la matemática desde la numerología a una ciencia deductiva*. Hasta mediados del siglo XX, *Elementos* fue la obra más vendida, después de la Biblia.

Los *Elementos* es una colección de 13 libros que contienen unos 500 resultados. Tres de estos libros (VII, IX y X) están dedicados a la teoría de números. El libro IX (Hawking, 2006; Puertas, 1994) contiene dos joyas de la matemática que aún hoy día nos sorprenden. Una de ellas es la demostración de la infinitud de los números primos. La segunda es una solución parcial a un problema propuesto por Pitágoras: encontrar todos los números perfectos.

Recordemos que un número es *perfecto* si es la suma de sus divisores positivos propios, o como decían los griegos, la suma de sus partes. Si denotamos con ∂n el conjunto de los factores (divisores positivos) de n, entonces $\partial 6 = \{1,2,3,6\}$, y $6 = 1+2+3$ es perfecto. Será también útil denotar con ${}^{+}A$ la suma de los elementos del conjunto A. Entonces n es perfecto sii $\sigma n = 2n$, donde $\sigma n \equiv {}^{+}\partial n$.

En la Proposición 36 del libro IX, Euclides demuestra un resultado que en nuestro lenguaje algebraico actual escribimos en la forma siguiente: si $2^{k+1}-1$ es un número primo, entonces $2^k(2^{k+1}-1)$ es un número perfecto. Muchos siglos más tarde, Leonhard Euler (1707–1783) probó que los únicos números perfectos pares son los descritos por Euclides. No se conoce ningún número perfecto impar. Hoy día es uno de los problemas de la teoría de números más célebre aún no resuelto.

Existen muchísimos estudios sobre generalizaciones y variantes de los números perfectos: perfectos-múltiples, abundantes, semiperfectos, … Por ello es difícil hacer contribuciones originales. También compartimos plenamente la afirmación que hace Richard (Guy, 1994) en el prólogo a la primera edición de su célebre *Unsolved Problems in Number Theory* : “Proponer buenos problemas aún no resueltos es un arte difícil. El balance entre trivial y no-resuelto es delicado…”. A pesar de esta dificultad, nuestra intención en el presente artículo es presentar y estudiar una generalización no trivial de los números perfectos que hasta el momento no hemos encontrado en la literatura: los números separables.

Definición 1.1: *Un número natural es l-separable si es posible repartir el conjunto de sus factores (o divisores positivos) en l conjuntos disjuntos con igual suma. El conjunto formado por los números l-separables se denotará con $\mathcal{S}_l$.*

Estos números son una generalización de los números de Zumkeller o 2-separables, que a su vez generalizan a los perfectos: todo perfecto es 2-separable. Los autores del presente artículo han estudiados los números 2-separables en otras publicaciones (Muñoz et al., 2010; Ruiz and Ruiz, 2010). En el presente artículo además generalizamos algunos resultados anteriores pero para l arbitrario.

De la Definición 1.1 se deduce que si n es l-separable existe una partición de sus factores formada por l conjuntos disjuntos $D_1, D_2, \dots, D_l$, y de forma que ${}^{+}D_1 = {}^{+}D_2 = \cdots = {}^{+}D_l$. Por ello, la suma de sus factores es l veces la suma de cualquier partición; esto es: $l \cdot ({}^{+}D_1) = \sigma n$.

Por otro lado, ya que el propio n aparece en cierto grupo D_i, la suma de factores de éste grupo es $\geq n$; y ya que todos tienen igual suma, $\sigma n \geq l \cdot n$. En definitiva, si $n \in \mathcal{S}_l$, entonces

$$l \mid \sigma n \;\wedge\; \sigma n \geq l \cdot n. \tag{1}$$

Veremos en la sección tercera que las condiciones (1) son necesarias y además extraordinariamente restrictivas: son *casi* suficientes. Es decir, casi la totalidad de los números que la satisfacen son separables. Esto conduce a la definición del conjunto de **candidatos** a números separables:

$$\mathcal{C}_l \doteq \{n : n \in \mathbb{N}, l \mid \sigma n \wedge \sigma n \geq l \cdot n\}$$

Nótese que para $l = 1$ los siguientes conjuntos son iguales: $\mathcal{S}_1 = \mathcal{C}_1 = \mathbb{N}$, por lo que podemos considerar $l > 1$. Obviamente $\mathcal{S}_l \subset \mathcal{C}_l$. ¿Es propia la inclusión? Es decir, ¿existen números de $\mathcal{C}_l$ que no son l-separables? Para $l = 2$ y $l = 3$ la respuesta es afirmativa, y conjeturamos que la respuesta es afirmativa para todo $l > 1$. Por tanto, las condiciones (1) son necesarias pero no suficientes para la separabilidad.

Para el estudio de la condición $\sigma n \geq l \cdot n$ usaremos la función abundancia de (Sylvester, 1888), $hn = (\sigma n)/n$, y analizaremos la desigualdad $hn \geq l$ al igual que hace (Carmichael, 1907) para el estudio de los perfectos-múltiples. Un número n satisfaciendo $hn \geq l$ se dirá l-abundante.

En el presente artículo estudiaremos la complejidad computacional del análisis de estos números. Probaremos que $\mathcal{C}_l$ es no vacío para cada l, y daremos fuertes evidencias de que existen candidatos no separables.

El análisis de la separabilidad de un número es muy difícil desde el punto de vista computacional. Si el número tiene d divisores, el total de sumas diferentes correspondientes a los posibles repartos de divisores en l grupos es del orden de $\frac{l^d}{d!}$. Este número es muy elevado y los programas de ordenador constituyen herramientas imprescindibles para analizar la separabilidad. Para este fin hemos utilizado un lenguaje de programación próximo a la notación matemática: HASKELL, un lenguaje funcional moderno ampliamente utilizado tanto en el mundo académico como el profesional (Ruiz et al., 2004) (véase también la página oficial del lenguaje: http://www.haskell.org).

Nuestro programa HASKELL es muy eficiente y analiza la separabilidad rápidamente en *casi* todos los casos, aunque para algunos números recalcitrantes tiene que explorar una porción grande de repartos hasta encontrar la primera solución de separabilidad.

Así, nuestro programa tardó dos días en encontrar un reparto para el número $\zeta = 2399040$, y en efecto es 4-separable. Tal número $\zeta = 2^6 3^2 5^1 7^2 17^1$ tiene $252 (= 7 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2)$ divisores y el número de repartos diferentes de sus divisores en 4 grupos es $4^{252}/24 \sim 2 \cdot 10^{150}$: ¡un número de 151 cifras! A razón de un millón de comprobaciones por segundo, si tiene que revisarlas todas, necesitaría 10^{137} años. Es decir, el problema, desde un punto de vista computacional, es extraordinariamente complejo.

Además de esta sección introductoria, el resto del artículo está dividido en la forma siguiente. En la sección siguiente esbozamos los elementos de teoría de números que serán necesarios para analizar la separabilidad. En la siguiente daremos ejemplos de números

l-separables para distintos valores de l. Seguidamente describimos nuestra estrategia para construir candidatos. La siguiente sección está dedicada a demostrar un curioso resultado: $\mathcal{S}_l$ es, o vacío, o infinito. En la sección última presentamos varias conclusiones y otras conjeturas que motivan la necesidad de profundizar nuestro análisis.

Algunos resultados de la Teoría de Números

Hay teoremas fundamentales de la teoría de números que son difíciles de motivar. El profesor debe valorar la importancia de cada uno de ellos, tanto desde sus aplicaciones como del interés formativo y didáctico que tienen las construcciones de sus demostraciones, bien completas si el nivel de formación de los alumnos lo permite, o bien con un esbozo. En todo caso, siempre es interesante dar justificaciones, interpretaciones y aplicaciones.

Exponemos aquí cuatro resultados esenciales de la Teoría de Números que son imprescindibles para analizar la separabilidad. Estos resultados son:

El conjunto de números primos es infinito. La demostración elemental que expone Euclides en *Elementos* (Proposición 20, libro IX) es la primera demostración por reducción al absurdo que se enseña en los cursos de álgebra introductorios. Particularmente nos gusta la original de Euclides; ésta puede verse en la versión bilingüe griego-inglés (Heiberg, 2008), en la anotada de (Hawking, 2006), y en español la referencia esencial es (Puertas, 1994). El lector puede consultar el estupendo estudio (Navarro, 2002), con notas históricas y abundantes referencias bibliográficas sobre *Elementos*.

Usaremos sin citar, y muchas veces, la infinitud del conjunto de números primos.

Teorema Fundamental de la Aritmética: Todo natural admite una única descomposición en factores primos: $n = p_1^{k_1} \cdots q_j^{k_j}$ ($k_i > 0, p_i$ primos distintos, $p_1 < p_2 < \dots$).

La demostración de este resultado es muy interesante desde el punto de vista didáctico ya que usa de forma elegante y precisa el principio de inducción. Nos gustan particularmente las expuestas en (Hardy and Wright, 1968, p.3) y (Apostol, 1976, p.16-17).

A partir de la descomposición en factores primos es posible obtener la suma de los factores como producto de sumas de progresiones geométricas en la forma:

$$\sigma(p_1^{k_1} \cdots p_j^{k_j}) = (1 + ... + p_1^{k_1}) \cdots (1 + ... + p_j^{k_j}) \tag{2}$$

ya que cada factor de $p_1^{k_1} \cdots p_j^{k_j}$ aparece exactamente una sola vez en el desarrollo en productos del miembro de la derecha. La ecuación (2) permite deducir una propiedad esencial de la función σ que será utilizada ampliamente en el presente artículo:

$$\text{Si } n \perp m \text{ entonces } \ \sigma(nm) = \sigma n \cdot \sigma m \tag{3}$$

donde $n \perp m$ significa n es primo con m. De la definición $hn \doteq \sigma n/n$ y de (3) obtenemos $h(p_1^{k_1} \cdots p_j^{k_j}) = h(p_1^{k_1}) \cdots h(p_j^{k_j})$, y de aquí las principales propiedades de h:

$$h(nm) \geq hm, \qquad \text{y si } n \perp m \text{ entonces } \ h(nm) = hn \cdot hm. \tag{4}$$

Por tanto, si existe un natural n que es l-abundante, entonces existe una secuencia infinita $q_j n$ de tales números, donde los q_j son primos.
La serie $\sum_{i=1}^{\infty} 1/p_i$ diverge, siendo $\{p_i\}$ la secuencia de números primos. Este sorprendente resultado lo demostró Euler en 1737, y en la literatura hay muchas demostraciones. James Clarkson encontró en 1966 una elegante demostración que utiliza, además de la infinitud del conjunto de números primos, el criterio integral para la convergencia/divergencia de una serie (Apostol, 1976, p.18).

Nosotros hacemos uso de la divergencia de esta serie para demostrar que para cada l existe un número n que es l-abundante, es decir, $hn \geq l$. La demostración es tan sencilla como elegante: si tomamos la secuencia infinita de números primos $\{p_i\}$, entonces:

$$h(p_1 \cdots p_k) = h(p_1) \cdots h(p_k) = (\frac{1+p_1}{p_1}) \cdots (\frac{1+p_k}{p_k}) = (1+\frac{1}{p_1}) \cdots (1+\frac{1}{p_k}) > \sum_{i=1}^{k} 1/p_i$$

y puesto que la serie $\sum_{i=1}^{\infty} 1/p_i$ diverge, la sucesión $h(p_1 \cdots p_k)$ no está acotada, de forma que para cada l, existe un K_l tal que $h(p_1 \cdots p_{K_l}) \geq l$. Luego el conjunto de números abundantes es no vacío, y por (4), es infinito.
Teorema de Dirichlet. Este sorprendente resultado publicado por P.G. Legeune Dirichlet en su famosa memoria de 1837 dice (Guy, 1994, p.3): si a y b son enteros ($b > 0$) primos entre sí, entonces la progresión aritmética $a + bk$ contiene una infinidad de números primos. Algunos excelentes textos como (Hardy and Wright, 1968) usan este resultado pero no abordan la prueba porque ésta necesita herramientas de la teoría analítica de los números. Así, Tom Apostol le dedica un capítulo completo, y llega a afirmar (Apostol, 1976, p.7) que la prueba de este famoso resultado es considerado como el *nacimiento de la teoría analítica de los números*. Si $p(b,a)$ es el menor primo de la progresión $a + bk$, Linnik (Guy, 1994, p.13) probó que existe una constante L, llamada constante de Linnik, tal que $p(b,a) \in O(b^L)$; Heath-Brow demostró en 1992 que $L \leq 5.5$.

Nosotros aplicaremos el Teorema de Dirichlet para obtener un número m tal que $l \mid \sigma m$. Por ejemplo, si $l = q$ es un número primo, la sucesión $-1 + kq$ contiene infinitos primos r verificando $q \mid (1+r) = \sigma r$.

El teorema de Dirichlet es un ejemplo característico de enunciado elemental, que pese a la complejidad de su prueba, las aplicaciones tan sorprendentes que tiene hacen recomendable su uso desde un punto de vista práctico y didáctico. La teoría de números está repleta de otros ejemplos: el teorema sobre la distribución de los números primos, o incluso, la validez de la conjetura de Goldbach para números extraordinariamente grandes.

Los cuatro resultados aquí expuestos nos permitirán demostrar que el conjunto de candidatos $\mathcal{C}_l$ es infinito para l arbitrario. Esto refuerza dos conjeturas: para cualquier l, (i) $\mathcal{S}_l$ es no vacío, y por tanto es infinito; y (ii) existen infinitos candidatos no separables.

Ejemplos de Números separables

El menor 2-separable es el número 6. Todo número perfecto es 2–separable. El conjunto de los factores de 120 puede *separarse* en tres grupos con igual suma:

$$D_1 = \{120\}, D_2 = \{60, 40, 20\}, D_3 = \{30, 24, 15, 12, 10, 8, 6, 5, 4, 3, 2, 1\}.$$

Además $120 = \min \mathcal{S}_3$, y $\sigma 120 = 3 \cdot 120$ (120 es un número perfecto-múltiple de orden 3).

Para $l = 4$, el menor número 4-separable tiene 96 factores y es $27720 = 2^3 3^2 5^1 7^1 11^1$; una separación de su factores está formada por los 4 subconjuntos siguientes:

$$\begin{aligned}
D_1 &= \{ \quad 18, 924, 2772, 3080, 3465, 3960, 4620, 9240\} \\
D_2 &= \{ \quad 8, 198, 1540, 5544, 6930, 13860\} \\
D_3 &= \{ \quad 360, 27720\} \\
D_4 &= \{ \quad \text{(los 80 restantes)} \}
\end{aligned}$$

Para $l = 5$, el menor número 5-separable es un número con 896 divisores y es 147 026 880 $= 2^6 3^3 5^1 7^1 11^1 13^1 17^1$; una separación de sus factores en 5 subconjuntos con igual suma es:

$$\begin{aligned}
D_1 &= \{ \quad 2016, 445536, 147026880\} \\
D_2 &= \{ \quad 14, 2002, 1670760, 18378360, 24504480, 29405376, 73513440\} \\
D_3 &= \{ \quad 24, 8316, 297024, 9189180, 11309760, 12252240, 13366080, 14702688, \\
&\qquad 16336320, 21003840, 49008960\} \\
D_4 &= \{ \quad 4, 273, 23205, 3500640, 4084080, 4200768, 4324320, 4455360, 4594590, \\
&\qquad 4900896, 5250960, 5445440, 5654880, 6126120, 6683040, 7001280, 7351344, \\
&\qquad 8168160, 8648640, 9801792, 10501920, 36756720\} \\
D_5 &= \{ \quad \text{(los 853 restantes)} \; \}
\end{aligned}$$

Para $l = 6$, el menor número 6-separable es un número con 18432 divisores, tiene 15 cifras, y es $\Psi_6 = 130\,429\,015\,516\,800 = 2^7 3^3 5^2 7^2 11^1 13^1 17^1 19^1 23^1 29^1$, y su coeficiente de abundancia es ~ 6.017. Para $l = 7$, el menor número candidato es un número con 1 769 472 divisores, tiene 25 cifras, y es $\Psi_7 = 7\,226\,971\,783\,901\,664\,319\,324\,800 = 2^7 3^3 5^2 7^2 11^2 13^1 17^1 19^1 23^1 29^1 31^1 37^1 41^1 43^1 47^1 53^1$. Su coeficiente de abundancia es ~ 7.011. No sabemos si es 7-separable. (Obsérvese que en la descomposición en factores primos del menor abundante los exponentes aparecen en orden decreciente).

En resumen, $\min \mathcal{S}_2 = 6, \min \mathcal{S}_3 = 120, \min \mathcal{S}_4 = 27720, \min \mathcal{S}_5 = 147026880, \min \mathcal{S}_6 = \Psi_6 > 5 \cdot 10^{16}, \min \mathcal{S}_7 \geq \Psi_7 > 7 \cdot 10^{24}$. Es natural que el valor $\min \mathcal{S}_l$ crezca rápidamente con l ya que el número de primos necesarios para que se cumpla $hn > l$ crece rápidamente con l. Podemos encontrar cotas de éste valor utilizando el método de Carmichel, tal como estudiamos en (Muñoz et al., 2010). Una observación notable es: $\mathcal{S}_{kl} \subset \mathcal{S}_l$.

Analicemos ahora cuántos candidatos de $\mathcal{C}_l$ pertenecen a $\mathcal{S}_l$. Eficientes programas escritos en HASKELL y sus correspondientes cómputos indican que una proporción alta de números de $\mathcal{C}_l$ son separables y las condiciones (1) $(\equiv l \mid \sigma n \wedge hn \geq l)$ son muy restrictivas, pero no suficientes al menos para $l = 2, 3$. Así, en la cuarta columna de la Tabla 1 aparece el total de números menores que 10 000 000 que satisfacen (1) para distintos valores de l; en la última columna aparece la proporción de los que satisfaciendo (1) son de $\mathcal{S}_l$. Para $l = 2$ aproximadamente el 24.7 % satisfacen (1), y entre éstos, el 92.5 % son separables.

Salvo el número $748 = 2^2 11^1 17^1$, los primeros candidatos que no son 2-separables son de la forma $(2^1 3^2)p$, donde p es un número primo ≥ 41. Una curiosidad: el menor primo p mayor que $\sigma(2^1 3^2)$ es 41. Esta curiosidad nos ayudó a formular la propiedad (b) del Teorema 5.3.

Para $l = 3$ los primeros candidatos que no son separables son de la forma $(2^2 3^2 5^2)p$, siendo p un número primo $\geq 1427 \wedge 3 \mid \sigma p$, es decir, $p \in \{1427, 1433, 1439, 1451, \dots\}$. Otra curiosidad: el menor primo p mayor que $\sigma(2^2 3^2 5^2)/2$ y satisfaciendo además $3 \mid \sigma p$, es 1427, por lo que intuimos que es posible generalizar el resultado (b) del Teorema 5.3.

Tabla 1
Frecuencias de naturales $n \leq 10^7$ satisfaciendo $l \mid \sigma n \wedge hn \geq l$.

l	sat. $l \mid \sigma n$	sat. $hn \geq l$	sat. ambos	total en $\mathcal{S}_l$	% de separables
2	9 994 602	2 476 741	2 474 422	2 287 889	92.5
3	8 400 034	202 187	191 223	189 705	99.2
4	4 394 309	1 238	1 218	1 218	100.0
5	4 328 053	0	0	0	100.0

¿Existen candidatos no separables para $l > 3$?

La comprobación de que un número es l-separable puede necesitar un cómputo muy elevado si tiene que explorar gran cantidad de repartos hasta encontrar la primera solución de separabilidad. Incluso siendo muy eficiente nuestro programa, no ha podido comprobar si son 4-separables los números:

$$5\,183\,640 \qquad 12\,141\,360 \qquad 17\,173\,800 \qquad 18\,101\,160 \qquad 18\,219\,600$$

que tienen respectivamente $288, 320, 288, 192$ y 240 divisores. Excluidos quizás estos cinco números, todos los anteriores a 18 219 600 son 4-separables. Igualmente, para $l = 5$, no sabemos si el número $5\,807\,561\,760 = 2^5 3^3 5^1 7^1 11^1 13^1 17^1 79^1$ es 5-separable. Todo candidato menor que éste número es 5–separable. A modo de resumen exponemos los menores candidatos no l-separables para los primeros valores de l o una cota inferior para $l = 4, 5$:

l	menor candidato no l-separable
2	748
3	1 284 300
4	($5\,183\,640 \leq$) ?
5	($5\,807\,561\,760 \leq$) ?

Digamos algo sobre candidatos impares. Por ejemplo, para $l = 5$, el número impar Υ cuya descomposición es $\Upsilon = 3^9(5 \cdot 7 \cdots 47 \cdot 53)^6(179 \cdot 181 \cdot \cdots \ldots 251 \cdot 257)$, es un hermoso candidato impar de 444 cifras, con 54 primos y con un coeficiente de abundancia muy próximo a 5: $h\Upsilon \sim 5.0000434$. Conjeturamos que es 5-separable. Para $l = 10$, el primer candidato impar tiene al menos 7397 primos, es decir, debe tener mas de 32454 cifras. Tal número debe tener al menos $2 \cdot 7397$ divisores, y el número de posibles repartos es $\frac{10^{2 \cdot 7397}}{10!}$. Estos números asustan. Debemos pues enfatizar la complejidad de problemas con enunciados tan sencillos como: ¿cual es el menor candidato impar de $\mathcal{C}_{10}$ que no es 10-separable?

Construcción de candidatos

En esta sección describimos nuestra estrategia para construir candidatos de $\mathcal{S}_l$, es decir, números satisfaciendo $hz \geq l \wedge l \mid \sigma z$. Para ello construiremos dos números primos entre sí, de forma que cada uno de ellos satisfaga una de las condiciones, y después los multiplicamos. Más concretamente:

Teorema 4.2: *Sea l un número natural positivo. Entonces:*

(a) *Existe un número n satisfaciendo $hn \geq l$.*

(b) *Dado n, existe un número m tal que $n \perp m \wedge l \mid \sigma m$.*

(c) *$\mathcal{C}_l$ es no vacío, y por tanto, es infinito.*

Demostración.– Los apartados (a) y (b) permiten construir un abundante y transformarlo en un candidato, y así probamos (c). En efecto: si aplicamos (a) y a continuación (b), podemos afirmar que existen dos números n y m verificando:

$$hn \geq l \qquad n \perp m \qquad l \mid \sigma m$$

Ahora tomamos $z = mn$; es fácil comprobar que $z \in \mathcal{C}_l$. En efecto: ya que $n \perp m$, obtenemos $\sigma z = \sigma m \cdot \sigma n$; de aquí obtenemos, por un lado $l \mid \sigma z$; y por otro lado $hz = h(mn) \geq hn \geq l$. Con éste z podemos construir una secuencia infinita de números zq_i, donde cada q_i es primo, $q_i \perp z$; es obvio que cada uno es un candidato, y por tanto $\mathcal{C}_l$ es infinito.

En la Sección 2 hemos probado el apartado (a) vía la convergencia de la serie $\sum_{i=1}^{\infty} 1/p_i$. Probamos ahora (b) por inducción sobre l. Si $l = q$ es un número primo aplicamos el Teorema de Dirichlet para obtener infinitos primos de la forma $m = -1 + kq$; luego todos ellos satisfacen $q \mid (1+m) = \sigma m$, y podremos tomar uno de ellos tal que $n \mid m$. Si l no es primo, será de la forma $l = l_1 l_2$, con $l_1, l_2 < l$, y podemos aplicar la hipótesis de inducción a ambos factores. Aplicada a l_1 permite concluir que existe m_1 tal que $n \perp m_1 \wedge l_1 \mid \sigma m_1$. Ahora aplicamos la hipótesis de inducción a l_2 junto a (nm_1), para concluir que existe otro número m_2 tal que $(m_1 n) \perp m_2 \wedge l_2 \mid \sigma m_2$. Las condiciones $n \perp m_1 \wedge m_2 \perp (m_1 n)$ conducen, en primer lugar a $m_2 \perp m_1$, de donde $l_1 l_2 \mid \sigma(m_1 m_2)$, y en segundo lugar a $n \perp (m_1 m_2) \doteq m$. ■

Cada conjunto $\mathcal{S}_l$ y su complementario es o vacío o infinito

Vamos ahora a demostrar que tanto $\mathcal{S}_l$ como su complemento $\mathbb{N} \backslash \mathcal{S}_l$ son infinitos para muchos valores de l. Nos servirá este curioso resultado:

Teorema 5.3: *Sea p un número primo y m otro natural $m \perp p$.*

(a) *Si $m \in \mathcal{S}_l$, entonces $\forall k : k \geq 0 : p^k m \in \mathcal{S}_l$.*

(a') *Para cada j natural, si $p^j m \in \mathcal{S}_l$, entonces $\forall k : k \geq 0 : p^{j+k(j+1)} m \in \mathcal{S}_l$.*

(b) *Si $p > \sigma m$, entonces $m \notin \mathcal{S}_l \iff \forall k : k \geq 0 : p^k m \notin \mathcal{S}_l$.*

Demostración.– Sea p primo $\nmid m$; entonces cada suma de divisores del número $p^k m$ se puede descomponer en la forma $m_i + pm'_i + \cdots + p^k m''_i$, donde $m_i, m'_i, \ldots, m''_i$ $(i = 1, \ldots, l)$ son sumas de divisores de m. Para probar (a) consideremos que $m \in \mathcal{S}_l$; entonces existe una partición en l grupos, de forma que las sumas $m_1 = \cdots = m_l$, son todas iguales, y en ese caso las sumas

$m_i + pm_i + \cdots + p^k m_i$ conforman sumas de l particiones de los factores de $p^k m$, y todas son iguales, lo que prueba que $p^k m \in \mathcal{S}_l$.

El apartado (a) es un caso particular de (a') para $j = 0$, y su prueba es similar si observamos que podemos descomponer una suma de divisores de $p^{j+k(j+1)}m$ en la forma siguiente: $(m_i + pm_i' + \cdots + p^j m_i'') + p^{j+1}(m_i + pm_i' + \cdots + p^j m_i'') + \ldots$.

Probemos (b). Si dos sumas de una partición correspondiente a $p^k m$ son iguales, como por ejemplo

$$m_i + pm_i' + \cdots + p^k m_i'' = m_j + pm_j' + \cdots + p^k m_j''$$

tendremos que $|m_i - mj|$ es múltiplo de p. Pero $|m_i - m_j| \leq m_i + m_j \leq \sigma m < p$, luego $|m_i - m_j| < p$; y ya que $m_i - m_j$ es múltiplo de p, necesariamente $m_i = m_j$. Pero si $m \notin \mathcal{S}_l$, entonces no existe ninguna partición donde las sumas m_i sean iguales, y por tanto tampoco existirá una partición con tales características para el número $p^k m$. Es decir, $m \notin \mathcal{S}_l \;\Rightarrow\; \forall k : k \geq 0 : p^k m \notin \mathcal{S}_l$ (la implicación recíproca es trivial). ■

En la Sección 3 hemos visto que $\mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3, \mathcal{S}_4$, $\mathcal{S}_5$ y $\mathcal{S}_6$ son no vacíos; por ello, el Teorema 5.3 conduce a que los conjuntos $\mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3, \mathcal{S}_4, \mathcal{S}_5, \mathcal{S}_6$ son todos infinitos, así como sus complementos $\mathbb{N} \backslash \mathcal{S}_l$.

El Teorema 5.3 tiene otras aplicaciones interesantes. Así, podemos simplificar el estudio de la separabilidad rebajando el exponente de algunos primos de la representación del número. Por ejemplo, para comprobar si el número $3000 = 2^3 3^1 5^3$ es 3-separable, podemos comprobar si lo es alguno de los números siguientes: $2^1 3^1 5^3, 2^3 3^1 5^1, \ldots$ El primero falla (no es candidato), pero el segundo es el primer 3-separable, luego 3000 es 3-separable.

Este *truco* no es práctico en muchos casos. Por ejemplo, sea $m = \zeta/7^2 = 2^6 3^2 5^1 17^1$; entonces $m \notin \mathcal{S}_4$ (no es candidato), pero $7m \in \mathcal{S}_4$, de donde, para cualquier impar i se tiene $7^i m \in \mathcal{S}_4$; sin embargo la comprobación de $7^2 m \in \mathcal{S}_4$ es muy lenta, al contrario de las comprobaciones $7^4 m, 7^6 m, \cdots \in \mathcal{S}_4$, que son extraordinariamente rápidas.

Conclusiones

Hemos mostrado en este artículo cómo el análisis de la separabilidad permite introducir, desde herramientas elementales, como el Teorema Fundamental de la Aritmética, hasta resultados mas avanzados de la Teoría Analítica de los Números, como el Teorema de Dirichlet. Estas características hace que el problema de la separabilidad sea especialmente interesante desde un punto de vista didáctico. La historia de la Matemática aparece profundamente ilustrada con problemas de esta índole que son un reto para los alumnos y para los profesores. Aceptar el reto conduce a descubrir y apreciar la matemática, sus teoremas esenciales y sus pruebas elegantes.

Hemos esbozado cómo el análisis de la separabilidad es complejo tanto teóricamente como computacionalmente. Un lenguaje de programación próximo a la notación matemática (como HASKELL) nos ha permitido escribir con poco esfuerzo elegantes programas para analizar la distribución de los números separables, y así establecer algunas conjeturas. Entre éstas aparecen, para un número natural l arbitrario: ¿$\mathcal{S}_l$ es no vacío?, ¿existen candidatos no l-separables?

Pensamos que el método y el problema analizado en el presente trabajo pueden proporcionar otras ideas para desarrollar aspectos típicos de la teoría elemental de números, especialmente en la enseñanza universitaria. Así mismo son interesantes estas ideas para motivar la escritura de programas de ordenador eficientes, teniendo en cuenta que un tratamiento combinatorio típico es casi inútil.

Nuestros programas han sido escritos en el lenguaje de programación HASKELL, y están a disposición de los lectores interesados.

Agradecimientos Este trabajo ha sido sufragado en parte por los Proyectos de Investigación nacionales ReSCUE TIN2008-05932 y P07-TIC03131.

Referencias

Apostol, T. M. (1976). *Introduction to Analitic Number Theory*. Springer.

Carmichael, R. (1907). A table of multiply perfect numbers. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 13, 383–386.

Guy, R. (1994). *Unsolved Problems in Intuitive Mathematics. Vol 1: Unsolved problems in Number Theory*. Springer-Verlag.

Hardy, G. and Wright, E. (1968). *Introduction to The Theory of Numbers*. Oxford University Press, 4ª ed. corregida.

Hawking, S. (2006). *Dios creó los números*. Ed. Crítica. Versión española de *God created the integers*, Penguin (2005).

Heiberg, J. (2008). *Euclid's Elements (1883–1885)*. Traducción y edición a cargo de Richard Fitzpatrick.

Muñoz, R., Ruiz, B., and Ruiz, M. (2010). Combinaciones de divisores y números de zumkeller. In *XIII CIAM (Congreso de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, Córdoba)*.

Navarro, J. (2002). Los elementos de euclides. In *Un Paseo por la Geometría 2002/2003*.

Puertas, M. (1994). *Elementos. Libros V- IX*. Ed. Gredos.

Ruiz, B., Gutiérrez, F., Guerrero, P., and Gallardo, J. (2004). *Razonando con Haskell*. Ed. Thomson.

Ruiz, B. and Ruiz, M. (2010). Recreational programming versus recreational mathematics. In *TIME 2010: Technology and its Integration into Mathematics Education, Málaga*.

Sylvester, J. (1888). Sur l´imposibilité de l´existence d´un nombre parfait impair qui ne contient pas au moins 5 diviseurs premiers distincts. *C.R. Acad. Sci.*, 106, 522–526.