# A concepção clássica de probabilidade através do jogo Mini-Bozó

José Marcos **Lopes**
Universidade Estadual Paulista-UNESP
Brasil
jmlopes@mat.feis.unesp.br

**Resumo**

Apresentamos neste trabalho uma proposta didático-pedagógica para o ensino da concepção clássica de Probabilidade. O ponto de partida para a construção do conceito probabilístico é uma situação de jogo associada à resolução de problemas. A concepção de jogo aqui utilizada toma como referência a tendência construtivista do ensino de Matemática. A construção do conhecimento matemático é realizada a partir de problemas geradores de novos conceitos e/ou novos conteúdos. O jogo proposto é original e todos os problemas formulados envolvem situações de jogo. Nossa proposta pode ser utilizada tanto no último ciclo do Ensino Fundamental como também no Ensino Médio, e pode subsidiar a prática de professores que ensinam conceitos básicos de Probabilidade.

*Palavras chave*: probabilidade, ensino-aprendizagem, jogos, resolução de problemas.

## Introdução

A Probabilidade é uma área da Matemática que trata do estudo e da modelagem de fenômenos aleatórios ou não determinísticos. Todos os resultados dessa teoria estão alicerçados em conceitos matemáticos. Assim, para o seu ensino e aprendizagem, podemos aproveitar as técnicas e as metodologias já desenvolvidas ou consolidadas nas pesquisas em Educação Matemática.

A concepção clássica de probabilidade é atribuída a Laplace (1749-1827). Entretanto, "a definição de probabilidade como quociente do número de *casos favoráveis* sobre o número de *casos possíveis* foi a primeira definição formal de probabilidade, e apareceu pela primeira vez em forma clara na obra *Liber de Ludo Aleae* de Jerônimo Cardano (1501-1576)" (Morgado, Carvalho, Carvalho, & Fernandez, 2004, p. 119).

A definição de probabilidade de Laplace é válida somente quando o Espaço Amostral possui um número finito de elementos e os Eventos Elementares são equiprováveis, ou seja, possuem a mesma probabilidade de ocorrência. A concepção clássica de probabilidade possui forte conexão com o raciocínio combinatório. Os Standards do National Council of Teachers of Mathematics (1989) recomendam o seguinte procedimento combinatório para que os alunos compreendam matematicamente a origem e aprendam o conceito implícito na definição laplaciana de probabilidade: construir uma tabela ou diagrama de árvore, fazer uma lista e usar um simples procedimento de contagem.

Mais do que saber ler as informações que circulam na mídia, espera-se do aluno do Ensino Médio uma reflexão mais crítica sobre seus significados, ou seja, que contribua para a construção de uma visão ampla de mundo, e proporcione múltiplas leituras e interpretações dessa realidade com o intuito de proporcionar o pleno desenvolvimento de suas capacidades que lhes serão exigidas em sua vida social e profissional. Desse modo, "a Probabilidade deve ser vista como um conjunto de idéias e procedimentos que permitem aplicar a Matemática em questões do mundo real, quantificar e interpretar conjuntos de dados ou informações que não podem ser quantificados direta ou exatamente" (Brasil, 2002, p. 126).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) – (Brasil, 2000) estabelecem que a principal finalidade para o estudo de Probabilidade

> é a de que o aluno compreenda que grande parte dos acontecimentos do cotidiano são de natureza aleatória e é possível identificar prováveis resultados desses acontecimentos. As noções de acaso e incerteza, que se manifestam intuitivamente, podem ser exploradas na escola, em situações nas quais o aluno realiza experimentos e observa eventos (Brasil, 2000, p. 57).

Considerando a dimensão de inclusão social da Educação Matemática, enfatizamos o desenvolvimento da intuição probabilística na Educação Básica, como uma forma de tornar os alunos conscientes da natureza probabilística de distintos jogos de azar (loterias, bingos, etc.), jogos que são magníficos negócios para quem os promovem e um risco desproporcional de perder dinheiro para quem aposta (Godino, Batanero, & Flores, 1998 citado por Lopes, 2006).

A Probabilidade serve de base teórica para outras ciências, como por exemplo, à Estatística. É essencial para a formação dos estudantes, visto que o acaso e os fenômenos aleatórios impregnam nossas vidas e nossa sociedade. A previsão do tempo, um diagnóstico médico, um estudo sobre a possibildade de contratar um seguro de vida, são exemplos em que a probabilidade não é uma propriedade física tangível, mas um grau de percepção ou crença que a pessoa tem na possibilidade de ocorrência ou não daquele evento (Batanero, 2006).

O ensino de conceitos probabilísticos não é fácil, "os conteúdos pertinentes à Análise Combinatória e ao Cálculo de Probabilidades, [...] costumam trazer desconforto não apenas aos estudantes, mas também aos professores" (São Paulo, 2008, p. 9).

O esforço para encontrarmos propostas atrativas tem de ser maior nos casos em que a matéria a ser estudada é mais "árdua". Como exemplo, todos os conteúdos de probabilidades apresentam dificuldades para os alunos do Ensino Médio, por isso, é conveniente que apresentemos esse tema de forma lúdica (Corbalán, 2002).

## O uso de jogos e da resolução de problemas para o ensino de probabilidade

Tradicionalmente, a prática mais freqüente no ensino de Matemática é aquela em que o professor apresenta o conteúdo oralmente, partindo de definições, exemplos, demonstrações de propriedades, seguidos de exercícios de aprendizagem, fixação e aplicação, e pressupõe-se que o aluno aprendeu pela reprodução. Considera-se que uma reprodução correta é evidência de que ocorrera a aprendizagem.

Essa prática de ensino mostrou-se ineficaz, é recente na história da Didática, a atenção ao fato que o aluno é agente da construção do seu conhecimento, pelas conexões que estabelece com seu conhecimento prévio num contexto de resolução de problemas. À medida que se redefine o papel do aluno perante o saber, é necessário também redimensionar o papel do professor que ensina Matemática no Ensino Médio. O professor deve ser agora um organizador da aprendizagem e escolher problemas que possibilitam a construção de conhecimentos.

A literatura sobre jogos e resolução de problemas para o Ensino Fundamental é razoavelmente extensa. Já para o Ensino Médio esta literatura é bastante escassa, e praticamente inexistente em língua portuguesa.

Uma situação de jogo exige do aluno habilidades de tentar, observar, analisar, conjecturar, verificar, compõe o raciocínio lógico que é uma da metas prioritárias do ensino de Matemática e a característica primordial do fazer ciência (Borin, 2004).

Durante o trabalho com o jogo, cabe ao professor a tarefa de questionar a fim de que os alunos também assumam uma postura crítica frente a quaisquer problemas. Alguns questionamentos possíveis são: Essa é a única jogada possível? Se houver alternativas, qual escolher e por que escolher esta ou aquela? Terminado o problema ou a jogada, quais os erros e por que foram cometidos? Ainda é possível resolver o problema ou vencer o jogo, se forem mudados os dados ou as regras? Algumas técnicas (formas) de resolução de problemas são observadas durante o trabalho com jogos, destacam-se: tentativa e erro; redução a um problema mais simples; resolução de um problema de trás para frente; representação do problema através de desenhos, gráficos ou tabelas e analogia a problemas semelhantes (Borin, 2004).

Grando (2007) tomando como referência as tendências de ensino de Matemática no Brasil, consideradas por Fiorentini (1995), apresenta uma ampla discussão sobre as diferentes formas de se conceber a utilização de jogos no ensino de Matemática no Brasil.

Uma das tendências consideradas por Fiorentini (1995), para o ensino de Matemática no Brasil, é a denominada tendência empírico-ativista. A pedagogia ativa considera o aluno como um ser ativo que aprende fazendo. A aprendizagem pelo aluno ocorre da simples manipulação e visualização de objetos. Já o professor, nesta tendência de ensino, passa a ser um orientador e facilitador da aprendizagem do aluno.

A concepção de jogo na tendência empírico-ativista ainda é bastante utilizada nas aulas de Matemática,

> grande parte das atividades com jogos e materiais manipulativos nas aulas de Matemática atuais na Educação Básica, ainda contemplam esta perspectiva empírico-ativista. Por exemplo, propõe-se um quebra-cabeça como o Tangran, solicita-se que os alunos montem as figuras com as sete peças, alguns alunos conseguem, outros não, [...] e a atividade termina. A partir daí o professor [...] segue com a aula normalmente, considerando que mesmo sem a sua intervenção, análise do jogo, [...] reflexões quanto aos aspectos relacionados à gestão de aula, competitividade, ética, socialização, etc., os alunos aprendem sozinhos, pela simples manipulação. A percepção sensorial propicia a aprendizagem do aluno. Assim, basta jogar que a criança necessariamente aprende (Grando, 2007, p. 45).

De nossa parte, entendemos que apenas o jogo pelo jogo não será capaz de produzir aprendizagem matemática no aluno. Os jogos podem ser utilizados para a construção dos conceitos matemáticos desde que exista uma intencionalidade e um bom planejamento pelo professor das atividades envolvendo o jogo. Várias aulas podem ser necessárias, e os conceitos matemáticos envolvidos no o jogo podem ser explorados através de situações-problema.

Ainda segundo Grando (2007, p. 45), “é comum o professor utilizar os jogos no final da aula, nos minutos restantes, para fixar certo conteúdo ou desenvolver uma habilidade. Raras vezes existe um trabalho intencionalmente planejado, com intervenções pedagógicas previstas pelo professor e com continuidade de várias aulas”.

Os PCN (Brasil, 2000) elegem a resolução de problemas como peça central para o ensino da Matemática, pois o pensar e o fazer se mobilizam e se desenvolvem quando o indivíduo está engajado ativamente no enfrentamento de desafios. O tratamento de situações complexas e diversificadas oferece ao aluno a oportunidade de pensar por si mesmo, construir estratégias de resolução e argumentações, relacionar diferentes conhecimentos e, enfim, perseverar na busca da solução. E, para isso, os desafios devem ser reais e fazer sentido.

Existem várias concepções sobre a resolução de problemas como uma metodologia de ensino. Utilizamos neste trabalho aquela que julgamos ser a mais coerente com as orientações preconizadas pelos PCN, ou seja, usamos o problema para ensinar Matemática. Assim, a situação-problema é o ponto de partida da atividade matemática e não a definição. Na análise dessas situações podemos utilizar recursos abordados na Matemática, lançar mão de situações-problema para a construção e aplicação de conceitos matemáticos. Em termos metodológicos, relativos ao ensino do conteúdo, conceitos, ideias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de situações-problema onde os alunos precisam desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-los. A situação-problema deve expressar aspectos chaves para o conceito que se quer estudar, o aluno deve ser levado a interpretar o enunciado da questão, estruturar a situação que lhe é apresentada, utilizar o que aprendeu para resolver outros problemas, o que exige transferências, retificações e rupturas. Assim, um conceito matemático se constrói articulado com outros conceitos através de uma série de generalizações.

De fato, “a resolução de problemas não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas uma orientação para a aprendizagem, pois proporciona o contexto em que se podem aprender conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas” (Brasil, 2000, p. 44).

Corbalán (2002) afirma que a relação entre jogos e resolução de problemas é mais estreita no caso em que consideramos jogos de estratégia.

Quando se pretende ensinar matemática através da resolução de problemas, os problemas deverão ser cuidadosamente escolhidos e servirão como um elemento para disparar o processo de construção do conhecimento, antes mesmo de sua apresentação em linguagem matemática formal, o foco está na ação por parte dos alunos. Preferencialmente, os problemas deverão ser escolhidos no contexto dos alunos.

A metodologia escolhida por Borin (2004) para o trabalho com jogos, para alunos da 5ª série, foi a de Resolução de Problemas, por considerá-la mais adequada para o desenvolvimento de uma postura crítica diante de qualquer situação que exija uma resposta. Sugere que o professor deve estudar cada jogo antes, o que só é possível jogando. É só com o estudo do jogo que o professor, terá condições de avaliar as dificuldades que os alunos terão que enfrentar, e também de propor questões, que irão auxiliá-los na descoberta de uma estratégia vencedora.

Moura (1992) afirma ser possível associar o jogo à resolução de problemas nas séries iniciais, e que essa união está intimamente vinculada à intencionalidade do professor,

> porém, fazer isto é muito mais que uma simples atitude, é uma postura que deve ser assumida na condução do ensino. E assumi-la com vistas ao desenvolvimento de conceitos científicos exige um projeto de ensino, inserido no projeto coletivo da escola. Fazer isto é dar um sentido humano ao jogo, à resolução de problemas e, sendo assim, à Educação Matemática (Moura, 1992, p. 52).

Tomando como base a tendência construtivista do ensino de Matemática, propomos a seguir uma intervenção didático-pedagógica para a utilização de um jogo associada à resolução de problemas, para a construção de um conceito matemático, composta dos seguintes sete momentos:

*1º) Utilização do jogo.* Inicialmente o professor apresenta o Jogo oralmente ou de forma escrita, e solicita que os alunos realizem algumas partidas. O professor apóia os alunos no esclarecimento de dúvidas, inevitáveis neste momento da ação. No início, os objetivos desta ação estão relacionados à familiarização com os nomes das peças, tabuleiro, e etc.. Posteriormente, o objetivo passa a ser o pleno domínio das regras do jogo, isto será de fundamental importância quando da resolução dos problemas. O desenvolvimento de competências, como disciplina, concentração, perseverança e sociabilidade devem ser valorizadas. O professor deve também solicitar aos alunos que anotem os resultados das jogadas (certas e erradas). É conveniente que os próprios alunos desenvolvam algum esquema para as anotações de suas jogadas. Além da possibilidade de análises futura sobre as jogadas, no sentido de perceber as melhores estratégias de jogo, consideramos que a necessidade dos próprios alunos em anotarem suas jogadas já é um princípio da sistematização do conceito matemático, e também, auxilia no aprendizado da transformação da linguagem materna em linguagem matemática. Sendo esta última, uma das principais dificuldades encontradas pela grande maioria dos alunos.

*2º) Questionamentos verbais.* Depois de realizadas algumas partidas, o professor lança alguns questionamentos verbais sobre o jogo utilizado. Como exemplos: O primeiro jogador tem mais chances de vitória?; Pode ocorrer empate?; Existe uma estratégia vitoriosa?; A estratégia pode mudar durante a realização do jogo?; e etc. (estamos supondo o uso de jogos de estratégia). Num primeiro momento, os alunos oferecerão respostas intuitivas. As respostas corretas, matematicamente demonstradas, deverão ser obtidas durante as resoluções dos problemas. Isto pode favorecer o interesse ou pelo menos minimizar os bloqueios dos alunos quando solicitados a resolverem problemas.

*3º) Formação dos grupos.* Formam-se grupos com uma média de 4 alunos cada. Além dos aspectos cognitivos, os aspectos emocionais, afetivos e morais são também importantes para o trabalho em grupo, principalmente quando associados a atividades lúdicas. Um aluno, provavelmente, fica intimidado em defender sua resposta, porém, após socializar seus resultados com os colegas de grupo sentir-se-á mais confiante para expor suas ideias.

*4º) Resolução de situações-problemas.* Os problemas previamente elaborados pelo professor, envolvendo situações de jogo são resolvidos pelos grupos. Os problemas são utilizados para ensinar matemática, suas soluções devem contemplar o conceito matemático que se deseja sistematizar. Entretanto, em nenhum momento o professor deve mencionar o nome do conceito matemático. Os alunos devem utilizar sua própria linguagem para as soluções dos problemas. Isto também pode ser considerado um princípio de sistematização do conceito matemático que se pretende estudar.

*5º) Plenária.* O professor escolhe um dos grupos para apresentar sua solução. Posteriormente, em uma pequena plenária discutem-se as soluções (certas e erradas) apresentadas pelos outros grupos. Soluções alternativas e soluções melhores elaboradas devem ser destacadas.

*6º) Sistematização.* Após o trabalho com os problemas, é que será realizada a sistematização do conceito e/ou conteúdo matemático através do rigor e do formalismo característicos dessa ciência. Apresentam-se neste momento definições e propriedades do conceito estudado. Como os alunos, já trabalharam intuitivamente estes conceitos, serão mais acessíveis (menos resistentes) ao rigor da Matemática.

*7º) Resolução de problemas de aplicação.* Após a sistematização do conceito matemático o professor trabalha com os alunos (em grupo ou individualmente) a solução de vários problemas envolvendo o conceito estudado. Os problemas podem ainda envolver situações do jogo ou serem aqueles problemas-padrão encontrados e selecionados do livro texto. As soluções para estes problemas serão obtidas através do emprego das definições, propriedades, lemas e teoremas anteriormente sistematizados em sala de aula. É necessário que o professor reforce o uso das novas terminologias próprias ao assunto. O objetivo principal desta ação é provocar nos alunos uma fixação dos conteúdos estudados, e reforçar o desenvolvimento de atitudes e habilidades na resolução de problemas. Estamos neste momento ensinando os alunos a resolver problemas.

Apresentamos na sequência o jogo proposto e algumas situações-problema que podem ser utilizadas no 4º momento da intervenção pedagógica, para o estudo de alguns conceitos básicos de Probabilidade.

## O jogo Mini-Bozó

O jogo proposto é original utiliza dois dados e pode ser disputado por vários jogadores. É uma simplificação de um jogo bastante popular no estado do Mato Grosso do Sul - Brasil, conhecido como Bozó. A simplificação efetuada foi motivada pelo fato que nosso objetivo é utilizar o jogo para ensinar conceitos básicos (iniciais) de Probabilidade, o que não seria adequado através do jogo Bozó, tendo em vista que este utiliza cinco dados. O leitor interessado poderá conhecer as regras do jogo Bozó em Brasil (2010).

*Objetivo*: preencher todo o tabuleiro, de modo a obter mais pontos que o(s) adversário(s).

*Material*: dois dados de cores diferentes (vermelho e branco), um copo não transparente, papel e caneta para registro dos pontos, e um tabuleiro para cada jogador.

*Regras*:

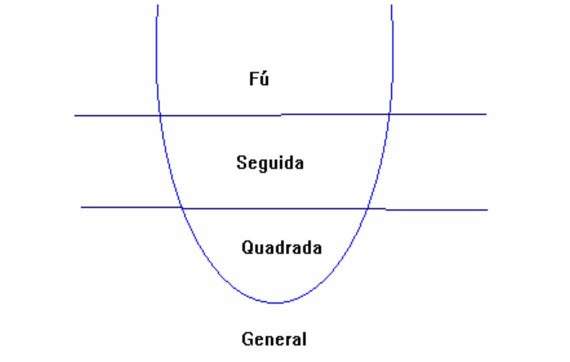
1. Pode ser disputado por duas pessoas ou mais, não existe limite no número de jogadores, mas um número excessivo de jogadores influencia no tempo do jogo.

2. Em cada jogada, o jogador poderá efetuar até dois lançamentos. O primeiro lançamento é feito sempre com os dois dados. Se o jogador optar pelo segundo lançamento poderá fazê-lo novamente com os dois dados ou reservar um dos dados e efetuar o segundo lançamento com apenas um dado.

3. Em toda jogada, o jogador deve obrigatoriamente marcar uma casa do seu tabuleiro. Caso não exista possibilidade de marcação ele deve cancelar uma das casas ainda não marcada, fazendo um **X** sobre a casa que escolheu. Cada casa só pode ser marcada ou cancelada uma única vez.

4. O jogo termina quando todos os jogadores preencherem suas casas em seus respectivos tabuleiros. Cada jogador soma seus pontos, e ganha aquele que obteve a maior pontuação.

*O tabuleiro*:




*A pontuação*:

Fú: duas faces distintas, mas não em sequência; vale a soma das faces.

Seguida: duas faces distintas em sequência; vale 20 pontos.

Quadrada: duas faces iguais, mas diferente de 6; vale 30 pontos.

General: duas faces iguais a 6; vale 50 pontos.

Quando se obtém Seguida, Quadrada ou General na primeira tentativa de lançamento, é dito “de boca”, e adicionam-se 5 pontos ao valor original da casa. Por exemplo, se conseguir Quadrada no primeiro lançamento chama-se “Quadrada de boca” e marcam-se 35 pontos em vez de 30.

*Comentários sobre o jogo*: Consideramos o jogo Mini-Bozó como sendo um Jogo de Estratégia, mas não no sentido definido em Borin (2004). Como o jogo utiliza dados então o fator sorte não pode ser totalmente desprezado. Também, é impossível a determinação de uma estratégia sempre vitoriosa. Assim, o jogo nunca perde o sentido como jogo, e cada partida será provavelmente diferente da partida anterior. Toda jogada é pontuada, entretanto se a casa correspondente àquela pontuação já estiver marcada a pontuação deve ser desconsiderada, e deve-se cancelar uma casa fazendo um **X** sobre a casa escolhida. Como o tabuleiro é composto de 4 casas então cada jogador efetua exatamente 4 jogadas, pois em cada jogada ele marca ou cancela uma das casas do seu tabuleiro. A estratégia pode variar dependendo da posição de momento do jogo. Por exemplo, na primeira jogada, com todas as casas desmarcadas, se o jogador obteve (2, 6) no seu primeiro lançamento, então a melhor estratégia será reservar o dado com a face 6 e lançar novamente o outro dado. Agora, nesta mesma situação, se o objetivo do jogador for obter a casa Seguida, a melhor estratégia será reservar o dado com a face 2, pois neste caso terá duas chances em 6 de obter Seguida, ou seja, obter as faces 1 ou 3, enquanto que se reservar o dado com a face 6 terá apenas uma chance em 6 de obter Seguida, ou seja, obter a face 5. Quando da necessidade de se cancelar uma casa, a melhor estratégia pode não ser cancelar as casas “mais difíceis” (com menor probabilidade de ocorrerem), isto depende da pontuação já obtida pelo(s) outro(s) jogador(es). Obviamente, na casa cancelada o jogador marcará zero ponto.

No jogo Mini-Bozó cada jogador, em cada jogada, poderá efetuar até dois lançamentos. Para o primeiro lançamento, o jogador sempre utiliza os dois dados, o que corresponde ao Experimento Aleatório “jogar dois dados simultaneamente e observar as faces superiores”. Podemos considerar cada resultado possível, desse experimento aleatório, como sendo um par ordenado de números ($a$, $b$) em que $a$ representa o resultado no dado vermelho e $b$ o resultado no dado branco. Assim, teremos o Espaço Amostral, que será denotado por S, constituído dos seguintes 36 elementos: S = {(1; 1), (1; 2), (1; 3), (1; 4), (1; 5), (1; 6), (2; 1), (2; 2), (2; 3), (2; 4), (2; 5), (2; 6), (3; 1), (3; 2), (3; 3), (3; 4), (3; 5), (3; 6), (4; 1), (4; 2), (4; 3), (4; 4), (4; 5), (4; 6), (5; 1), (5; 2), (5; 3), (5; 4), (5; 5), (5; 6), (6; 1), (6; 2), (6; 3), (6; 4), (6; 5), (6; 6)}. Agora, para o segundo lançamento o jogador terá a opção de utilizar os dois dados novamente ou reservar um dos dados e fazer o lançamento de apenas um dos dados. Neste caso, se utilizar os dois dados, teremos para este segundo lançamento o mesmo Espaço Amostral S do primeiro lançamento, e se utilizar apenas um dado teremos o Espaço Amostral $S_1$ = {1, 2, 3, 4, 5, 6} que corresponde ao Experimento Aleatório "jogar um dado e observar a face superior".

Na sequência, e para a resolução dos problemas, quando dizemos que o jogador utilizou apenas o primeiro lançamento do jogo Mini-Bozó estamos considerando o Experimento Aleatório que consiste de um único lançamento dos dois dados, ou seja, estamos considerando o Espaço Amostral S.

Depois de realizado o jogo, o professor pode fazer os questionamentos abaixo.

O jogador deverá sempre aproveitar o segundo lançamento?

O jogador terá mais chances em marcar a casa Quadrada do que a Seguida?

## Espaço Amostral, Evento e Definição Clássica de Probabilidade

Formulamos a seguir algumas situações-problema que poderão ser utilizadas para a sistematização do conceito de probabilidade na concepção de Laplace. Vamos supor na sequência a utilização de dois dados com faces equiprováveis. Para cada um dos problemas, fornecemos uma sugestão de solução que pode ser utilizada pelo professor.

Para a solução dos problemas os alunos deverão utilizar-se de sua própria linguagem. Não devemos exigir neste momento nenhum formalismo característico da Matemática. O importante é que os alunos apreendam e reconstruam o conceito matemático. Apenas no final dos trabalho de cada seção é que o professor deverá sistematizar o novo conceito estudado. É conveniente privilegiar também o trabalho e as discussões das soluções apresentadas entre os grupos.

*Problema 1*. Quais são os pontos possíveis para a casa Fú no jogo Mini-Bozó?

*Solução.* Independentemente do fato do jogador ter utilizado um ou dois lançamentos, são válidos para a casa Fú os casos onde as duas faces são distintas, mas não em sequência, ou seja, (1; 3), (1; 4), (1; 5), (1; 6), (2; 4), (2; 5), (2; 6), (3; 1), (3; 5), (3; 6), (4; 1), (4; 2), (4; 6), (5; 1), (5; 2), (5; 3), (6; 1), (6; 2), (6; 3) ou (6; 4).

Como para a casa Fú vale a soma das faces, podemos obter neste caso as seguintes pontuações: 4, 5, 6, 7, 8, 9 ou 10. Portanto, a casa Fú poderá receber uma pontuação mínima de 4 e máxima de 10 pontos.

*Problema 2.* Se o jogador utilizar apenas o primeiro lançamento do jogo Mini-Bozó, quais são suas chances de marcar a casa Fú? Justificar sua resposta.

*Solução.* Temos neste caso os 36 resultados possíveis descritos no Espaço Amostral S. Da solução do *problema 1*, o jogador marca a casa Fú se ocorrer um dos seguintes 20 casos: (1; 3), (1; 4), (1; 5), (1; 6), (2; 4), (2; 5), (2; 6), (3; 1), (3; 5), (3; 6), (4; 1), (4; 2), (4; 6), (5; 1), (5; 2), (5; 3), (6; 1), (6; 2), (6; 3) ou (6; 4). Portanto, o jogador terá 20 chances em 36 de marcar a casa Fú se utilizar apenas o primeiro lançamento do jogo Mini-Bozó.

O professor deve explorar que quando lançamos dois dados (Experimento Aleatório) não sabemos qual resultado irá ocorrer. Entretanto, sabemos quais serão os resultados possíveis (Espaço Amostral). A representação de todos os resultados possíveis em uma tabela de dupla entrada é bastante conveniente. A utilização da árvore de possibilidades também deve ser incentivada.

*Problema 3.* Se o jogador utilizar apenas o primeiro lançamento do jogo Mini-Bozó, quais são suas chances de marcar 5 pontos na casa Fú? Justificar sua resposta.

*Solução.* De maneira análoga ao *problema 2*, temos que o Jogador marcará 5 pontos nos 2 seguintes casos: (1; 4) ou (4; 1). Portanto, o jogador terá 2 chances em 36 de marcar 5 pontos na casa Fú se utilizar apenas o primeiro lançamento do jogo Mini-Bozó.

*Problema 4.* Se o jogador utilizar apenas o primeiro lançamento do jogo Mini-Bozó, quais são suas chances de marcar 7 pontos na casa Fú? Justificar sua resposta.

*Solução.* Ainda da solução do *problema 2*, temos que o jogador marcará 7 pontos nos seguintes 4 casos: (1; 6), (6; 1), (2; 5) ou (5; 2). Portanto, o jogador terá 4 chances em 36 de marcar 7 pontos na casa Fú se utilizar apenas o primeiro lançamento do jogo Mini-Bozó.

Das soluções dos *problemas 3* e *4* concluímos que se o jogador utilizar apenas o primeiro lançamento do jogo Mini-Bozó será mais provável marcar 7 do que 5 pontos na casa Fú. Quando da realização do 1º momento da intervenção pedagógica, ou seja, da "Utilização do Jogo", os alunos deverão perceber que algumas pontuações da casa Fú ocorrem com maior frequência do que outras. Isto pode ser explorado pelo professor, e significa que intuitivamente já estamos trabalhando o conceito de probabilidade. O problema a seguir também tem este mesmo objetivo.

*Problema 5.* Se o jogador utilizar apenas o primeiro lançamento do jogo Mini-Bozó, ele terá mais chances em marcar a casa Seguida do que a Quadrada? Justificar sua resposta.

*Solução.* (a) Para marcar a casa Seguida o jogador deverá obter um dos seguintes casos: (1; 2), (2; 1), (2; 3), (3; 2), (3; 4), (4; 3), (4; 5), (5; 4), (5; 6) ou (6; 5). Assim, terá 10 chances em 36 para marcar a casa Seguida, considerando-se que utilizou apenas o primeiro lançamento do jogo Mini-Bozó.

(b) Para marcar a casa Quadrada o jogador deverá obter um dos seguintes casos: (1; 1), (2; 2), (3; 3), (4; 4) ou (5; 5). Assim, terá 5 chances em 36 para marcar a casa Quadrada, considerando-se que utilizou apenas o primeiro lançamento do jogo Mini-Bozó.

Portanto, de (a) e (b) concluímos que o jogador terá mais chances de marcar a casa Seguida, considerando-se que utilizou apenas o primeiro lançamento do jogo Mini-Bozó.

Para as resoluções dos *problemas 2, 3, 4* e *5* podemos observar que, intuitivamente, já estamos calculando a probabilidade (chance) como:

$$\text{probabilidade} = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}},$$

ou seja, estamos utilizando a resolução dos problemas para que os alunos possam construir e/ou reconstruir a Concepção Clássica de Probabilidade.

Após o trabalho com problemas como os acima mencionados, o professor poderá iniciar a sistematização dos conceitos de Experimento Aleatório, Evento, Espaço Amostral, Evento

Elementar e apresentar a Definição de Probabilidade de Laplace (6º momento da intervenção pedagógica). Todos estes conceitos já foram trabalhados nas soluções dos problemas, entretanto em nenhum momento foram mencionados. Para o Ensino Fundamental os PCN (Brasil, 2000) recomendam que se deve evitar a teorização precoce. A formalização matemática desses conceitos deve ocorrer a partir da segunda série do Ensino Médio.

A partir da sistematização dos conceitos outros problemas podem ser trabalhados como forma de reter os conceitos matemáticos estudados (7º momento da intervenção pedagógica). Agora, os nomes dos conceitos já definidos devem ser utilizados e reforçados pelo professor. Os alunos devem se acostumar com as novas nomenclaturas: evento, espaço amostral e probabilidade. O termo "probabilidade" irá aparecer pela primeira vez no *problema 6*.

## Soma e produto de probabilidades

O objetivo desta seção é resolver problemas que envolvem soma e/ou produto de probabilidades. Geralmente os alunos têm muitas dificuldades em saber quando devem somar ou multiplicar probabilidades. Em linhas gerais, se necessitamos que exigências sucessivas sejam satisfeitas, então usamos o produto. Agora, quando podemos satisfazer uma exigência ou outra, então usamos a soma.

*Problema 6.* Qual a probabilidade do jogador marcar a casa Quadrada no jogo Mini-Bozó?

Solução.

Neste caso, o jogador dispõe de até dois lançamentos, e utilizará ou não o seu possível segundo lançamento dependendo dos pontos que obteve no primeiro lançamento. Como o objetivo do jogador é marcar a casa Quadrada, dois casos devem ser considerados:

*(a)* obtém (1; 1), (2; 2), (3; 3), (4; 4) ou (5; 5) no primeiro lançamento do jogo Mini-Bozó. Temos neste caso a probabilidade $p_1 = \frac{5}{36}$.

*(b)* obtém faces distintas no primeiro lançamento do jogo. Reserva um dos dados e lança novamente o outro dado obtendo a mesma face do dado já reservado. Temos neste caso a probabilidade $p_2 = \frac{30}{36} \text{x} \frac{1}{6}$.

Portanto, se ocorrer o caso *(a)* ou *(b)* o jogador marcará a casa Quadrada. Assim, a probabilidade pedida será:

$$p = p_1 + p_2 = \frac{5}{36} + \frac{30}{36} \text{x} \frac{1}{6} = \frac{60}{216} \cong 0{,}27777 \text{ ou } 27{,}78\%.$$

Observar que no caso *(a)* do *problema 6* não consideramos o caso (6; 6), nesta situação o jogador marcará a casa General e não a Quadrada. Ainda no caso *(a)* devemos observar que como o jogador já marcou a casa Quadrada em seu primeiro lançamento com os dois dados, então ele não usará o seu possível segundo lançamento nesta jogada do jogo Mini-Bozó.

*Problema 7.* Qual a probabilidade do jogador marcar a casa General no jogo Mini-Bozó?

*Solução.*

Como o objetivo do jogador é marcar a casa General, três casos devem ser considerados: *(a)* obteve duas faces 6 no seu primeiro lançamento, ou seja, obteve (6; 6). Temos neste caso a probabilidade $p_1 = \frac{1}{36}$.

*(b)* obteve uma face 6 no primeiro lançamento, ou seja, obteve um dos 10 seguintes resultados: (1; 6), (6; 1), (2; 6), (6; 2), (3; 6), (6; 3), (4; 6), (6; 4), (5; 6) ou (6; 5). Reserva o dado com a face 6. Lança o outro dado e obtém a face 6. Temos neste caso a probabilidade $p_2 = \frac{10}{36} \text{ x } \frac{1}{6}$.

*(c)* não obteve a face 6 no primeiro lançamento, ou seja, obteve um dos 25 seguintes resultados: (1; 1), (1; 2), (1; 3), (1; 4), (1; 5), (2; 1), (2; 2), (2; 3), (2; 4), (2; 5), (3; 1), (3; 2), (3; 3), (3; 4), (3; 5), (4; 1), (4; 2), (4; 3), (4; 4), (4; 5), (5; 1), (5; 2), (5; 3), (5; 4) ou (5; 5). Lança novamente os dois dados e obtém (6; 6). Temos neste caso a probabilidade $p_3 = \frac{25}{36} \text{ x } \frac{1}{36}$.

Portanto, se ocorrer o caso *(a)* ou *(b)* ou *(c)* o jogador marcará a casa General. Assim, a probabilidade pedida será:

$$p = p_1 + p_2 + p_3 = \frac{1}{36} + \frac{10}{36} \text{ x } \frac{1}{6} + \frac{25}{36} \text{ x } \frac{1}{36} = \frac{121}{1296} \cong 0{,}09336 \text{ ou } 9{,}34\%.$$

Podemos formular vários outros problemas, envolvendo situações do jogo Mini-Bozó, para a sistematização dos conceitos: Probabilidade Condicional, Eventos Independentes, Probabilidade da União de dois Eventos, Teorema da Probabilidade Total e Teorema de Bayes.

## Considerações finais

O objetivo principal de nossa proposta didático-pedagógica é fazer com que os próprios alunos construam/reconstruam o conceito probabilístico, com a adequada e imprescindível participação do professor. Utilizamos os problemas para ensinar matemática (4º momento), e também utilizamos matemática para resolver problemas (7º momento).

Todos os problemas refletem situações de jogo, ou seja, usamos o jogo não apenas para motivar os alunos, mas como desencadeador de aprendizagem. As situações-problema aqui apresentadas são originais, e foram formulados no sentido de contemplar em suas resoluções o conceito probabilístico a ser estudado. A associação do jogo com a resolução de problema torna as aulas mais atraentes e participativas, os alunos tornam-se ativos na construção de seu próprio conhecimento. O que buscamos é o desenvolvimento do raciocínio dedutivo do aluno e não a memorização de fórmulas. A memorização pode ser temporária, mas o desenvolvimento do raciocínio e a apreensão do conhecimento são para toda a vida.

A metodologia de trabalho com jogos e resolução de problemas aqui sugerida segue a tendência construtivista do ensino de Matemática. Nesta tendência, “a preocupação é com a construção do conceito pela criança, estando esta ativa nesta construção. O professor é o mediador e facilitador na aprendizagem do aluno, intervindo e problematizando” (Grando, 2007, p. 47).

Mudar a forma de se ensinar Matemática não é tarefa fácil. Todos recebemos o seu ensino na forma chamada “tradicional”, alguns poucos aprendem, mas a grande maioria dos alunos não consegue perceber a grandeza e a beleza dos conceitos matemáticos. O uso de Jogos e da Resolução de Problemas acarreta mais trabalho ao professor, mas acreditamos que se adequadamente utilizados pode contribuir significativamente com a melhoria do processo de ensino e aprendizagem.

Segundo os PCN não existe um caminho único e melhor para o ensino de Matemática. "No entanto, conhecer diversas possibilidades de trabalho em sala de aula é fundamental para que o professor construa sua prática" (Brasil, 2000, p. 42).

O trabalho com conteúdos de Probabilidade é considerado difícil por muitos professores. Assim, nossa contribuição está em oferecer uma proposta de ensino diferente, não contemplada nos livros didáticos, a qual pode subsidiar e colaborar com a prática de sala de aula de professores que ensinam os conceitos iniciais de Probabilidade.

## Bibliografia e referências


Batanero, C. (2006). Razonamiento probabilístico em la vida cotidiana: Um desafio educativo. In P. Flores, & J. Lupiáñez (Ed.), *Investigación em el aula de matemática*. *Estadística y Azar*. Granada: Sociedad de Educación Matemática Thales.

Borin, J. (2004). *Jogos e resolução de problemas*: Uma estratégia para as aulas de matemática. São Paulo: IME-USP.

Brasil. (2000). Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais*: *Matemática* (2ª ed.). Rio de Janeiro: DP&A.

Brasil. (2002). (Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros curriculares nacionais*: *Matemática* ($PCN_+$). Brasília: MEC/SEMT.

Brasil. (2010). Ministério da Educação. Portal do professor. *A probabilidade do Bozó*. Recuperado de http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula= 1124.

Corbalán, F. (2002). Juegos matemáticos para secundaria y bachillerato. Madrid: Síntesis.

Fiorentini, D. (1995). Alguns modos de ver e conceber o ensino de matemática no Brasil. *Zetetiké*. Campinas, 4, 1-37.

Grando, R. C. (2007). Concepções quanto ao uso de jogos no ensino da matemática. *Revista de Educação Matemática*, 12, 43-50.

Lopes, C. A. E. (2006). A estatística e a probabilidade na educação básica e a formação dos educadores matemáticos. In *Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*, 3. Curitiba: SBEM.

Morgado, A. C., Carvalho, J. B. P., Carvalho, P. C. P., & Fernandez, P. (2004). *Análise Combinatória e Probabilidade* (6ª ed.). Rio de Janeiro: SBM.

Moura, M. O. (1992). *O jogo e a construção do conhecimento matemático*. São Paulo: FDE, (Série Idéias, 10).

National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

São Paulo. (2008). Secretaria de Educação. *Caderno do professor*: *Matemática*. São Paulo: SEE, (Ensino Médio 2ª série, 3º bimestre).