

#### Cecilia González

Centro de Estudios en Didácticas Específicas (CEDE). Universidad Nacional de General San Martín (UNSAM).

Argentina cecilia gonzalez@hotmail.com

#### Leonardo Lupinacci

Centro de Estudios en Didácticas Específicas (CEDE). Universidad Nacional de General San Martín (UNSAM).

Argentina leolupinacci@yahoo.com.ar

#### Resumen

La presente propuesta se encuadra en la formación continua de profesores de matemática integrando aspectos del saber geométrico, aspectos propios de los entornos de geometría dinámica y la modalidad de taller de resolución de problemas. De esta manera, partiendo de la resolución de situaciones matemáticas a través de entornos informáticos de geometría dinámica, se propone reflexionar acerca de la implementación de tales entornos en las aulas de matemática y acerca de las ventajas y limitaciones que tales prácticas conllevan. Así mismo, se plantea también una valorización de la visualización que proporcionan los entornos dinámicos en función de la elaboración de conjeturas como paso previo a la tarea de validación.

Palabras Clave: Formación Docente Continua, Educación Matemática, Geometría, Tics, Geometría Dinámica, Software Libre, Geogebra.

#### Pertinencia de la propuesta y marco de referencia

El presente trabajo se encuadra en el marco de un proyecto de investigación cuyo tema de estudio es "Geometría y TICs: estudio didáctico de propuestas de enseñanza en la escuela secundaria". Esta investigación se realiza desde el área Didáctica de la Matemática del CEDE

(Centro de Estudios en Didácticas Especificas) perteneciente a la Universidad Nacional de San Martín (UNSAM) en Argentina.

En particular, nuestra propuesta se encuadra en la formación continua de profesores promoviendo el uso y el análisis de entornos tecnológicos en función de su implementación en las aulas de matemática<sup>1</sup> para la enseñanza de la geometría.

Respecto a esto último, destacamos que la propuesta no focaliza en la enseñanza del manejo de los entornos tecnológicos, sino en la enseñanza da la matemática, la educación matemática y en el análisis de cómo dichas herramientas tecnológicas influyen en estas prácticas.

Pero para que dichos entornos tecnológicos trasciendan los ámbitos sociales y científicos y puedan convertirse realmente en una herramienta en función de la enseñanza de la matemática, es necesaria la conjunción de ciertos factores que al día de hoy pareciera no estar del todo resueltos.

Numerosos y reconocidos didactas han estudiado estos factores, focalizando en las problemáticas que genera la inserción de las tecnologías informáticas a las clases de matemática:

La inserción, espectacular y creciente, día a día, de las computadoras en la vida cotidiana y en la mayoría de los sectores profesionales ocultan una realidad cuya consideración se revela decisiva si se desea juzgar bien el estancamiento que se comprueba en el área de educación. El grado de inserción varía en función del lugar, del estilo de la institución, de la mentalidad moderna o arcaica de sus actores, de la concepción desde la cual se comprende y usa a la informática. La informatización del trabajo de secretaría, de contabilidad, de las actividades de gestión, de servicios de documentación y bibliotecas es susceptible de realizarse, y, de hecho, se realiza, en cualquier parte y abarca el seno del sistema educativo en sí mismo, desde el nivel de administración central hasta el de cada establecimiento. En este punto, ciertos observadores, notan actos de bloqueo que entorpecen los desarrollos en pedagogía informática; y dan cuenta de que las dificultades de introducir Informática en el sistema educativo parecen ser más grandes cuanto más se relacionan con los procesos didácticos, siendo preconizado a título de innovación. (Chevallard, Y., 1992, 186)

Estas problemáticas que subyacen a la integración de las tecnologías informáticas con la enseñanza, se ven acompañadas y complementadas con otros factores tales como la pobre legitimidad educativa de la tecnología en contraposición a su alta legitimidad social y científica (Artigue, 2000), aspecto que muchas veces conduce a una utilización de los entornos informáticos o de una forma automatizada como herramienta para internalizar las prácticas matemáticas tradicionales o, por otro lado, como un mecanismo netamente motivador o de innovación que no aprovecha realmente las potencialidades que dichos entornos ofrecen.

Esta modalidad de talleres de formación continua de profesores de matemática viene siendo desarrollada desde el año 2010 en el marco del proyecto "Geometría y TICs: estudio didáctico de propuestas de enseñanza en la escuela secundaria" en diversas escuelas públicas de la zona de injerencia de la Universidad Nacional de San Martín en Buenos Aires y en la III Reunión Pampeana de Educación Matemática en La Pampa, Argentina.

Esto nos lleva a plantearnos algunas cuestiones acerca de la integración de las tecnologías con las prácticas docentes, las cuales nos parecen muy importantes y deberían ser consideradas seriamente en un proyecto de formación continua de profesores:

- Para que el profesor pueda elegir entre diferentes tecnologías disponibles, debe conocerlas. No podemos desconocer que esto es un esfuerzo adicional para el profesor. Deben existir políticas educativas que acompañen y reconozcan estas necesidades.
- Es indispensable atender a las dimensiones organizativas de la práctica pedagógica. Hace falta establecer y brindar las condiciones que faciliten la integración institucional. No basta con tener buenos profesionales, es preciso también tener buenas condiciones institucionales donde éstos puedan desempeñarse profesionalmente, condiciones en este caso que contemplen los insumos, la capacitación continua y los tiempos necesarios para la implementación de tales prácticas pedagógicas.
- La problemática de la **integrabilidad de la tecnología** en las clases de Matemática no puede resolverse por las actividades puntuales que desarrollan algunos profesores en sus clases. Son necesarios los trabajos de investigación que legitimen el empleo de recursos informáticos desde la propia Didáctica de la Matemática.

Centrándonos específicamente a la problemática de la inserción de los entornos informáticos de geometría dinámica en la educación matemática, los mismos permiten la realización de dibujos con la capacidad de ser modificados a través del movimiento de sus componentes, permitiendo así establecer las propiedades geométricas que se mantienen invariantes y traduciendo dichas propiedades geométricas en un fenómeno visual (Acosta Gempeler, 2004). De esta manera, esta interacción se convierte en un medio de reconocimiento y verificación de las propiedades de un dibujo, haciendo notar que los elementos invariantes durante las interacciones, serán únicamente aquellos que fueron definidos explícitamente a partir de propiedades geométricas: Esto crea entonces una distinción entre una construcción exacta o realizada a partir de ciertas propiedades, y un dibujo aproximado realizado a partir de la utilización de herramientas y ajustes.

Por otra parte, dichos entornos no sólo apuntan (o debieran apuntar) a la visualización, sino que la posibilidad de interactuar puede contribuir a la formación de hábitos para transformar, mentalmente o por medio de herramientas, un caso particular permitiendo a su vez el estudio de los elementos variables e invariantes (Arcavi y Hadas, 2000), lo que podría sentar las bases para posteriores validaciones de conjeturas.

Esto último remite a ciertas tensiones que se producen cuando se incorpora un software a la enseñanza, principalmente en cuanto a los procesos de visualización y los procesos de justificación: aparece en este caso una tensión entre la valorización de la visualización como herramienta de elaboración de conjeturas y como significante de los objetos y las propiedades geométricas implicadas en contraposición a una valoración de la generalización y la abstracción; donde pareciera que la visualización impide el trabajo de la validación, haciendo permanecer

dicha tarea en el terreno de la ostensión y generando justificaciones de las propiedades por el sólo hecho de "ser vistas".

Creemos, en relación a esto último y en concordancia con los autores antes citados, que la visualización y la interacción que permiten los entornos de geometría dinámica puede ser una herramienta muy potente a la hora de elaborar conjeturas, aunque esta característica no es intrínseca del entorno, sino de las situaciones problemáticas y las construcciones que se propongan.

De esta manera será la puesta en obra de actividades adecuadas y ricas en cuanto a su potencialidad de exploración y elaboración de conjeturas, lo que conllevará a una integración real de las herramientas informáticas, y más específicamente de los entornos de geometría dinámica, con las prácticas de enseñanza de la matemática en las aulas.

Así mismo, si bien el trabajo propuesto en esta ocasión se desarrolla únicamente a partir del uso del software Geogebra, el cuál fue elegido por sus potencialidades matemáticas y matemático didácticas y por su carácter de software libre, creemos fehacientemente en la necesidad de explorar diversos entornos, analizando las ventajas y limitaciones de cada uno de ellos y utilizándolos de acuerdo a los propósitos didácticos que se establezcan en torno a la enseñanza de la matemática. De esta manera, la utilización de un único software en la propuesta, responde principalmente a las limitaciones de tiempo.

#### Propuesta, etapas y tiempos

Nuestra propuesta se encuadra en la formación continua de profesores y entrelaza tres ejes fundamentales,

- El trabajo geométrico, que involucra las características propias de este saber
- El trabajo en un entorno de geometría dinámica, con las potencialidades y limitaciones que ofrece
- La modalidad de trabajo en taller

Cada uno de estos ejes tiene características que pueden ser analizadas por separado pero al ser parte de la misma propuesta se interrelacionan e influyen una sobre la otra. Desarrollaremos a continuación un análisis y fundamentación de las decisiones sobre las que se sustenta nuestro trabajo.

En este taller proponemos poner en primer plano a la Geometría, que en numerosas oportunidades resulta un área de escaso trabajo dentro de las clases de matemática. Esta ausencia de la Geometría, en el contexto de enseñanza actual, implica una pérdida muy importante de conocimiento y de desarrollo de actividades propias del hacer matemático.

La Geometría es un campo de estudio que favorece el desarrollo de la conjeturación, la argumentación deductiva y la modelización. La incorporación paulatina de un software puede aportar al estudio de las construcciones y las propiedades geométricas, tanto para visualizar más rápidamente la imposibilidad de solución, como la multiplicidad de las mismas y con esto favorecer el desarrollo del trabajo matemático.

Al proponer la utilización de la tecnología informática en la enseñanza de la matemática estamos considerando que dicha integración no es instantánea ni transparente e influye en las practicas educativas modificando no solo el objeto de enseñanza sino lo que significa enseñar y aprender. En este sentido, estamos de acuerdo con la concepción que plantea Manuel Castells en relación a que el estudio de las tecnologías informáticas necesita de aprendizajes abiertos en vez de cerrados; autónomos y críticos. De esta manera, aprender a manejar recursos tecnológicos supone aprender a aprender. (Castells, 2001)

La decisión de una actividad en el marco de la formación continua de profesores con la modalidad de taller, intenta dar lugar a la experimentación por parte de los participantes de las características del pensamiento geométrico enunciadas anteriormente, las potencialidades y limitaciones del uso de soft, la modificación de las practicas que conlleva la introducción de esta herramienta, la diferencia entre la elección de "un buen problema" para resolver con lápiz y papel y "un buen problema" para el trabajo en este entorno a partir de una forma de hacer matemática en la que la construcción del conocimiento se hace en forma colectiva, utilizando la exploración y discusión para el arribo a conclusiones generadas en conjunto.

Por lo tanto es objetivo del taller es que se vivencie y analice que la inserción de la tecnología informática en la enseñanza de la matemática **no es neutra**; incide tanto en las estrategias didácticas como en cuestiones de orden epistemológico y, al analizar las potencialidades y limitaciones del soft se intente no caer en especulaciones propias de las expectativas basadas en la incorporación de un nuevo medio como forma de superar enfoques tradicionales de enseñanza.

Intentaremos destacar que la **viabilidad** de una propuesta de enseñanza con uso de recursos informáticos contempla una realidad compleja en donde intervienen: los objetos de enseñanza, las condiciones institucionales, la organización de los tiempos didácticos, la formación de docentes y de alumnos en cuanto al empleo del software.

Algunas de las cuestiones acerca de las cuales proponemos reflexionar en el presente taller, analizando las mismas, debatiendo ideas y elaborando conclusiones entre todos los participantes son:

¿Cómo se ven afectados los procesos de validación de propiedades por los entornos de geometría dinámica? ¿La interacción con los elementos geométricos dinámicos puede favorecer la elaboración de conjeturas? ¿Cómo se puede entender a "la prueba" cuando trabajamos con dichos entornos? ¿El entorno se presenta como autosuficiente para resolver un problema matemático? ¿En qué condiciones? ¿Por qué? ¿Cómo afectan estas cuestiones a la hora de realizar una propuesta con este entorno en la clase de matemática?

De esta manera y a partir de estos interrogantes, los objetivos generales de la presente propuesta son:

- Reflexionar sobre la implementación de tecnología informática en la enseñanza de la Matemática.
- Reflexionar sobre las concepciones y enfoques de la enseñanza de la geometría subyacentes en los recursos informáticos.
- Revalorizar el empleo de la visualización en construcciones geométricas como paso
  previo a la justificación y cómo ambas actividades se potencian mediante el uso de un
  software de geometría dinámica.
- Explorar la potencialidad y limitaciones del soft Geogebra en la resolución de problemas geométricos
- Discutir y explorar algunas de las variables didácticas que proporciona el soft y resultan interesantes a considerar en el diseño de una propuesta didáctica.

Con tales fines, el taller está pensado para desarrollarse en **dos etapas**, una **primera** en la que se propone trabajar **una secuencia de problemas** y donde cada grupo podrá explorar el software con la posibilidad de consultar acerca de su manejo, arribando a conclusiones en una puesta en común. Posteriormente se plantea una **segunda etapa** en la que se separará a los participantes del taller en **dos grandes grupos con problemas diferentes**, pudiendo abarcar de esta manera en la puesta en común, diferentes aspectos de la actividad matemática y enriquecer las discusiones a partir de análisis desde perspectivas diferentes.

Así mismo, se plantea realizar previamente a la presentación de las actividades, una breve introducción que incluya la presentación del equipo, la consulta al publico del taller acerca de los conocimientos previos, la organización de las maquinas de acuerdo a esto último, y una breve presentación que explique la modalidad de trabajo y el marco de referencia.

# Descripción detallada de las características y tiempos dedicados en el taller

#### Introducción

Presentación del taller, del marco de referencia y de las actividades. (10 minutos)

#### Primera etapa

Exploración del entorno y resolución de problemas (30 minutos), puesta en común y exposición de conclusiones (20 minutos)

Los propósitos de la **actividad 1**<sup>2</sup> apuntan a que los participantes exploren el software Geogebra, vivencien su potencialidad y analicen una secuencia que propicie el trabajo matemático. Además se pretende iniciar, partiendo de las condiciones necesarias y suficientes para la construcción de paralelogramos, una discusión acerca de la validación: ¿serán suficientes las potencialidades "ostensivas" del software para el arribo de conclusiones y validaciones o es necesaria una demostración? ¿Esto no podría ser una demostración en un contexto determinado?

En la **actividad 2**, el propósito es utilizar la herramienta Protocolo de construcción que ofrece el programa, analizando las características que posee y la potencialidad didáctica que brinda. Descubriendo el protocolo de una construcción ya realizada, será posible argumentar con certeza de qué figura se trata, analizando los pasos de la construcción y diferenciando de esta manera las *primitivas de dibujo* de las *primitivas geométricas*. (Laborde; 1998).

### Segunda etapa

Resolución de problemas (30 minutos), puesta en común, exposición de conclusiones y cierre del taller (30 minutos)

En esta etapa se propone dividir a los asistentes del taller en dos grandes grupos (A y B), proponiendo a cada uno de ellos la resolución de una secuencia de actividades diferentes. Cada una de las secuencias constará con dos situaciones, siendo una un pedido de construcción y la otra la propuesta de probar una propiedad determinada. Esta división nos permitirá realizar un trabajo que abarque mayor variedad de propuestas y enriquecer los análisis posteriores a las resoluciones.

La inclusión de la **actividad 3** es interesante ya que la construcción no es posible. La exploración no permite encontrar argumentos que validen la imposibilidad de la construcción, lo cual hace necesario producir argumentos basados en conocimientos matemáticos que no se desprenden directamente de la interacción con el software.

La **actividad 4**, a diferencia de la anterior, permite elaborar conjeturas acerca de la construcción obtenida a partir de la interacción con el software. Por otro lado, dicho entorno ofrece también herramientas que permiten validar de forma "ostensiva" dichas conjeturas. Esto nos permitirá continuar las discusiones acerca de la validación comenzadas desde la actividad 1. Además se podrá, mediante la comparación de las actividades 3 y 4, analizar las potencialidades y limitaciones del software y de las propuestas didácticas para trabajar con dicho entorno.

En cuanto a las actividades a resolver el por el grupo B, la **actividad 5** centra su eje de resolución y discusión en la posibilidad que ofrece el entorno de suprimir herramientas para un trabajo concreto y, específicamente, en cómo esto puede ser utilizado en las clases de matemática, generando la necesidad de

-

Ver los enunciados de las actividades en el Anexo I

poner en juego ciertas herramientas o propiedades matemáticas que de otra manera no aparecerían en la resolución de un problema.

Finalmente, la **actividad 6**, apunta a un análisis similar al efectuado en la actividad 4, siendo su eje la discusión acerca de la consideración o no de las herramientas ostensivas de validación que ofrece el software dentro del aula de matemática.

# Referencias y bibliografía

Acosta Gempeler, M. (2004) *La Teoría Antropológica de lo Didáctico y las Nuevas Tecnologías*. Propuesta de comunicación para el primer congreso internacional de TAD. Barcelona: Universidad de Jaén. Disponible en: http://www4.ujaen.es/~aestepa/TAD/Comunicaciones/Acosta.pdf

Arcavi, A. & Hadas, N. (2003) El computador como medio de aprendizaje: ejemplo de un enfoque. *Documento de Trabajo del Grupo EM&NT. Área de Educación Matemática, Instituto de Educación y Pedagogía*. Cali: Universidad del Valle.

Artigue, M. (2000) Los aspectos de la instrumentación y de la integración de las tecnologías informáticas en la enseñanza de las matemáticas en el nivel secundario. En: *Congrès annuel du GDM*, *Postdam*, 2000. Disponible en: webdoc.gwdg.de/ebook/e/gdm/2000/artigue\_2000.pdf

Castells, M. (2001) La galaxia Internet. Barcelona: Plaza & Janés editores.

Chevallard, Y. (1992), Intégration et viabilité des objets informatiques. En B. Cornu

(Comp.) *L'ordinateur pour enseigner les mathématiques* (pp. 183-203) París: Nouvelle Encyclopédie Diderot.

Laborde, C. (1998) Cabri-geómetra o una nueva relación con la geometría En: L. Puig (Ed.) *Investigar y enseñar. Variedades de la Educación Matemática*. (pp. 33-48) Bogotá: Una empresa docente, Universidad de los Andes.

# **Anexo 1: Actividades propuestas**<sup>3</sup>

#### Primera etapa:

- 1. Realicen las siguientes construcciones:
- a) Construyan, si es posible, un cuadrilátero que no sea paralelogramo y que tenga dos lados opuestos iguales.
- b) Construyan, si es posible, un cuadrilátero que no sea paralelogramo y que tenga un par de lados opuestos paralelos.
- c) Construyan, si es posible, un cuadrilátero que no sea paralelogramo y que tenga dos lados opuestos iguales paralelos.

A partir de lo construido ¿Cuáles son las condiciones necesarias y suficientes para que un cuadrilátero sea un paralelogramo? ¿Qué diferencias encuentran entre la realización de dichas tareas utilizando lápiz y papel y utilizando el entorno de geometría dinámica? ¿Cómo piensan que se vería modificada su práctica de enseñanza utilizando dicho entorno?

2. Abran el archivo construcción.ggb. Analicen la figura e interactúen con ella.

¿Qué figura es la que aparece en pantalla? ¿Sigue siendo el mismo tipo de figura la que se obtiene cuando se desplazan los puntos A y B? ¿Cuáles son los argumentos en los que basan su respuesta?

Activen desde la opción del menú Vista, los comandos relacionados con la visualización de los pasos de la construcción. Analicen el protocolo de construcción de la figura e identifiquen que pasos de la construcción permitirían justificar o refutar su conjetura acerca del tipo de figura representada en pantalla.

¿Por que existen límites para los puntos A y B de manera que al moverlos desaparece la figura de la pantalla?

¿Qué ventajas puede tener el uso de la herramienta "Protocolo de Construcción" en las clases de matemática?

Las actividades presentadas a los asistentes del taller se verán complementadas con fragmentos del marco de referencia que fundamente las tareas realizadas. Además, se propondrán otras actividades similares para que los asistentes puedan seguir profundizando la propuesta posteriormente al dictado del taller. Ejemplos de estas actividades se enuncian en el Anexo 2.

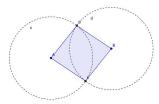


Figura 1: Imagen de la construcción presente en el archivo "construcción.ggb". (Las circunferencias permanecen ocultas)

#### Segunda etapa:

# Grupo A:

- 3. Construir un triángulo en el cual dos de sus bisectrices formen un ángulo recto.
- **4.** Dado un cuadrilátero cualquiera ABCD, determina un nuevo cuadrilátero cuyos vértices sean los puntos medios del primero. Establece qué tipo de cuadrilátero se forma. Fundamenten su respuesta

Analicen los argumentos que utilizaron para clasificar el cuadrilátero en cuestión. ¿Son los mismos argumentos que utilizarían si trabajaran con lápiz y papel?

¿Existe alguna diferencia entre las posibilidades de validación del problema 3 y 4? Explicar la respuesta.

# Grupo B

- 5. Construir un rombo con un ángulo de 30° sin usar la opción "ángulo dada su amplitud". ¿Qué argumentos utilizaron para realizar la construcción? ¿ Que conocimientos se pondrían en juego realizando la construcción del rombo pero sin la restricción del comando | "ángulo dada su amplitud"?
- 6. Construir un rectángulo y, sobre una de sus diagonales, determinar un punto P. Trazar segmentos paralelos a cada base como se muestra en la figura. ¿Cómo son las áreas del rectángulo superior izquierdo y del rectánguloinferior derecho? ¿Cómo se puede validar esto?

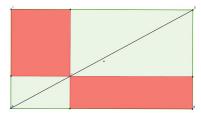


Figura 2: Imagen de la construcción correspondiente al problema 6.

#### Anexo 2: Problemas adicionales

Los tiempos del taller y cantidad de problemas propuestos fueron pensados en base a experiencias anteriores con docentes pero, conociendo la diversidad que puede presentarse en los grupos, en caso de contar con algún tiempo más para trabajar se incluirían los siguientes problemas. Además, problemas similares a los presentes en este anexo, se propondrán para que los asistentes profundicen los temas tratados posteriormente al dictado del taller.

1. Reproducir en la pantalla la siguiente figura de manera que al ampliar, las circunferencias sigan siendo tangentes.

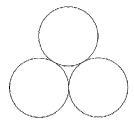


Figura 3: Imagen de la construcción solicitada en la actividad adicional nº 1

Esta actividad se eligió para que los participantes puedan explorar otro tipo de problema que fue formulado para utilizar una característica del software: para hacer una copia que pueda ampliarse y conservar la tangencia, es necesario construirla utilizando propiedades de las circunferencias y sus radios.

- **2.** Sea ABCD un paralelogramo y O un punto interior del mismo. ¿ Donde ubicarías el punto O de modo que la suma de las áreas de los triángulos OAB y ADC sea:
- a) menor que el área del paralelogramo?
- **b)** igual que el área del paralelogramo?

Responder las mismas preguntas pero con la condición de que el punto O sea un punto ubicado entre las paralelas AB y DC. ¿Hay una única posibilidad para ubicar el punto O? ¿Por qué?

Esta actividad plantea una situación de exploración y validación en la que el objetivo es encontrar el lugar geométrico del punto O en cada situación descripta. Surge la posibilidad de utilizar comandos diferentes a los de otras actividades en el momento de la exploración y permitiría analizar variantes en el uso o restricción de los comandos para que surjan argumentos determinados.

# Anexo 3: Información general del taller

Información General	
Título del Taller: Geometría y Tics. Una propuesta integradora para la formación docente	
continua en educación matemática.	
Autores: Cecilia González, Lupinacci Leonardo	
Institución: Centro de Estudios en Didácticas Específicas (CEDE) Universidad Nacional de	
General San Martín (UNSAM).	
País: Argentina	
Número de horas máximo conveniente	2 (dos)
Nivel educativo al que va dirigido el taller	Profesores de nivel secundario
Número máximo de personas	Se recomienda un máximo de 30 personas
Equipos audiovisuales o informáticos	Laboratorio de computación. Se recomienda al
requeridos	menos 1 computadora por cada dos asistentes
	al taller. Software Geogebra instalado en las
	computadoras. Proyector multimedia.