Análise de livros de cálculo a várias variáveis: o caso da comutatividade das derivadas parciais

Francisco Regis Vieira **Alves**
Departamento de Matemática, Instituto Federal de Educação, Científica e Tecnológica do Ceará - IFCE
Brasil
fregis@ifce.edu.br
Hermínio **Borges Neto**
Universidade Federal do Ceará - UFC
Brasil
hermínio@ufc.br

Resumo

Este trabalho constitui a análise de livros didáticos adotados num curso introdutório de Cálculo Diferencial e Integral a Várias Variáveis – CVV, com respeito à propriedade da comutatividade das derivadas parciais (teorema de Schwarz). Inicialmente, discutem-se alguns elementos pertinentes à transição interna do Cálculo em Uma Variável Real – CUV para o CVV. Em seguida, apresentam-se os autores escolhidos a partir de determinados critérios. Os dados são interpretados sob a perspectiva teórica de Duval (1991; 1993; 1995) e, com inspeção de cinco obras didáticas, destacam-se alguns indicadores que permitem afirmar que, do ponto de vista lógico-matemático, registra-se a diversidade de enunciados para o mesmo teorema que caracteriza a propriedade em foco; ocorre uma variância de registros que referenciam/denotam o objeto derivada parcial e mista; a exploração predominante de registros algébricos; identifica-se um repertório restrito de contra-exemplos além da ausência de tratamento para análise das hipóteses necessárias na verificação analítica do teorema.

Palavras-chave: Teorema de Schwarz, Livros Didáticos, Cálculo Diferencial e Integral, Representações Semióticas.

Sobre o ensino de cálculo

A quantidade de trabalhos e investigações científicas desenvolvidas no Brasil e no Exterior acerca do ensino/aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral em Uma Variável Real (CUV) é extensa e apresenta vigor crescente desde a década de 1980. No contexto de interesse destes estudos, observamos a atenção dispensada por autores reconhecidos internacionalmente no que diz respeito ao momento de transição do ensino escolar para o ambiente acadêmico, o que se dá no primeiro ano de estudos em que os aprendizes deparam, no *locus* acadêmico, um ensino compulsório de Cálculo nos cursos de licenciatura e bacharelado em Matemática no Brasil.

Por outro lado, identificamos a escassez de investigações no Brasil e no Exterior (RALHA; HIRST & VAZ, 2004) que envolvem questões mais profundas relacionadas ao ensino/aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral a Várias Variáveis (CVV). Com esta preocupação, exibimos a seguinte tabela caracterizando o que nomeamos de *transição interna do CUV para o CVV*. Na universidade, observamos esta transição no segundo ano de graduação.

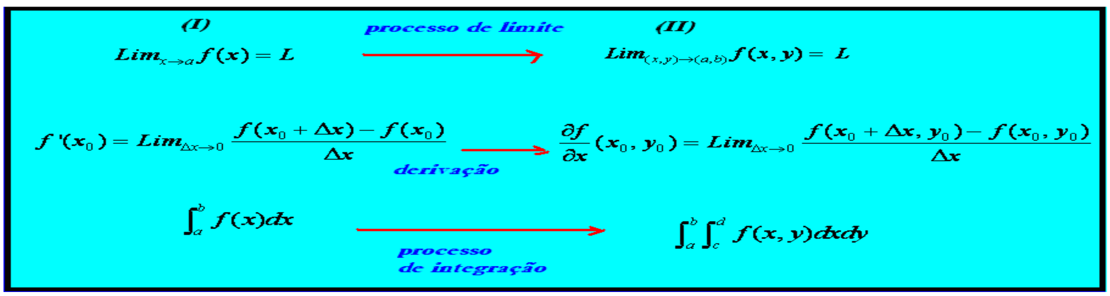

Figura 1: Quadro de transição interna do CUV para o CVV referente ao 2º ano de estudos acadêmicos.

Em virtude da necessidade de respeitar os limites de síntese deste trabalho, nos deter-nos-emos a uma rápida discussão sobre a *transição interna do CUV para o CVV*, no que se refere aos conceitos de *limite*, *derivada* e *integral*, para funções do tipo $y = f(x)$ e $z = f(x, y)$. No CUV, estes conceitos são denotados, respectivamente, por $\lim_{x\to a} f(x) = L$, $f'(a)$ e $\int_a^b f(x)dx$. No CVV, as mudanças notacionais são consideráveis, uma vez que os conceitos de *limite*, *derivada* e *integral* podem ser denotados por $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ ou $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ e $\int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy$. De imediato, observamos a mudança no caso da derivada para funções em duas variáveis reais, uma vez que, agora, podemos considerar duas taxas de variação $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Quando tomamos, por exemplo, a noção de limite no CUV, notamos que, de modo tradicional, os livros didáticos restringem a exploração deste conceito ao plano $\mathbb{R}^2$, explorando apenas duas formas de aproximação unidimensional do ponto $x = a$ (que denotamos por $x \to a^+$ ou $x \to a^-$), para a verificação da *existência* do *limite* indicado por $\lim_{x\to a} f(x) = L$. No caso do CVV, quando consideramos o *limite* $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$, as habilidades adquiridas pelos estudantes no caso do CUV na investigação de $\lim_{x\to a} f(x) = L$ nem sempre são exploradas e re-adaptadas. Destarte, algumas simbologias e a condição de *existência* descrita pela igualdade $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x)$ perdem seu sentido geométrico estudado no CUV.

Ademais, temos inúmeras formas de aproximação do par ordenado (a,b) no plano. De fato, quando nos referimos ao símbolo $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=L$ ou ainda $\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y)=L$, as técnicas que envolvem a aproximação dos pares ordenados $(x,y)\to(a,b)$, onde $x,y\in\mathbb{R}$, são mais sofisticadas. Por exemplo, antes de efetuar referido processo, tendo em vista prever o comportamento da imagem da função $f(x,y)$, no eixo das cotas (Oz), podemos considerar, neste processo de aproximação, os casos em que: $|x|=|y|$, $|x|>|y|$ e $|x|<|y|$. Além disso, o gráfico da função $y=f(x)$ está contido no $\mathbb{R}^2$, enquanto o gráfico de $f(x,y)$ está contido no $\mathbb{R}^3$. Outra técnica indicada consiste na análise dos *limites interados* da função $f(x,y)$.

Outro aspecto a ser destacado diz respeito ao caráter geométrico da noção de derivada. De fato, de modo sistemático, os livros de CUV explicam o significado de $f'(a)$ como o coeficiente angular da reta $(y-f(a))=f'(a)(x-a)$ que será tangente ao gráfico da função $y=f(x)$, no ponto $(a,f(a))\in\mathbb{R}^2$. De modo semelhante, quando temos a função $z=f(x,y)$, fixando-se a segunda variável $y=b$, podemos interpretar o símbolo $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$, de modo semelhante, como o coeficiente angular da reta $(z-f(a,b))=\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a)$ tangente à superfície no $\mathbb{R}^3$ descrita por $z=f(x,y)$, no ponto $(a,b,f(a,b))\in\mathbb{R}^3$, paralela ao plano xOz.

No caso do conceito de integral, por exemplo, é interessante comparar as notações das integrais definidas $\int_a^b f(x)dx$ e $\int_c^d\int_a^b f(x,y)dxdy$. No contexto do CUV, relacionamos o primeiro símbolo com o valor da área limitada entre as retas $x=a$, $x=b$, o gráfico da função $y=f(x)$ e o eixo Ox. Já no segundo caso, podemos obter outras formas de interpretação geométrica. Com efeito, o aluno pode deparar a seguinte formulação $\int_c^d\int_a^b dxdy$ que neste caso coincide com a noção de área, o que já estava familiarizado no CUV. Por outro lado, quando consideramos a extensão do conceito da integral de Riemann para funções do tipo $z=f(x,y)$, denotada agora por $\int_c^d\int_a^b f(x,y)dxdy$, *necessitamos de técnicas difíceis, uma vez que o domínio em* $\mathbb{R}^2$ *apresenta mais complicações do que a reta real* (HAIRER & WANNER, 2008, p. 330).

A primeira mudança neste contexto diz respeito à noção de volume que esta última integral pode assumir. No âmbito das aplicações, por exemplo, usamos *integrais simples* para encontrar o centro de massa de uma lâmina homogênea com densidade de área constante. Por outro lado, *com as integrais duplas, podemos encontrar o centro de massa de uma lâmina homogênea ou não homogênea* (LEITHOLD, 1982, p. 792). Outras mudanças conceituais podem ser discutidas, entretanto, tencionamos restringir nossa atenção a uma propriedade relacionada a um processo de derivação de funções em duas variáveis reais no âmbito das abordagens dos livros didáticos do Cálculo Diferencial e Integral a Várias Variáveis - CVV.

A escolha do conteúdo nos livros de cálculo a várias variáveis

Para efeito de nossa análise, os autores (LIMA, 2009; GUIDORIZZI, 1986; LEITHOLD, 1982; STEWART, 2004; SWOKOWSKI, 1983) foram escolhidos com amparo nos seguintes critérios: (i) seu uso em cursos de graduação em Matemática; (ii) adequação didático/metodológica a um curso de licenciatura em Matemática; (iii) aspectos intuitivos, lógico-formais e históricos de apresentação dos conteúdos. Com respeito, por exemplo, a este último critério, principalmente quando nos referimos à sua dimensão histórica, destacamos na figura 2 o quadro esquemático do principal conceito matemático que discutiremos neste trabalho, a saber, a *comutatividade das derivadas mistas*. Os autores Hairer & Wanner (2008) levantam a questão da dependência da ordem de diferenciação e acrescentam que este problema manteve por séculos a atenção de muitos matemáticos para a evolução das ideias envolvidas nesta questão.

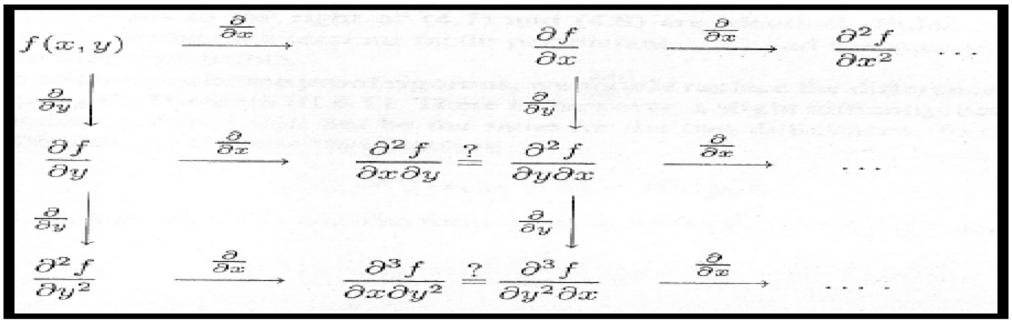

Figura 2: Quadro explicativo da comutatividade proposto em Hairer & Wanner (2008, p. 316).

De fato, Hairer & Wanner (2008, p. 316) discutem o exemplo fornecido por Leonhard Euler (1707-1783), que concebeu uma função que aparentemente sempre possuía a propriedade de independência da ordem de diferenciação. Euler a descreveu analiticamente por $f(x,y)=\sqrt{x^2+n\cdot y^2}$, onde $x^2+n\cdot y^2>0$, com $x,y\in\mathbb{R}$. Hairer & Wanner esclarecem que o matemático alemão não apenas forneceu as derivadas de 1ª e 2ª ordem, como também verificou que $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)$, para $(x,y)\in\mathbb{R}^2$; resultado que se mostrou incorreto sem um acréscimo de determinadas condições formais às hipóteses negligenciadas por Euler.

Dois contraexemplos fundamentais foram fornecidos por Karl Hermann Amandus Schwarz (1843-1921) e por Giuseppe Peano (1858-1932). Neste sentido, Hairer & Wanner (2008, p. 317) discutem, explorando uma notação moderna, as propriedades da função $f(x,y)=xy\cdot g(x,y)$, onde a função $g(x,y)$ é limitada e não necessariamente contínua nas vizinhanças da origem do sistema $\mathbb{R}^2$. Assim, os autores consideram $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,y)-f(0,y)}{x}=\lim_{x\to 0} y\cdot g(x,y)$. E, em seguida, avaliam a derivada

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)\right]=\lim_{y\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\left[\frac{\left[\lim_{x\to 0} y\cdot g(x,y)\right]-0}{y}\right]$$

Na sequência, obedecendo o mesmo raciocínio, os autores explicitam $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0} g(x,y)\right]$ (*). O aspecto que merece atenção aqui é a descrição do comportamento das *derivadas mistas* com base no comportamento dos *limites interados* (*), que obtivemos com a função $g(x,y)$. Argumentações desta natureza proporcionam uma relação mais estreita entre os conceitos e podem auxiliar a *transição do CUV para o CVV* que apresentamos na figura 1, na medida em que relacionamos a noção de *limite interado* com a *derivada mista*.

Com respeito a esta última, os livros de CVV exploram as propriedades da seguinte função $f(x,y) = xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ (1). Por outro lado, antes de desenvolvermos uma análise do modelo lógico-matemático envolvido neste caso, apresentamos, segundo os livros escolhidos neste estudo, os "enunciados" do teorema de Schwarz, que caracteriza a *comutatividade das derivadas parciais* no ambiente do CVV. O primeiro enunciado é desenvolvido no contexto da Análise no $\mathbb{R}^n$, conteúdo tradicionalmente estudado apenas em cursos de bacharelado em Matemática.

Teorema de Schwarz. *Seja $f : U \to \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável no ponto $c \in U \subset \mathbb{R}^n$. Para quaisquer $1 \leq i, j \leq n$, tem-se*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(c) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(c).$$

Figura 3: Enunciado do teorema que caracteriza a comutatividade das derivadas (LIMA, 2009, p. 147).

Preservando nossa atenção com respeito ao critério (ii) descrito há pouco, deter-nos-emos aos enunciados equivalentes para funções do tipo $f(x,y)$. O primeiro enunciado é encontrado no livro de Swokowski (1983, p. 726), inclusive em edições atuais traduzidas para o português.

Let f be a function of x and y. If f, f_x, f_y, f_{xy}, and f_{yx} are continuous on an open region R, then

$$f_{xy} = f_{yx}$$

throughout R.

Figura 4: A comutatividade das derivadas mistas discutida em Swokowski (1983).

Leithold (1982, p. 754-756) apresenta o enunciado do mesmo teorema, como exibimos na figura 5, e comenta, na mesma seção, a diversidade de notações para o mesmo objeto matemático, ao apresentar as seguintes notações: $D_2(D_1 f)$, $D_{12}f$, f_{12}, f_{xy}, $D_{xy}(f)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

Teorema Suponhamos que f seja uma função de duas variáveis x e y definida sobre um disco aberto $B((x_0, y_0); r)$ e que f_x, f_y, f_{xy} e f_{yx} também são definidas em B. Além disso, suponhamos que f_{xy} e f_{yx} sejam contínuas em B. Então,

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$$

Figura 5: O enunciado que caracteriza a comutatividade das derivadas mistas em Leithold (1982).

Observamos que o enunciado conhecido como teorema de Schwarz, que encontramos na obra de Guidorizzi (1986, p. 858), é equivalente ao enunciado da figura 3, no que diz respeito à caracterização da classe de diferenciabilidade da função. No caso de Guidorizzi, o autor diz que uma função é de classe C^2, quando suas derivadas de 1ª e de 2ª ordem são contínuas.

Teorema *(de Schwarz)*. Seja $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A aberto. Se f for de classe C^2 em A, então,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(x,y) \quad \text{para todo } (x,y) \in A.$$

Figura 6: Enunciado do teorema, segundo Guidorizzi (1986), indicando a classe de diferenciabilidade.

Encerramos esta seção, destacando o critério (iii) análise lógico-matemática de todos os enunciados exibidos. Notamos que, de modo simplificado, podemos escrever $(H_1 \wedge H_2) \to T$, onde tomamos como hipóteses $\begin{cases} H_1 : \text{ f, f}_\text{x} \text{ e f}_\text{y} \text{ contínuas} \\ H_2 : \text{ f}_\text{xy} \text{ e f}_\text{yx} \text{ contínuas} \end{cases}$. E por tese $T: \text{ f}_\text{xy} = \text{f}_\text{yx}$. Note-se que a única exceção desta forma inferencial foi explorada em Stewart (2004, p. 902). Além disso, a verificação analítica das condições de H_1, na origem, por exemplo, em relação a cada uma das hipóteses acima, consiste em estudar o comportamento dos limites $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ (2). E no caso de H_2, investigamos o comportamento de $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ e $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ (3), entretanto, do ponto de vista analítico, tais verificações podem se tornar fastidiosas sem o uso da tecnologia (ver figuras 7 e 8). Na próxima seção, apresentaremos a perspectiva teórica na qual referendamos/interpretamos os dados obtidos com suporte nos autores de livros mencionados.

A Teoria das Representações Semióticas e aplicações

O interesse acadêmico por parte de estudantes e pesquisadores pela teorização proposta por Raymond Duval se torna visível com o uso da Teoria das Representações Semióticas em vários estudos envolvendo o ensino/aprendizagem de Matemática. O motivo para tal fato parece evidente, uma vez que, na introdução de sua obra, o autor sublinha a idéia de que em Matemática, *as representações semióticas não são apenas indispensáveis aos fins de comunicação, elas são necessárias ao desenvolvimento da própria atividade matemática* (DUVAL, 1995, p. 3).

Duval (1995, p. 5) salienta, ainda, que a mobilização ou passagem de um sistema de representação a outro, ou a mobilização simultânea de vários sistemas de representação em curso de uma mesma aprendizagem, nem sempre decorre de modo espontâneo e natural. No contexto do CVV, poderíamos exemplificar diversas formas de registro que se referem ao mesmo objeto matemático, como o que chamamos de limite, o qual pode ser representado por: $Lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$; $lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$; $Lim_{\substack{x\to a \\ y\to b}} f(x,y)$ ou ainda $\lim_{x\to a}[\lim_{y\to b} f(x,y)]]$. E o caso da noção de *derivada mista* em um ponto (a,b), discutida na seção passada, que pode, segundo os livros consultados, ser denotada por: $f_{12}(a,b)$; $\left(f_{xy}\right)_+(a,b)$; $D_{12}f(a,b)$; $f_{xy}(a,b)$; $\partial_{xy} f(x,y)$; $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b)$ ou ainda $\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)_{y=b}\right]$. Estes são exemplos de registros algébricos distintos do CVV, que designam o mesmo objeto. No contexto da aprendizagem, a importância da distinção entre objeto e suas múltiplas representações é exaltada por Duval (1993, p. 37).

Acrescentamos, ainda, que a mobilização ou a passagem para outros registros, distintos dos algébricos, como no caso de registros geométricos ou registros numéricos do CVV, pode se tornar uma tarefa impraticável sem um auxílio computacional, como podemos observar em alguns estudos (RALHA; HIRST & VAZ; 2004). Ademais, recordamos que *a noção de representação se torna essencial na medida da forma segundo a qual a informação pode ser descrita e levada em consideração num sistema particular de tratamento*. (DUVAL, 1995, p. 17)

Identificamos um exemplo interessante, quando o estudante manifesta melhor entendimento do processo matemático relacionado ao registro $\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\right]$, uma vez que descreve de modo explícito a informação, diferentemente de registros do tipo Df_{12}, f_{xy} ou f_{12} que "escondem" ou "encobrem" determinados significados operatórios. Levando em consideração estas colocações, exibimos na figura 7 as derivadas de 1ª e 2ª ordem da função (1). Sublinhamos que todo o cálculo algébrico efetuado pelo programa considera valores fora da origem. Além disso, o programa explorado aqui fornece em poucos segundos todas as derivadas da função (1), que podem ser descritas em termos de registros algébricos.

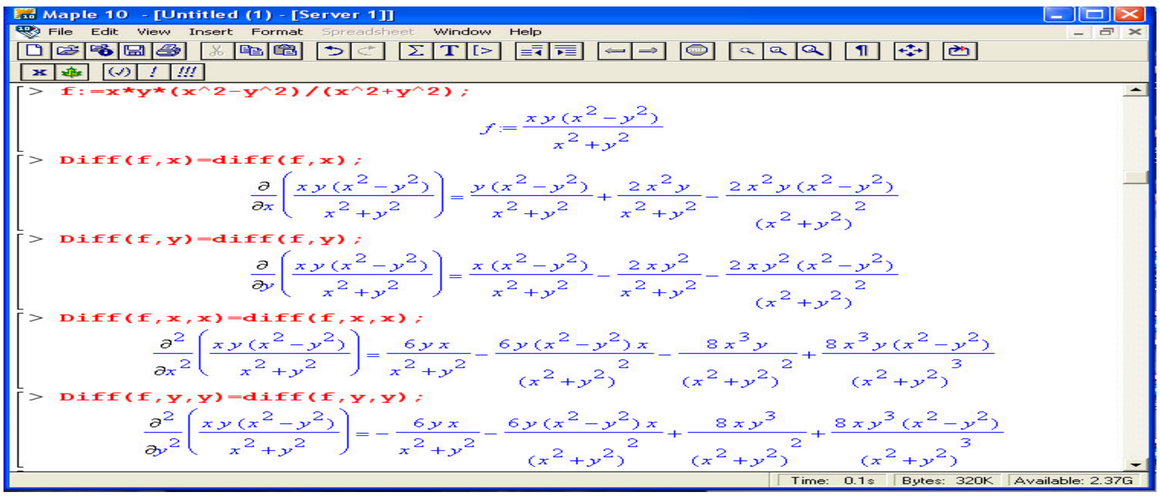

Figura 7: O *software Maple* evita cálculos fastidiosos para os alunos fornecendo as derivadas.

No caso das *derivadas mistas*, o *software Maple* fornece a extensa listagem em termos de registros algébricos, os quais apresentamos na figura 8. Sublinhamos que, segundo os dados gerados por este Sistema Algébrico Computacional – CAS, inferimos que $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$, para os pontos $(x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ (figura 8).

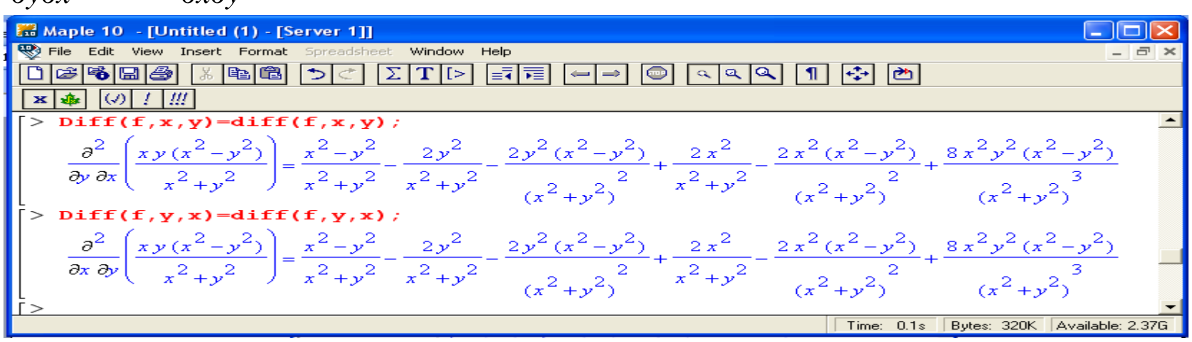

Figura 8: O *software Maple* exibe as derivadas mistas em termos de registros algébricos.

Duval (1995, p. 28) salienta que *um dos grandes problemas concernente à psicologia diz respeito à natureza das relações entre representações mentais e representações semióticas*. As *representações mentais*, por exemplo, permitem uma visão do objeto na ausência de significantes perceptíveis, todavia, um expediente tortuoso consiste em estimular a produção de representações mentais nos aprendizes quando restringimos o ensino às mídias lápis/papel. Na figura 9, exibimos registros de natureza geométrica em 3D, relacionados com a função (1).

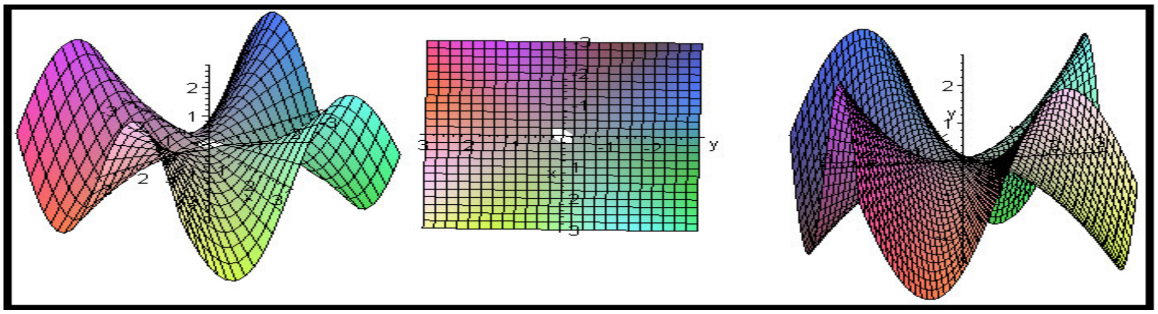

Figura 9: Registros de natureza geométrica da função (1) podem estimular representações mentais.

Duval (1995, p. 36) descreve três atividades cognitivas de representação inerentes à *semiósis* (apreensão ou a produção de uma representação semiótica). A primeira, segundo o autor é a *formação* de representações em um registro semiótico particular. Tal atividade funciona no sentido de evocar/recordar um objeto, exprimir uma representação mental, e implica uma atividade de seleção, no conjunto de possíveis representações, as que realmente tencionamos representar. Duval caracteriza também a noção de *tratamento* de representações semióticas que se manifesta quando efetuamos transformações sobre representações no mesmo registro.

Por exemplo, podemos recorrer ao modelo epsilônico do CVV, caracterizado pela condição lógica: dado $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$, de modo que $\forall x, y \in Dom(f(x,y))$, tenhamos que se $0 < \|(x,y),(a,b)\| < \delta$ implica que $|f(x,y) - L| < \varepsilon$. Equivalentemente, exploramos a *formação* de outra representação semiótica ao escrevermos $lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ que, do ponto de vista do *tratamento*, no sentido de Duval (1995), é mais explorado no ensino ordinário de CVV.

De fato, o limite da função $f(x,y) = xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ considerada pode ser designado pelo registro algébrico $\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, e, para efeito de simplificação das operações de *tratamento* efetivadas sobre este, tomamos seu comportamento na origem. Após uma série de regras envolvendo seu significado operatório, concluímos que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = 0$.

Por fim, Duval (1995, p. 36) descreve a *conversão de registros* como a transformação de uma representação para outro registro distinto da representação inicial. Por exemplo, sublinhamos a noção de que explorando por meio da visualização de registros em 3D (figuras 9 e 10), podemos fornecer alguns indícios para o aprendiz no sentido de construir seu próprio *valor epistêmico* (DUVAL, 1991, p. 254) relativo a determinada propriedade, mediante a elaboração de uma sentença proposicional relacionada às noções de função e de suas *derivadas parciais*.

Na figura 10, podemos concluir que a derivada parcial de 1ª ordem é contínua, enquanto que suas *derivadas mistas* (lado direito), apesar de coincidirem no modelo computacional fora da origem (figura 8), são descontínuas na origem. Reparamos que, nesta análise, não efetuamos nenhum *tratamento*, entretanto, a *formação* do registro que chamamos de gráfico da função foi fornecida pelo computador, e assumiu um papel essencial para nosso entendimento desta propriedade. A visualização de gráficos como estes no $\mathbb{R}^3$ envolve habilidades que os aprendizes ainda desconhecem pelo fato de que o ensino do CUV explora tão-somente representações em 2D. Analisando e comparando as figuras 7, 8, 9 e 10, podemos perceber a relevância da *conversão* de registros semióticos, inclusive seu caráter de complementaridade.

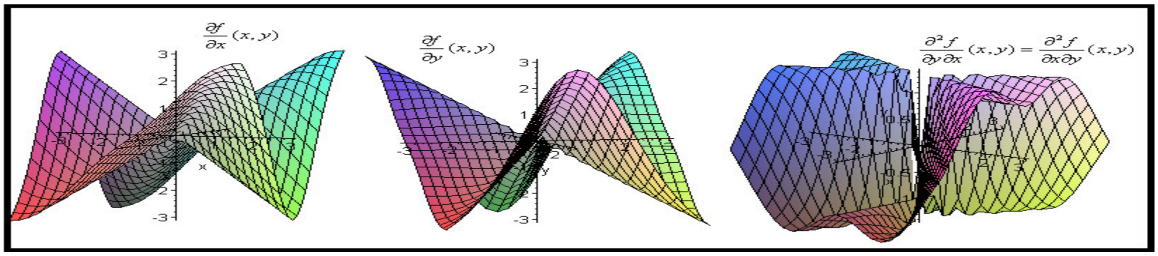

Figura 10: Registros geométricos gerados pelo *Maple* relacionados com a derivada parcial e mista.

Na figura 10, exibimos outras representações associadas à função que descrevemos em (1). Qualquer situação relacionada no âmbito da resolução de problemas necessita da *habilidade do solucionador relativa à mudança de registros* (DUVAL, 1993). Assim, quando exploramos registros diferenciados no CVV, possibilitamos maior repertório de ação dos aprendizes, uma vez que existem exemplos de registros no CVV que proporcionam entraves ao *tratamento*; assim, a *conversão de registros* pode auxiliar a atividade matemática de modo promissor.

Discussão e análises

Uma conclusão imediata que identificamos nos livros consultados diz respeito à diversidade de enunciados relacionados com a *comutatividade das derivadas parciais*, descritos predominantemente por meio da *língua materna* (**LM**) e *registros algébricos* (**RA**). Além disso, encontramos de forma deficiente a explicação da propriedade em termos da *conversão* para registros geométricos (**RG**), com exceção no caso de Stewart (2004). Ademais, os autores se apoiam em determinados recursos peculiares na atividade de matemáticos profissionais, como a simplificação/condensação de notações formais que, no sentido de Duval (1993, p. 49), interpretamos como uma *economia de tratamento* e que podem não explicitar os significados operatórios envolvidos, relacionados com cada simbologia e ensejar entraves aos incipientes.

Apesar de a obra de Lima (2009) não ser adequada para um curso inicial de CVV no ambiente de um curso de licenciatura, esse livro apresenta qualidades que podem auxiliar o professor destes conteúdos. O primeiro diz respeito a invariância notacional, ou seja, o autor preserva a notação das *derivadas mistas* durante toda a argumentação necessária. Por outro lado, aparentemente como todos os outros autores, o único contraexemplo fornecido é o da função (1), empregando **LM**, **RA** e **RG**; entretanto, Lima (2009, p. 148) exibe apenas um gráfico da função (1) gerado possivelmente por um CAS. Assim, acrescentamos que seu exemplo, no que diz respeito à *conversão* de registros, pouco ou em quase nada auxilia o leitor a compreender o comportamento geométrico da propriedade investigada (figura 10). Note-se que Lima (2009, p. 149) apresenta outra versão do mesmo teorema enunciado na figura 3.

Teorema 3. *Seja $f: U \to \mathbb{R}$ tal que existem $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ em todos os pontos de U. Se as funções $\frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}: U \to \mathbb{R}$ são contínuas, então a derivada $\partial^2 f/\partial x_j \partial x_i$ existe em todos os pontos de U e vale $\partial^2 f/\partial x_i \partial x_j = \partial^2 f/\partial x_j \partial x_i$.*

Figura 11: 2ª versão do enunciado do mesmo teorema, segundo Lima (2009).

Guidorizzi (1986, p. 858) e Stewart (2004, p. 902) descrevem a seção da propriedade que investigamos explorando apenas a **LM** e **RA**. Na seção de exercícios, além de não empregar **RG**, Guidorizzi (1986) apresenta apenas o exemplo da função (1) e não demonstra formalmente o teorema. No caso do livro de Leithold (1982), observamos na seção 17.9, referente às derivadas de ordem superior, uma mudança notacional constante. De fato, o autor exibe três exemplos iniciais de funções que sempre apresentam a propriedade da *comutatividade das derivadas mistas*, empregando notações simplificadas $D_{12}f(x,y)$ e $D_{21}f(x,y)$, entretanto, no último exemplo, mostra a função (1) e, explorando notações diferentes, verifica $f_{12}(0,0) \neq f_{21}(0,0)$. Os enunciados dos quatros exemplos encontrados em Leithold (1982) são em termos de **LM** e **RA**.

Nossas análises no livro de Swokowski (1983) indicaram que a diversidade de registros empregados pode confundir o leitor (figura 12). De fato, vemos na figura 12, o *tratamento* de registros explorado por ele. O autor destaca apenas um exemplo no qual a *comutatividade das derivadas parciais* é sempre verdadeira explorando **LM** e **RA**. Nos quatro exercícios propostos, de forma semelhante, identificamos a ausência de **RG** e de contraexemplos distintos de (1).

Quando nos atemos a uma análise lógico-matemática do enunciado do teorema apresentado em cada autor, observamos a discussão em que as condições da inferência $(H_1 \wedge H_2) \rightarrow T$ não se verificam. Todos os autores recorrem ao exemplo (1), que, segundo a figura 10, não satisfaz H_2; entretanto, não pormenorizam, em termos de *tratamento* dos registros, quais das hipóteses H_1 ou H_2 são negadas. Analiticamente, as condições formais foram descritas em (2) e (3). Além disso, os autores consultados não fornecem ao leitor os registros algébricos - **RA** relacionados com as derivadas de primeira e de segunda ordem; estas podem ser observadas nas figuras 7 e 8.

$$\frac{\partial}{\partial x} f_x = (f_x)_x = f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \qquad \frac{\partial}{\partial y} f_y = (f_y)_y = f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f_x = (f_x)_y = f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \qquad \text{If } w = f(x,y) \text{ we write}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} f_y = (f_y)_x = f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \qquad \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y) = f_{xx}(x,y) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = w_{xx}$$

Figura 12: Swokowski (1983, p. 730) apresenta uma profusão de notações para as derivadas mistas.

Tabela 1

Presença de registros nos livros de CVV em termos de **LM***,* **RA** *e* **RG***.*

Registro	Lima (2009)	Guidorizzi (1986)	Leithold (1982)	Stewart (2004)	Swokowski (1983)
LM	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim
RA	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim
RG	Sim	Não	Não	Sim	Não
Notação	Notação detalhada	Notação detalhada	Notações simplificadas	Notação detalhada	Notações simplificadas
Contra exemplo do Teor.	Sim (1)	Proposto como exercício (1)	Apenas um resolvido (1)	Nenhum	Nenhum resolvido e nenhum exemplo

Notas. Dados obtidos a partir da análise de livros do CVV com respeito ao teorema de Schwarz.

A última linha da tabela 1 merece alguns comentários extras. Neste sentido, identificamos nas obras consultadas apenas um contraexemplo (1), todavia, não divisamos nas argumentações destes autores uma exploração eficaz de **RA** no sentido de verificar a continuidade das derivadas de 1ª e 2ª ordem. Assim, todo o *tratamento* das representações foi desenvolvido no sentido de evidenciar os valores numéricos assumidos pelas *derivadas mistas* no ponto $(0,0)$. Por fim, registramos *notações simplificadas* (tabela 1, 4ª linha) quando deparamos registros do tipo f_{12} que apresentam uma grande operacionalidade para um profissional experiente, todavia, para o estudante, pode atuar num sentido contrário ao de permitir uma compreensão do seu significado.

Considerações e recomendações

Martinez-Planell & Gaisman (2010, p. 2) iniciam seu artigo sublinhando uma lacuna na literatura no que se refere aos estudos e investigações no campo do Cálculo a Várias Variáveis. Deste modo, com uma preocupação semelhante, desenvolvemos este trabalho que se caracterizou pela análise de algumas obras didáticas com respeito à *comutatividade das derivadas parciais*.

Nossas análises indicaram que as atividades propostas nos livros de CVV consultados, com exceção para o livro de Lima (2009), que se harmoniza a uma formação de futuros bacharéis, enfatizam o *tratamento* eminentemente algébrico das representações (tabela 1, linha 2), em detrimento do uso de registros de natureza geométrica. Assim, outras habilidades exigidas nos aprendizes podem ficar comprometidas, uma vez que, para a produção de uma resposta no contexto da resolução de problemas, o aluno necessita simultaneamente da *formação*, *tratamento* e, sobretudo, da *conversão* de registros, inclusive com apoio nos registros do CUV.

Um dado que merece atenção é o fato de que todos os autores consultados apresentam apenas como contraexemplo a função descrita inicialmente em (1). Além disso, em nenhum caso encontramos a verificação efetiva da não-ocorrência das hipóteses H_1 e H_2, que descrevemos em (2) e (3), previstas no enunciado do teorema (figura 11). Por outro lado, quando dedicamos um pouco mais de tempo de investigação, encontramos em Hairer & Wanner (2008, p. 328), um contraexemplo histórico fornecido do H. A. Schwarz, encontrado em 1873, descrito pela seguinte função $f(x,y)=\begin{cases} x^2\arctan\left(\frac{y}{x}\right)-y^2\arctan\left(\frac{x}{y}\right) & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

Recordamos que nas seções anteriores sublinhamos a importância de investigar *a adequação didático/metodológica a um curso de licenciatura em Matemática*. Com respeito ao item (ii), evidenciamos existência de três categorias de livros de CVV. A primeira categoria se apresenta por explorar de modo aprofundado os fundamentos de Análise no $\mathbb{R}^n$. Não nos detemos de modo prolongado em tal categoria, pois, evidenciamos que os objetivos de uma obra desta natureza (LIMA, 2009) e o público ao qual o livro se destina são incompatíveis com os objetivos de formação de aluno de licenciatura em Matemática. Outra categoria é identificada por explorar um "pseudoformalismo" e a predominância de registros algébricos – **RA**.

Os livros desta última categoria são caracterizados por enunciarem de modo formal o teorema relacionado com a *comutatividade de derivadas*, efetuarem a demonstração que, na maioria dos casos se apoia nas ideias e conceitos do CUV, com exceção de Lima 2009. A ideia-chave do teorema de Schwarz, todavia, não continua a ser aplicada e/ou explorada nos exercícios subseqüentes. Leithold (1982) como outros exemplos se encaixa nesta.

Por fim, identificamos livros (STEWART, 2004) que buscam explorar uma abordagem baseada na *conversão* de registros (com o uso da tecnologia), o que se mostra adequado para um curso de licenciatura em Matemática, apesar de não inovar na discussão dos contraexemplos. Embora não participando de modo direto de nosso estudo, destacamos os autores Bortolossi

(2009), Calahan (2010), Ghorpade. & Limaye (2010). Nestes, últimos autores, observamos, com maior frequência, a exploração de *conversões* (DUVAL, 1993, p. 45) do tipo *ilustração* (conversão de uma representação linguística em uma representação figural) e *descrição* (conversão de uma representação não verbal em uma representação lingüística). Tal iniciativa pode evitar, pelo menos em parte, aprendizagens indesejadas no ensino do CVV, recentemente apontadas em alguns estudos (MARTINEZ-PLANELL & GAISMAN, 2009; 2010).

O expediente empregado por estes autores de livros mais atuais, quando desenvolvido no contexto de ensino do CVV, poderá auxiliar a promoção de um repertório extenso de habilidades e um entendimento mais significativo, principalmente quando tais habilidades são baseadas e/ou ancoradas em aprendizagens anteriores, no contexto de ensino do CUV. Apesar de não contarmos com dados empíricos para uma verificação em sala de aula, o aprofundamento da análise de alguns dos indicadores relacionados com o teorema de Schwarz, discutidos ao longo do texto, poderá atuar de modo profícuo, inclusive no desenvolvimento de pesquisas no futuro a respeito de um período que nomeamos neste trabalho de *transição interna do CUV para o CVV*.

Bibliografia e referências

Bortolossi. Humberto. José. (2009). Cálculo Diferencial a Várias Variáveis: um introdução à otimização. São Paulo: Editora PUC-Rio.

Callahan. James. J. (2010). Advanced Calculus: a geometric point of view. New York: Springer. doi: 10.1007/978-1-4419-7332-0.

Duval. Raymond. (1991). Strutucture du raisonnement déductif e apprentissage de la démonstration, *Educational Studies in Mathematics*, 22, 233-261.

Duval. Raymond. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives*, 5, 37-65.

Duval, Raymond. (1995). Sémiosis et Pensée Humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Paris: Peter Lang Editeur.

Ghorpade. Sudhir. R. & Limaye. Balmohan. V. (2010). A Course in Multivariable Calculus. New York: Springer. doi : 10.1007/978-1-4419-1621-1.

Guidorizzi. Hamilton. L. (1986). Um curso de Cálculo. São Paulo: Livros Técnicos e Científicos. v. II.

Hairer. E. & Wanner. G. (2008). Analysis by its History. New York: Springer.

Leithold. Louis. (1982). O Cálculo com geometria analítica. São Paulo: Harbra. 2º edição.

Lima. Elon. Lages. (2009). Curso de Análise. Vol. 2. Rio de Janeiro: IMPA. 11º edição.

Martinez-Planell. Rafael & Gaisman. Maria. Trigueros. (2009). Student´s ideas on functions of two variables: domain, range and representations. *Proceedings of* 31*st annual meeting of Psychology of Mathematics Education*. Atlanta, GA: Georgia State University. 73-80.

Martinez-Planell. Rafael & Gaisman. Maria. Trigueros. (2010). Geometrical representations in the learning of two-variable functions. *Educational Studies in Mathematics*, 73, 3-19.

Ralha. Elfrida. ; Hirst. Keith. & Vaz. Olga. (2004). A Portuguese study on learning concepts and proofs: multivariable calculus and mathematica TM. Proceedings of the 10th International Congress on Mathematics Education. Denmark,

Stewart, J. (2004). Cálculo. v. II, 4ª edição, São Paulo: Pioneira Thompson Learning.

Swokowski. Earl. W. (1983). Calculus with Analytic Geometry. Boston: Prindle, Weber & Schmidt.