XIII CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
CIAEM 2011
26 - 30 Junho, 2011
Recife, Brasil
50 anos do Comitê Interamericano de Educação Matemática

# Desarrollo de competencias de análisis didáctico del profesor de matemáticas

Juan D. Godino
Departamento de Didáctica de la Matemática
Universidad de Granada
España
jgodino@ugr.es

**Resumen**

Este taller tiene como objetivo fomentar el desarrollo de competencias de análisis didáctico de experiencias de enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos. El análisis se basa en la aplicación de algunas herramientas teóricas desarrolladas en el marco del "Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática" (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007)[1], en particular se usarán las nociones de "configuración de objetos y procesos" e "idoneidad didáctica de un proceso de estudio". Está orientado a profesores e investigadores en educación matemática de cualquier nivel educativo.

*Palabras claves*: educación matemática, análisis didáctico, enfoque ontosemiótico, conocimiento matemático, objetos y procesos, conflictos semióticos, idoneidad didáctica.

## Justificación del contenido y orientación del taller

Uno de los componentes del conocimiento matemático para la enseñanza es el relativo al conocimiento especializado del contenido (Hill, Ball y Schilling, 2008; Godino, 2009). Parece necesario que el profesor tenga conocimientos, no solo para resolver las tareas que propone a sus alumnos, sino además para identificar los conocimientos matemáticos que se ponen en juego en la realización de las mismas. Estos conocimientos permitirán al profesor tener criterios para seleccionar las tareas, elaborar otras relacionadas, prever conflictos potenciales y planificar con sentido sus intervenciones en el aula.

La formación de profesores debe orientarse hacia el desarrollo de competencias para analizar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y de sintetizar el complejo de conocimientos aportados por la Didáctica de la Matemática, para el diseño,

[1] Las publicaciones donde se desarrolla el "Enfoque Ontosemiótico" están disponibles en Internet: http://www.ugr.es/local/jgodino

implementación y evaluación de su propia práctica docente. En este orden de ideas se requiere que el profesor de matemáticas adquiera cierto nivel de competencia matemática: conocer y ser capaz de aplicar las prácticas matemáticas necesarias para resolver los tipos de problemas usualmente abordables en el contexto educativo correspondiente, y de manera diferente a como lo hace el matemático (Showder, 2007, p. 162). Pero desde el punto de vista de la enseñanza y aprendizaje, el profesor debe ser capaz de analizar la actividad matemática al resolver los problemas, identificando los objetos y procesos matemáticos puestos en juego, con el fin de identificar de manera profunda y detallada los diferentes lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos que intervienen en el proceso de solución de los problemas y en las configuraciones didácticas de las cuales forman parte (Godino, Batanero y Font, 2007).

No obstante, un proceso de estudio matemático no se restringe a las fases exploratorias en las que se formulan conjeturas sobre la solución de los problemas, sino que se compone de configuraciones y trayectorias didácticas donde se articulan los roles docentes y discentes, junto con los conocimientos pretendidos, los significados personales de los estudiantes y el uso de recursos específicos. La gestión de esta complejidad requiere que el profesor de matemáticas desarrolle competencias de análisis que le permitan realizar la síntesis necesaria para valorar los procesos de estudio implementados y tomar decisiones sobre su mejora potencial (Cooney y Wiegel, 2003). Es en este contexto en el que se proponen las actividades de este taller (minicurso).

## Objetivos y herramientas teóricas

Con las actividades del taller nos proponemos fomentar el desarrollo de las siguientes competencias referidas al diseño y valoración de procesos de estudio matemático:

C1. Analizar los conocimientos puestos en juego en la resolución de problemas matemáticos y reconocer potenciales conflictos de los estudiantes en dicha resolución.

C2. Analizar y valorar la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

La cuestión de la identificación de los conocimientos que se ponen en juego en la realización de tareas matemáticas es compleja. ¿Qué es un conocimiento? ¿Qué sabe un alumno que resuelve correctamente la tarea? Consideramos necesario discutir con los profesores posibles respuestas a esta cuestión y proporcionarles recursos teóricos y metodológicos para que progresivamente vayan desarrollando su competencia para el análisis epistémico de tareas escolares.

Para abordar estas cuestiones utilizaremos un modelo para el análisis de los conocimientos implicados en la realización de tareas matemáticas, basado en el enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007). Este modelo lo concretamos en una "guía para el reconocimiento de objetos y procesos" (GROP) que será ilustrada mediante su aplicación a una tarea geométrica. Este análisis permite valorar la complejidad de objetos y relaciones que se ponen en juego, y por tanto, explicar las dificultades que muestran los estudiantes para resolver la tarea pedida.

## Guía para el reconocimiento de objetos y procesos

El marco teórico del "enfoque ontosemiótico" en educación matemática constituye una respuesta semiótica sobre el conocimiento matemático, apoyada en una tipología explícita de los objetos y procesos puestos en juego en la práctica matemática. Se trata de dar una respuesta operativa a la cuestión, ¿Qué significa conocer el objeto *O*?, ¿Qué conocimientos se ponen en juego en la realización de una práctica matemática? La respuesta se formula en términos de las funciones semióticas que un sujeto puede establecer, en unas circunstancias fijadas, en las que se pone en juego *O* como expresión o contenido de dichas funciones. Cada función semiótica implica un acto de semiosis por un agente interpretante y constituye un conocimiento. Hablar de conocimiento equivale a hablar del contenido de una o múltiples funciones semióticas, resultando una variedad de tipos de conocimientos en correspondencia con la diversidad de funciones semióticas que se pueden establecer entre las diversas entidades introducidas en el modelo.

La figura 1 es un diagrama de proceso que proporciona una guía para el reconocimiento sistemático de los conocimientos puestos en juego en una práctica matemática (la solución de un problema o la realización de una tarea). En el siguiente apartado vamos a ejemplificar su uso para analizar una tarea geométrica y contestar de manera sistemática a la pregunta, ¿Qué conocimientos se ponen en juego en la resolución de la tarea?

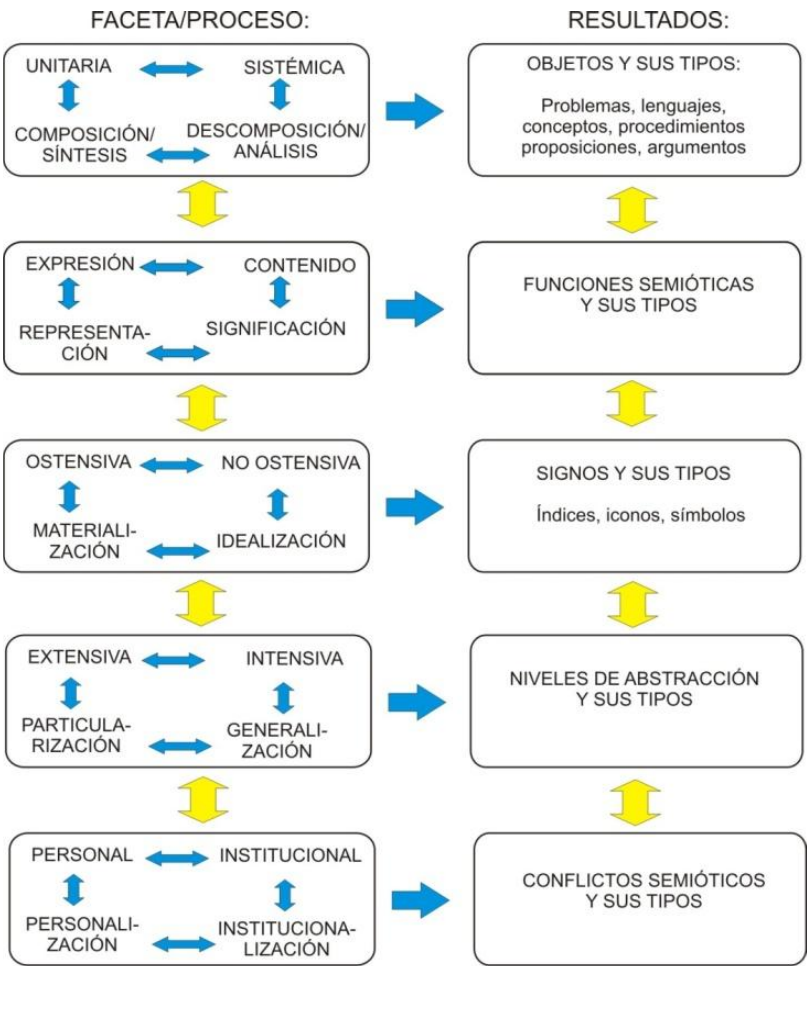


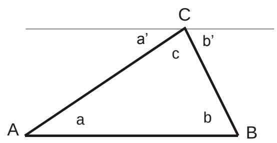

Figura 1: Guía para el reconocimiento de objetos y procesos matemáticos (GROP)

**Análisis epistémico de una tarea geométrica**

A título de ejemplo, en este apartado presentamos el análisis epistémico de la solución de una tarea usando el instrumento GROP.

*¿Cuánto suman los ángulos interiores de un triángulo? Justifica la respuesta.*

La suma es un ángulo llano. En efecto, en la figura adjunta trazamos una recta paralela a la base AB del triángulo que pase por el vértice C; los ángulos a y a´, b y b´ son iguales porque son ángulos alternos internos formados al cortar dos rectas paralelas por una recta secante. En el vértice C hemos hecho la suma de los tres ángulos interiores del triángulo, obteniéndose un ángulo llano.




*1) Procesos de descomposición/análisis:*

Es necesario, en primer lugar, proceder a la *descomposición* del texto en unidades semióticas (términos, frases,…) fijando la atención en *elementos lingüísticos* claves del texto: triángulo, ángulos interiores, suma, justifica.

*2) Procesos de representación/significación:*

El triángulo y sus elementos son representados mediante dibujos y letras, lo que facilita la elaboración de un procedimiento para la suma y justificación de la solución. Se ponen en juego los conceptos de ángulo fijo y general, triángulo fijo y general, congruencia de ángulos; rectas paralelas, ángulo llano.

El *concepto* de suma de ángulos se debe *interpretar* como una suma de amplitudes angulares, no como la suma de los números correspondientes a sus medidas tomando el grado, o el ángulo llano, como unidad de medida. Se trata de entender la suma de ángulos como la operación de unión de las regiones del plano que definen cada ángulo disponiéndolos de manera contigua con un vértice común y sin solapamientos. El concepto de justificar, que en este caso se requiere que sea una demostración deductiva.

*3) Procesos de materialización/idealización:*

El resolutor debe conocer que los conceptos que intervienen en el enunciado y justificación de la proposición son de tipo figural (Fischbein, 1993), lo que implica atribuirle características ideales, esto es, se trata de formas controladas por su definición. Los dibujos son materializaciones de dichos objetos ideales que facilitan la realización de las "acciones matemáticas" que se hacen sobre ellos.

*4) Procesos de composición/síntesis:*

Mediante un proceso de *composición* de las unidades previamente identificadas reconocemos la puesta en funcionamiento de un *procedimiento* para sumar los ángulos: disposición contigua, sin solapamientos y sobre un mismo vértice de los tres ángulos interiores del triángulo, así como la correspondiente *argumentación* que justifica la validez general de la *proposición*: la suma de los ángulos es un ángulo llano. En el caso presente el procedimiento y su respectiva justificación se concretan en los siguientes pasos:

Trazar una paralela a uno de los lados. Dicha paralela existe y es única por el quinto postulado de Euclides. Reconocer las condiciones de aplicación de una proposición (teorema) previamente aceptada: los ángulos alternos internos son iguales. Puesto que los ángulos a y a', b y b' son alternos internos, son iguales. En el vértice C se ha construido un ángulo llano que corresponde a la suma de los tres ángulos interiores del triángulo, a'+c+b' = a+b+c.

*5) Procesos de particularización/generalización:*

Los procesos dialécticos de particularización y generalización se han implementado, combinados con los de materialización e idealización, cuando se ha razonado usando un caso particular de un triángulo y se ha procedido a realizar una de las posibles sumas de ángulos congruentes con los ángulos interiores. El procedimiento y argumentación basada en la suma de ángulos interiores y exteriores admite una generalización fácil para el caso de la suma de los ángulos interiores de cualquier polígono.

*6) Procesos de personalización/institucionalización:*

La faceta personal – institucional nos lleva a estudiar las diferentes maneras en que la tarea se puede abordar según el marco institucional en que tiene lugar (marco de la geometría euclidiana, contexto empírico, …) y los conflictos de significados que pueden aparecer. Justificar o probar se debe entender en la tarea pedida en el contexto institucional de la geometría y, por tanto, se requiere elaborar una argumentación deductiva. Para la validez de dicha argumentación se supone que basta con evocar una proposición previamente aceptada.

Análisis similares se pueden realizar con otros procedimientos y argumentaciones posibles que dan respuesta a la cuestión planteada. Por ejemplo, aplicando el "teorema de la vuelta completa" (la suma de los ángulos exteriores de cualquier polígono es 360º). Un procedimiento y argumentación de tipo empírico, y por tanto, no válida desde el punto de vista institucional de la geometría euclidiana, se puede basar en la medida efectiva de algunos casos particulares de triángulos usando un transportador.

## Análisis de la idoneidad didáctica de un proceso de estudio matemático

La noción de idoneidad didáctica, sus dimensiones, criterios, y un desglose operativo de dicha noción, ha sido introducida en el EOS (Godino, Contreras y Font, 2006; Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2007) como herramienta que permite el paso de una didáctica descriptiva – explicativa a una didáctica normativa, esto es, una didáctica que se orienta hacia la intervención efectiva en el aula. Esta noción puede servir de punto de partida para una teoría de diseño instruccional que tenga en cuenta, de manera sistémica, las dimensiones epistémica – ecológica , cognitiva – afectiva, interaccional – mediacional implicadas en los procesos de estudio de las áreas curriculares específicas.

En las tablas 1 a 6 presentamos algunos criterios o indicadores de las distintas idoneidades parciales, las cuales pueden servir de pauta o guía para el diseño y valoración de acciones formativas planificadas o efectivamente implementadas[2].

[2] Versión simplificada del documento, Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2007). Pauta de análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Disponible en, URL: http://www.ugr.es/local/jgodino/indice_eos.htm.

**Tabla 1. Idoneidad epistémica**: *Grado en que los contenidos implementados (o pretendidos) en el proceso de estudio representan bien a los contenidos de referencia.*

| | COMPONENTES: | DESCRIPTORES: |
|---|---|---|
| | Situaciones-problemas | - Se presenta una muestra representativa y articulada de situaciones de contextualización, ejercitación y aplicación<br>- Se proponen situaciones de generación de problemas (problematización) |
| | Lenguaje | - Uso de diferentes modos de expresión matemática (verbal, gráfica, simbólica...), traducciones y conversiones entre los mismas.<br>- Nivel del lenguaje adecuado a los niños a que se dirige<br>- Se proponen situaciones de expresión matemática e interpretación |
| | Reglas (Definiciones, proposiciones, procedimientos) | - Las definiciones y procedimientos son claros y correctos, y están adaptados al nivel educativo al que se dirigen<br>- Se presentan los enunciados y procedimientos fundamentales del tema para el nivel educativo dado<br>- Se proponen situaciones donde los alumnos tengan que generar o negociar definiciones proposiciones o procedimientos |
| | Argumentos | - Las explicaciones, comprobaciones y demostraciones son adecuadas al nivel educativo a que se dirigen<br>- Se promueven situaciones donde el alumno tenga que argumentar |
| | Relaciones | - Los objetos matemáticos (problemas, definiciones, proposiciones, etc.) se relacionan y conectan entre si. |

Un punto central para el logro de una alta idoneidad epistémica será la selección y adaptación de “situaciones-problemas” o tareas ricas. Tales tareas deben proporcionar a los estudiantes múltiples maneras de abordarlas, implicar diversas representaciones, y requerir que los estudiantes conjeturen, interpreten y justifiquen las soluciones.

**Tabla 2. Idoneidad cognitiva:** *Grado en que los contenidos implementados (o pretendidos) son adecuados para los alumnos, es decir, están en la zona de desarrollo potencial de los alumnos.*

| | COMPONENTES: | DESCRIPTORES: |
|---|---|---|
| | Conocimientos previos (Se tienen en cuenta los mismos elementos que para la idoneidad epistémica) | - Los alumnos tienen los conocimientos previos necesarios para el estudio del tema (bien se han estudiado anteriormente o el profesor planifica su estudio)<br>- Los contenidos pretendidos se pueden alcanzar (tienen una dificultad manejable) en sus diversas componentes |
| | Adaptaciones curriculares a las diferencias individuales | - Se incluyen actividades de ampliación y de refuerzo |
| | Aprendizaje | Los diversos modos de evaluación indican que los alumnos logran la apropiación de los conocimientos / competencias pretendidos |

En el marco del EOS se asume que el aprendizaje implica la apropiación de los significados institucionales pretendidos por parte de los estudiantes, mediante la participación en la comunidad de prácticas generada en la clase. Supone el acoplamiento progresivo entre los significados personales iniciales de los estudiantes y los significados institucionales planificados. Los significados son entendidos en términos de prácticas operativas y discursivas y supone además el reconocimiento e interrelación de los objetos que intervienen en dichas prácticas.

**Tabla 4. Idoneidad afectiva:** *Grado de implicación, interés y motivación de los estudiantes*

| | COMPONENTES: | DESCRIPTORES: |
|---|---|---|
| | Intereses y necesidades | - Las tareas tienen interés para los alumnos<br>- Se proponen situaciones que permitan valorar la utilidad de las matemáticas en la vida cotidiana y profesional |
| | Actitudes | - Se promueve la participación en las actividades, la perseverancia, responsabilidad, etc.<br>- Se favorece la argumentación en situaciones de igualdad; el argumento se valora en sí mismo y no por quién lo dice. |
| | Emociones | - Se promueve la autoestima, evitando el rechazo, fobia o miedo a las matemáticas.<br>- Se resaltan las cualidades de estética y precisión de las matemáticas. |

**Tabla 5. Idoneidad interaccional:** *Grado en que los modos de interacción permiten identificar y resolver conflictos de significado y favorecen la autonomía en el aprendizaje***.**

| | COMPONENTES: | DESCRIPTORES: |
|---|---|---|
| | Interacción docente-discente | - El profesor hace una presentación adecuada del tema (presentación clara y bien organizada, no habla demasiado rápido, enfatiza los conceptos clave del tema, etc.)<br>- Reconoce y resuelve los conflictos de los alumnos (se hacen preguntas y respuestas adecuadas, etc.)<br>- Se busca llegar a consensos con base al mejor argumento<br>- Se usan diversos recursos retóricos y argumentativos para implicar y captar la atención de los alumnos.<br>- Se facilita la inclusión de los alumnos en la dinámica de la clase |
| | Interacción entre alumnos | - Se favorece el diálogo y comunicación entre los estudiantes<br>- Se favorece la inclusión en el grupo y se evita la exclusión |
| | Autonomía | - Se contemplan momentos en los que los estudiantes asumen la responsabilidad del estudio |
| | Evaluación formativa | - Observación sistemática del progreso cognitivo de los alumnos |

**Tabla 3. Idoneidad mediacional:** *Grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje*.

| | COMPONENTES: | DESCRIPTORES: |
|---|---|---|
| | Recursos materiales (Manipulativos, calculadoras, ordenadores) | - Uso de materiales manipulativos e informáticos que permiten introducir buenas situaciones, lenguajes, procedimientos, argumentaciones adaptadas al contenido pretendido<br>- Las definiciones y propiedades son contextualizadas y motivadas usando situaciones y modelos concretos y visualizaciones |
| | Número de alumnos, horario y condiciones del aula | - El número y la distribución de los alumnos permite llevar a cabo la enseñanza pretendida<br>- El horario del curso es apropiado (por ejemplo, no se imparten todas las sesiones a última hora)<br>- El aula y la distribución de los alumnos es adecuada para el desarrollo del proceso instruccional pretendido |
| | Tiempo (De enseñanza colectiva /tutorización; tiempo de aprendizaje) | - El tiempo (presencial y no presencial) es suficiente para la enseñanza pretendida<br>- Se dedica suficiente tiempo a los contenidos más importantes del tema<br>- Se dedica tiempo suficiente a los contenidos que presentan más dificultad de comprensión |

**Tabla 6. Idoneidad ecológica:** *Grado de adaptación curricular, socio-profesional, apertura a la innovación y conexiones intra e interdisciplinares*

| | COMPONENTES: | DESCRIPTORES: |
|---|---|---|
| | Adaptación al currículo | - Los contenidos, su implementación y evaluación se corresponden con las directrices curriculares |
| | Apertura hacia la innovación didáctica | - Innovación basada en la investigación y la práctica reflexiva<br>- Integración de nuevas tecnologías (calculadoras, ordenadores, TIC, etc.) en el proyecto educativo |
| | Adaptación socio-profesional y cultural | - Los contenidos contribuyen a la formación socio-profesional de los estudiantes |
| | Conexiones intra e interdisciplinares | - Los contenidos se relacionan con otros contenidos intra e interdisciplinares |

## Desarrollo de las actividades en el taller

El componente práctico del taller se centrará en las siguientes actividades:

1) Resolución de un problema matemático siguiendo un modelo didáctico socio-constructivista (planteamiento del problema, trabajo individual y cooperativo, puesta en común y discusión colectiva, institucionalización).

2) Análisis epistémico y cognitivo del problema aplicando la herramienta “Guía para el reconocimiento de objetos y procesos”.

3) Valoración de la idoneidad didáctica del proceso instruccional experimentado mediante la “Guía para la valoración de la idoneidad didáctica”.

## Reflexiones finales

La realización de estas actividades mediante el uso de la herramienta "Guía para el Reconocimiento de Objetos y Procesos" (GROP) ayuda a desvelar de manera sistemática la trama de objetos y procesos que se ponen en juego en una práctica matemática, esto es, los conocimientos (comprensiones, competencias,…) requeridas para su realización, como también a explicar las dificultades de los estudiantes en términos de la complejidad de las conocimientos requeridos. Además, permite crear un contexto de expresión de las concepciones de los profesores sobre las matemáticas, usualmente limitadas y sesgadas hacia los componentes conceptuales y algorítmicos, y su evolución hacia un modo más integral que asigna un papel central a las situaciones – problemas, los diversos registros semióticos, los procesos de definición, enunciación y argumentación.

Respecto de las concepciones acerca de la enseñanza de las matemáticas, usualmente centradas en un modelo transmisivo del conocimiento, el uso de la "Guía para la valoración de la idoneidad didáctica" (GVID) permite ampliar la perspectiva, involucrando las diversas dimensiones que intervienen en los procesos de estudio matemático (epistémica-ecológica, cognitiva-afectiva, interaccional-mediacional).

Otros aspectos complementarios del análisis didáctico en el marco del EOS se describen y ejemplifican en Font, Planas y Godino (2010), en particular, el análisis de las interacciones en el aula, centrado en la identificación y resolución de conflictos de significados y el reconocimiento de las normas que condicionan y soportan los procesos de enseñanza y aprendizaje matemático.

## Referencias

Cooney, T. J. y Wiegel, H. G. (2003). Examining the mathematics in mathematics teacher education. En, A. J. Bishop, M. A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick y F. K. S. Leung (eds.), *Second International Handbook of Mathematics Education* (pp. 795-828). Dordrech: Kluwer A. P.

Font, V., Planas, N. y Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje*, 33 (2), 89-105.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, 22 (2/3), 237-284.

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 20, 13-31.

Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques,* 26 (1), 39-88.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education,* 39 (1-2), 127-135.

Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2007). Pauta de análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Disponible en, URL: http://www.ugr.es/local/jgodino/indice_eos.htm.

Hill, H. C., Ball, D. L. y Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39, 372-400

Sowder, J. T. (2007). The mathematical education and development of teachers. En F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 157-224). Charlotte, N.C: NCTM and IAP.

ANEXO:

| Información general para la organización local | |
|---|---|
| **Título del taller** | DESARROLLO DE COMPETENCIAS DE ANÁLISIS DIDÁCTICO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS |
| **Nombre de Autores** | Juan D. Godino |
| **Instituciones de los autores** | Departamento de Didáctica de la Matemática.<br><br>Universidad de Granada |
| **País o países de los autores** | España |
| **Número de horas más conveniente (2 horas máximo)** | 2 horas |
| **Nivel educativo al que va dirigido el taller (Preescolar, Primaria, Secundaria, Terciaria, o General)** | Profesores de cualquier nivel educativo |
| **Número máximo de personas** | 30 |
| **Equipos audiovisuales o informáticos que requeriría (Proyector multimedia, TV grande, laboratorio de computación, conexión a Internet)** | Proyecto multimedia (para proyectar diapositivas Power Point desde un computador) |