



O impacto do software *Árbol* no raciocínio combinatório¹

Juliana Azevedo.

Universidade Federal de Pernambuco

Brasil

juliana.azevedo8387@gmail.com

Débora Macêdo Elisio da Costa.

Universidade Federal de Pernambuco

Brasil

debii_sol@yahoo.com.br

Rute Elizabete de Souza Rosa Borba.

Universidade Federal de Pernambuco

Brasil

borba@talk21.com

RESUMO: Neste estudo foi analisado o software *Árbol* para verificar se o mesmo pode ajudar na compreensão de problemas combinatórios. Foram coletados e analisados dados com 16 alunos de 5º ano de uma escola pública municipal da cidade do Recife. O estudo constou de um teste inicial, contendo variadas situações combinatórias, com os alunos dos Grupos 1 (G1 - participantes da intervenção) e 2 (G2 – não participantes da intervenção), duas sessões de intervenção com o G1 e um teste final com ambos os grupos. O G1 apresentou no teste final um desempenho superior ao G2, tendo desenvolvido ricas estratégias de resolução de diferentes tipos de problemas combinatórios. Assim, o acesso de alunos dos anos iniciais de escolarização ao software *Árbol* pode promover progressos em Combinatória, fazendo com que a tecnologia seja favorável à construção desse conhecimento – desde que os alunos sejam orientados quanto a aspectos relevantes a serem considerados.

Palavras-chaves: Software educativo. Raciocínio combinatório. Anos iniciais de escolarização.

1 INTRODUÇÃO

No ensino atual da Matemática há posturas adotadas que defendem esta disciplina como sendo muito rica na possibilidade de desenvolvimento do raciocínio lógico-dedutivo dos alunos. Afirma-se nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN - BRASIL, 1997), que a Matemática possibilita despertar no aluno a capacidade de generalização, favorecendo o desenvolvimento do raciocínio lógico. Os PCN sinalizam ainda que o uso de recursos diversos, como o uso das tecnologias da informação – através do computador, por exemplo – podem facilitar os processos de ensino e aprendizagem da Matemática, caracterizando-se numa das possíveis estratégias na superação de dificuldades.

¹ Esta pesquisa foi parcialmente financiada pela Fundação de Amparo à Ciência e Tecnologia do Estado de Pernambuco (Facepe – APQ 1095-7.08/08) e pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (MCT/CNPq – 476665/2009-4).

O impacto do software Árbol no raciocínio combinatório.

Leite, Pessoa, Ferraz e Borba (2009) afirmam que recursos tecnológicos motivam os alunos e instituem novas formas de aprendizagem por meio de linguagem próxima a dos alunos e com possibilidade do aluno obter retorno imediato, não dependendo sempre da aprovação do professor. Além disso, com o uso da tecnologia, há possibilidade dos alunos avançarem em seus próprios ritmos. Gitirana (2009) enfatiza que os softwares educacionais podem potencializar o aprendizado provendo “alunos e professores com objetos virtuais manipuláveis que possibilitam os alunos a pensarem sobre elementos da matemática” (p. 239), causando um diferencial para o seu ensino.

O uso de computador pode dar subsídios na resolução de problemas propostos possibilitando o desenvolvimento conceitual. Defende-se que o aprendizado por computador tem grande potencial e é necessário, pois, como afirmam Leite, *et al.* (2009, p.1), “a tecnologia faz parte da vida do aluno, é um bem social e não pode, nem deve ser negada”. Tal tecnologia aproxima o aluno ao manuseio virtual de uma ferramenta motivante e interativa, além de ser instrumento de desenvolvimento de conhecimentos pelo aluno.

Dentre os conteúdos matemáticos, um em particular – a Combinatória – é de grande importância, pois as situações nela trabalhada caracterizam-se como problemas, na essência do que seja uma situação problematizadora. A Combinatória constitui-se de problemas de contagem baseados no raciocínio multiplicativo, nos quais é preciso considerar-se seleção, ordem e repetição de elementos, bem como o levantamento de todos os casos possíveis e válidos.

Segundo Vergnaud (1986), certos conceitos desenvolvem-se durante um período de tempo maior que outros, iniciando-se no momento inicial de escolarização e indo até a ocasião do Ensino Médio. Além disso, não se pode perder de vista que conceitos são articulados entre si, sendo esta inter-relação de conceitos denominada por Vergnaud (1986) de campos conceituais. Estudos anteriores, como o de Pessoa e Borba (2009) indicam que o desenvolvimento do raciocínio combinatório é um caso de longo desenvolvimento, no qual precisam ser articulados os diversos significados (S) da Combinatória que implicam em propriedades e relações invariantes (I), bem como a variedade de representações simbólicas (R) com as quais os alunos devem ter contato.

A Combinatória é trabalhada de modo explícito e sistemático no Ensino Médio, apesar das indicações dos PCN (BRASIL, 1997) apontarem a necessidade de ser trabalhada desde os anos iniciais do Ensino Fundamental. Sendo assim, há uma prática na qual nos anos iniciais de escolarização é trabalhado apenas um tipo de problema combinatório (*produtos cartesianos*) e, somente no Ensino Médio, os outros tipos (*arranjos, combinações e permutações*) são trabalhados.

Baseadas na Teoria dos Campos Conceituais, Pessoa e Borba (2007) classificam os problemas de Combinatória em:

- **Produto Cartesiano:** envolve dois (ou mais) conjuntos básicos, mais um outro conjunto, que é formado pela combinação de cada elemento de um conjunto básico, com cada elemento do(s) outro(s) conjunto(s) básico(s).
- **Arranjo:** Consideremos n elementos distintos. Chama-se *arranjo simples* de ordem p cada maneira de escolher e ordenar p elementos entre eles ($p \leq n$).
- **Combinação:** Dados n elementos distintos, chama-se *combinação simples* de ordem p cada maneira de escolher p elementos entre eles, com $p \leq n$.
- **Permutação:** Dados n elementos distintos, chama-se *permutação simples* desses elementos cada uma das maneiras de ordená-los.

O impacto do software Árbol no raciocínio combinatório.

Diversos autores (Batanero, Navarro-Pelayo e Godino (1997), dentre outros) têm defendido o uso de árvores de possibilidade no ensino da Combinatória. Estas possuem a vantagem de possibilitar a visualização dos diversos casos possíveis e a seleção dos que são válidos, ou seja, dos que atendem as particularidades da situação apresentada.

O presente artigo sucedeu ao levantamento de softwares educativos realizado por Leite et al, bem como à realização de uma intervenção com alunos de anos finais do Ensino Fundamental no estudo de Ferraz, Borba e Azevedo, sugerindo a realização de uma intervenção com alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental. O presente estudo tem como objetivo a análise do software educativo *Árbol*², que propõe a solução de problemas combinatórios através de árvores de possibilidades, realizando as seguintes atividades:

- Descrever a abordagem do software educativo *Árbol* no que se refere ao ensino da Combinatória;
- Realizar um processo de intervenção com o uso do software educativo *Árbol* junto a alunos do 5º ano do Ensino Fundamental.
- Analisar, à luz da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, se o software educativo escolhido contribui para a construção do conhecimento combinatório.

2 MÉTODO

Inicialmente, foi descrita e analisada a abordagem do software educativo *Árbol* para, em seguida, trabalhar o software com alunos do 5º ano do Ensino Fundamental de uma escola da rede pública municipal do Recife.

A intervenção foi realizada com 16 alunos da turma em questão e estes foram divididos igualmente em dois grupos – um dos quais participou de um processo de intervenção com dois momentos distintos. Foi aplicado um teste inicial, seguido de duas sessões de intervenção com utilização do software *Árbol* (AGUIRRE, 2005) (Ver Quadros 1 e 2) e, por fim, um teste final (Ver Quadro 3), que possibilitou avaliar os avanços obtidos através das intervenções realizadas.

Quadro 1: Situações-problemas para o teste inicial e a Intervenção 1.

Produto Cartesiano:

1. Numa lanchonete há quatro tipos de suco (laranja, graviola, morango e abacaxi). Eles são servidos em copos de três tamanhos (pequeno, médio e grande). De quantas maneiras diferentes pode-se tomar um suco?
2. Para entrar no parque de diversões, João pode passar por quatro portões de entrada (A, B, C e D). Depois que João se divertir nos brinquedos do parque, ele poderá ir para casa passando por cinco saídas diferentes (E, F, G, H e J). De quantas maneiras diferentes ele poderá entrar e sair do parque?

Combinação:

3. Na loja de bichos de estimação há para vender quatro animais (um cachorro, um passarinho, um peixinho e uma tartaruga). Marcelo quer comprar dois bichinhos. De quantas maneiras diferentes ele pode escolher dois bichinhos?
4. Márcia tem em casa seis frutas (mamão, manga, abacaxi, laranja, banana e uva) e quer fazer uma salada usando duas dessas frutas. De quantas maneiras diferentes ela pode combinar essas frutas?

² O software *Árbol* se tornou conhecido das autoras desse estudo a partir da leitura do artigo: Sandoval, I.; Trigueiros, M.; Lozando, D. Uso de un interactivo para el aprendizaje de algunas ideas sobre combinatoria en primaria. *Anais... XII Comitê Interamericano de Educação Matemática*, Querétaro, México, 2007. Foi solicitado e a primeira autora do artigo disponibilizou o software para uso do GERAÇÃO - Grupo de Estudos em Raciocínio Combinatório do Centro de Educação– UFPE.

Arranjo:

5. Quatro crianças (Joaquim, Pedro, Márcia e Léo) estão disputando uma corrida no Play Station. De quantas maneiras diferentes pode-se ter o 1º e 2º lugares?
6. Edinho tem alguns caminhos e quer colocar placas neles. Ele quer usar as letras X, Y, Z, K e W e vai escrever duas letras em cada placa. Quantas são todas as possibilidades de placas que Edinho pode fazer, sem que se repitam as letras?

Permutação:

7. De quantas maneiras diferentes três pessoas (Maria, Luís e Carlos) podem posicionar-se numa fila do banco?
8. Tenho quatro bolas nas cores verde, marrom, amarela e rosa. Comprei uma caixa com quatro compartimentos e quero colocar cada bola em um desses compartimentos. De quantas maneiras diferentes posso organizar a caixa?

Fonte: Autoras mediante pesquisa.

Quadro 2: Situações-problema para a Intervenção 2.

Produto Cartesiano:

1. Douglas foi a uma lanchonete. No cardápio havia cinco opções de comida (cachorro quente, coxinha, empada, brigadeiro e bolo) e quatro tipos de bebida (suco de laranja, suco de morango, refrigerante e água). De quantas maneiras diferentes Douglas poderá lanchar combinando um tipo de comida e um tipo de bebida?

Combinação:

2. Felipe, Sandra, Carla, Francisco, Henrique e Ana vão formar duplas para jogar pingue-pongue. Quantas duplas diferentes podem ser formadas?

Arranjo:

3. Cinco turmas da Escola Saber (Turma A, Turma B, Turma C, Turma D e Turma E) vão disputar um torneio de queimado. De quantas maneiras diferentes pode-se ter o primeiro e segundo lugar no torneio?

Permutação:

4. De quantas maneiras possíveis pode-se escrever números de quatro algarismos diferentes, usando os algarismos 3, 5, 7 e 9?

Fonte: Autoras mediante pesquisa.

Quadro 3: Situações-problema para o teste final.

Produto Cartesiano:

1. Jane possui cinco blusas (amarela, rosa, laranja, vermelha e cinza) e duas saias (preta e branca). De quantas maneiras diferentes ela poderá se vestir usando uma de suas blusas e uma de suas saias?
2. Para um teste de teatro estão inscritos quatro meninos (Pedro, Rafael, Vinícius e Guilherme) e seis meninas (Aline, Cecília, Roberta, Caroline, Kátia e Natália). Desses, apenas um menino e uma menina serão selecionados. Quantos casais diferentes podem ser escolhidos?

Combinação:

3. Uma escola tem cinco professores (Paulo, Roberto, Ângela, Luiza e Fernando). Para o passeio da escola serão escolhidos dois professores para acompanhar os alunos. De quantas maneiras diferentes podem ser escolhidos esses dois professores?
4. Sete pessoas (Beatriz, Joana, Carlos, Marcos, Fátima, George e Marina) foram apresentadas umas às outras. Quantos apertos de mão entre pessoas diferentes foram dados?

Arranjo:

5. De quantas maneiras possíveis pode-se escrever números de dois algarismos diferentes, usando os algarismos 2, 4, 6 e 8?
6. A turma da terceira série quer eleger o representante e o vice-representante da turma. Há cinco alunos (Luciana, Priscila, João, Talita e Diego) interessados nesses cargos. De quantas maneiras possíveis estes alunos podem ser eleitos para os cargos de representante e vice-representante?

Permutação:

7. Gabriela ganhou um porta-jóias com três compartimentos. Ela possui um anel, um colar e uma pulseira para guardar no seu novo porta-jóias. De quantas maneiras diferentes ela poderá organizar suas jóias?
8. Quatro torcedores irão para um jogo de futebol (Renata, Isabel, Luciano e Ricardo). De quantas maneiras diferentes eles podem se sentar em quatro cadeiras dispostas lado a lado?

Fonte: Autoras mediante pesquisa.

Para a primeira sessão de intervenção, foram utilizadas as questões do teste inicial. O software foi apresentado às crianças e foi explicado o modo de utilizá-lo. As crianças passaram a responder as situações, durante as quais eram questionadas sobre aspectos dos problemas, como o número de elementos do conjunto a serem escolhidos e a relevância, ou não, da ordem dos elementos na geração de possibilidades. A utilização das questões do teste inicial nesta etapa visava comparar as respostas anteriores com o intuito de perceber o erro e o acerto das questões. Na segunda sessão de intervenção, foi utilizada outra listagem de situações-problema, contendo quatro questões diferentes do teste inicial. Nesse momento, os alunos já obtinham maior autonomia na utilização do software.

O restante dos alunos da turma formou o *Grupo 2*, que não participou de nenhum processo de intervenção específico durante a realização da pesquisa. Após a coleta de dados, retornou-se à escola e estes alunos também participaram do uso do software *Árbol*, de modo que pudessem também utilizar o recurso no sentido de auxiliar seus desenvolvimentos conceituais.

A análise dos dados obtidos foi realizada em dois aspectos. Primeiramente foi realizada a análise quantitativa das questões acertadas pelos dois grupos da pesquisa, diferenciando o quantitativo das questões acertadas no teste inicial e no teste final e comparando os acertos do *Grupo 1* e do *Grupo 2*. Posteriormente, foi realizada a análise qualitativa, à luz da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, destacando as estratégias (em termos de Representações Simbólicas - R) utilizadas pelos alunos na resolução do teste inicial e do teste final, bem como, a influência do software na percepção dos Invariantes - I - dos significados - S - apresentados.

3 PRINCIPAIS RESULTADOS

3.1 COMO O SOFTWARE EDUCATIVO *ÁRBOL* ABORDA A COMBINATÓRIA?

No estudo de Ferraz, Borba e Azevedo (2010) foi analisado o uso do software *Árbol* (AGUIRRE, 2005) (Figura 1) por alunos dos anos finais do Ensino Fundamental. Este software, através do diagrama de *árvore de possibilidades*, fornece todas as combinações possíveis, sejam elas válidas ou não, nos quatro tipos de problemas (*produto cartesiano*, *combinação*, *arranjo* e *permutação*).



Figura 1: Software *Árbol* (AGUIRRE, 2005)

Entretanto, Ferraz, Borba e Azevedo (2010) enfatizam que o software não apresenta *feedback* específico a cada tipo de problema. Essas autoras destacam que, com atenção às restrições, é possível desenvolver com o *Árbol* um bom trabalho em sala, uma vez que as representações utilizadas são de caráter menos formal, ou seja, não indicam diretamente o uso de fórmulas. A ideia considerada relevante é a que Leite, *et al.* (2009, p.9) defendem, enfatizando “a importância de inicialmente explorarmos a representação para, a seguir, formalizar o conceito”, pois desta maneira a aprendizagem torna-se estimulante e significativa. Cada tipo de problema combinatório tem características específicas e estas podem ser destacadas por meio da análise de diagramas de árvores construídas no software.

O impacto do software *Árbol* no raciocínio combinatório.

Na primeira tela do *software Árbol* (Figura 2) é possível escolher os níveis e os elementos que a pergunta da questão de Combinatória sugere e, a partir daí, é possível visualizar na tela seguinte todas as possibilidades para a resolução da questão.

Nas questões de *produto cartesiano*, usando como exemplo a primeira questão do Quadro 3, os níveis da situação são os conjuntos de blusas e saias e os elementos serão as características (cores) de cada blusa e saia. Gera-se, nesse caso, um total de 10 possibilidades (Figura 3).

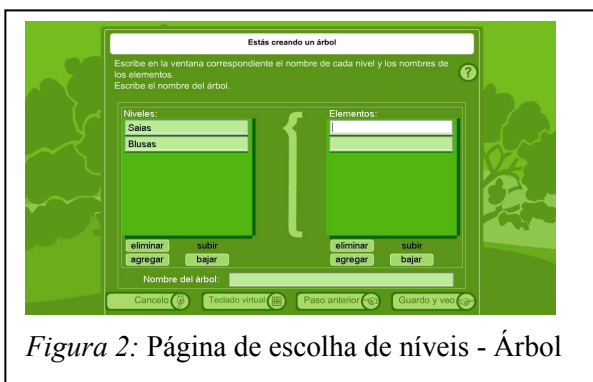


Figura 2: Página de escolha de níveis - Árbol

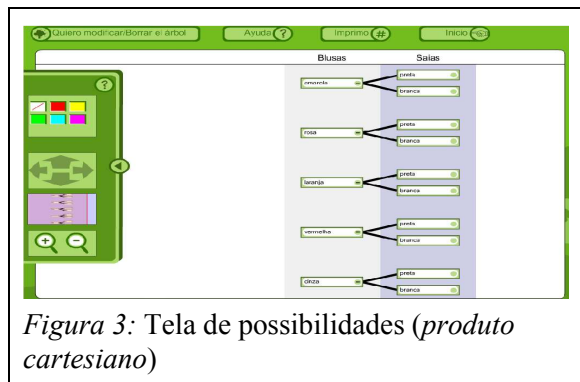


Figura 3: Tela de possibilidades (*produto cartesiano*)

Nas questões de *combinação*, usando como exemplo a quarta questão do Quadro 3, os níveis da situação correspondem à quantidade de pessoas envolvidas num aperto de mão, escolhendo, então, a dupla que realiza a ação, e os elementos são todas as pessoas possíveis de serem escolhidas. Gera-se, nesse caso, um total de 21 possibilidades (Figura 4).

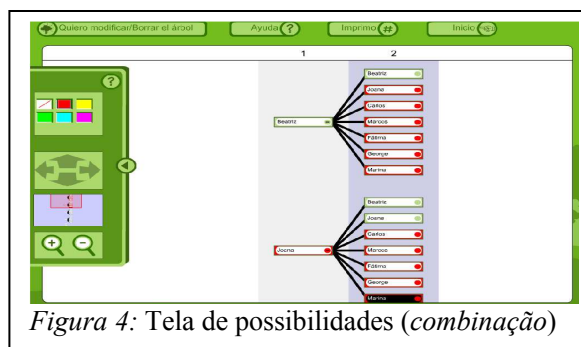


Figura 4: Tela de possibilidades (*combinação*)

Nas questões de *arranjo*, usando como exemplo a sexta questão do Quadro 3, os níveis da situação consistem nos cargos de representante e vice-representante e os elementos são todas as pessoas que concorrem aos cargos. Gera-se, nesse caso, um total de 20 possibilidades (Figura 5).

Nas questões de *permutação*, usando como exemplo a oitava questão do Quadro 3, os níveis correspondem à quantidade de cadeiras existentes (quatro) e os elementos são todas as pessoas que podem se sentar em cada cadeira (quatro). Esta situação gera um total de 24 possibilidades (Figura 6).

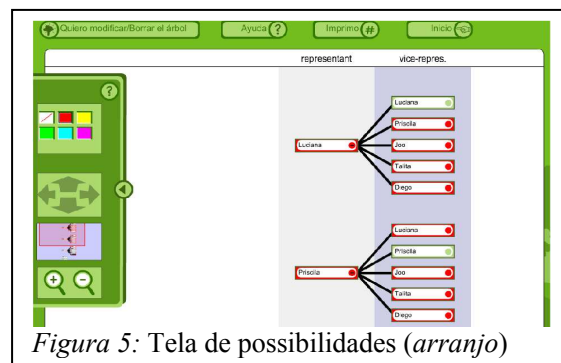


Figura 5: Tela de possibilidades (*arranjo*)

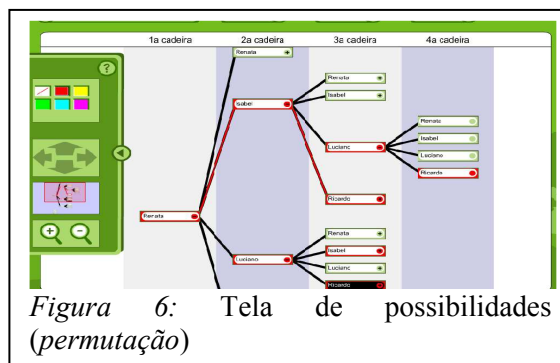


Figura 6: Tela de possibilidades (*permutação*)

O impacto do software Árbol no raciocínio combinatório.

Vale salientar que, nos três últimos tipos de problemas, o aluno precisa selecionar (pintando de vermelho) os casos válidos.

Assim, o software Árbol foi escolhido para o processo de intervenção do estudo aqui relatado por possibilitar o trabalho com os diversos tipos de problemas combinatórios, por usar uma representação válida para todos os tipos e por não estimular apenas o ensino de fórmulas.

3.2 QUAL O IMPACTO DO USO DO ÁRBOL NO APRENDIZADO DA COMBINATÓRIA?

Inicialmente, foi possível perceber que a Combinatória era um assunto que os alunos apresentavam muitas dificuldades, pois, constata-se, através dos resultados obtidos no teste inicial, expostos na Tabela 1, o baixo desempenho dos alunos nas questões apresentadas.

Considerando-se os 32 possíveis acertos em cada tipo (dois por cada um dos 16 alunos), tinha-se a possibilidade de um total de 128 respostas corretas. Da totalidade de questões possíveis de serem respondidas apenas 18 foram respondidas corretamente, sendo a maioria dos acertos em problemas do tipo *produto cartesiano*.

Tabela 1: Total de acertos por tipo de problema no teste inicial:

Tipos de problema	Total de acertos (no máximo 16 em cada tipo)
PRODUTO CARTESIANO	15
COMBINAÇÃO	0
ARRANJO	1
PERMUTAÇÃO	2

Corroborar-se, então, com Pessoa e Borba (2009), a maior facilidade que as crianças apresentam na resolução de situações-problema do tipo *produto cartesiano*, uma vez que esse tipo de questão é visto com maior frequência desde os primeiros anos de escolarização. Comprova-se também, de acordo com Pessoa e Borba (2009), a maior dificuldade na resolução das questões do tipo *combinação*, uma vez que os alunos precisam entender que a ordem dos elementos não influencia no levantamento de possibilidades distintas.

Para a primeira intervenção, com a utilização do software *Árbol*, foram utilizadas as questões do teste inicial. De início houve uma apresentação do software, mostrando aos alunos o passo a passo de como utilizá-lo. Depois, os alunos liam as questões do teste inicial e eram resolvidas junto com os mesmos a primeira questão de cada tipo de problema, falando-se das características de cada situação e chamando atenção para os casos que deviam ser ou não considerados. Em seguida, e os alunos resolviam sozinhos a segunda questão de cada tipo.

Durante a resolução, o software evidenciava para os alunos todas as possibilidades de combinação e as discussões efetuadas permitiam que, ao fim de cada questão, os alunos verificassem e comparassem as respostas, com o intuito de saber se eles haviam acertado ou errado a mesma.

Já na segunda intervenção, foi utilizada outra listagem de situações-problema contendo quatro questões diferentes do teste inicial. Nesse momento os alunos já obtinham maior autonomia ao utilizar o software e, ao ler as questões, iam fazendo menção às situações da intervenção anterior.

O impacto do software Árbol no raciocínio combinatório.

Durante a primeira intervenção com o *software educativo Árbol*, foi possível inferir o pensamento dos alunos nas estratégias de resolução do teste inicial. Em algumas questões houve estratégias de resolução inadequadas para a solução da questão. Na Figura 7 pode-se observar que o aluno em questão realizou uma operação utilizando os números descritos no enunciado do problema, porém seu resultado não poderia ser obtido através do cálculo efetuado. Pessoa e Borba (2009) caracterizam esse tipo de estratégia de resolução como um *não-estabelecimento de relação com a situação proposta*. Nesses casos, o aluno não soube resolver a questão através de estratégia apropriada.

8. Tenho quatro bolas nas cores verde, marrom, amarela e rosa. Comprei uma caixa com quatro compartimentos e quero colocar cada bola em um desses compartimentos. De quantas maneiras diferentes posso organizar a caixa? (*Permutação*)

$$\frac{8^4}{4} = 16$$

Pode organiza a caixa de 16 maneiras

Figura 7: Resposta Incorreta, sem estabelecimento de relação - Teste inicial.

A segunda intervenção realizada, contando com apenas quatro questões, possibilitou um novo olhar sobre as questões de Combinatória, uma vez que as crianças tinham a chance de mais um momento de contato com os problemas através do recurso tecnológico e com nova oportunidade de perceber as propriedades e as regularidades dos problemas.

Ao realizarem a atividade com o software educativo, além de encontrarem a resposta correta, os alunos percebiam os seus êxitos, ou não, ao compararem o obtido no uso do recurso com a estratégia utilizada na resolução do teste inicial, buscando o porquê do erro ocorrido antes da intervenção. Essa atividade pode ser realizada sem o uso do software, ou seja, apenas com lápis e papel, encontrando resultados semelhantes, desde que o professor auxilie os alunos na reflexão sobre as relações e propriedades relevantes. A vantagem, portanto, do uso do programa é a listagem efetuada pelo próprio software de todas as possibilidades, diminuindo a necessidade do próprio aluno listar todos os possíveis casos, devendo, entretanto, marcar os casos válidos.

Observando a Tabela 2, referente aos resultados no teste final, percebe-se um progresso no desempenho dos alunos. Os alunos que participaram da intervenção tiveram quase 100% de acerto nas questões de *produto cartesiano* e avançaram bem em seus desempenhos nos problemas de *combinação* e *arranjo*, mas ainda mantiveram dificuldades em relação aos problemas de *permutação*.

Tabela 2: Total de acertos por tipo de problema no teste final:

Tipos de problema/ Total de acertos	Grupo 1 – com intervenção (16 possíveis acertos)	Grupo 2 – sem intervenção (16 possíveis acertos)
PRODUTO CARTESIANO	15	8
COMBINAÇÃO	11	5
ARRANJO	11	3
PERMUTAÇÃO	5	1

O impacto do software Árbol no raciocínio combinatório.

Nas questões de *permutação* verifica-se, assim como no estudo de Ferraz, Borba e Azevedo (2010), que há um melhor desempenho dos alunos nas questões que existem menos possibilidades a serem listadas, uma vez que, das seis questões de *permutação* respondidas corretamente, cinco se referiam à questão cujo resultado era seis e, apenas uma se referia à questão cujo resultado era 24. Essa dificuldade pode ser consequência da grande quantidade de ramos apresentada pelo *Árbol* para a solução da questão, o que dificultava a visualização do total de possibilidades. Esse caso pode ser a peça-chave para a não superação da dificuldade com o tipo de problema *permutação* após a intervenção.

Entretanto, durante as intervenções, algumas crianças se mostravam interessadas e tentavam generalizar a situação para que os ramos não precisassem ser todos abertos, facilitando com isso a visão sistemática do problema a ser solucionado.

Esse fato foi internalizado por uma das crianças que, na ocasião do teste final, explicitou a árvore de possibilidades na resolução da questão e não repetiu todas as possibilidades (abertura de novos ramos), multiplicando o total de possibilidades para um caso (seis possibilidades com Renata sentada na primeira cadeira) por todos os casos solicitados (Renata, Isabel, Luciano e Ricardo), como é possível observar na Figura 8.

8. Quatro torcedores irão para um jogo de futebol (Renata, Isabel, Luciano e Ricardo). De quantas maneiras diferentes eles podem se sentar em quatro cadeiras dispostas lado a lado? (*Permutação*)

8 - Renata → Isabel → Luciano → Ricardo
 → Luciano → Ricardo → Isabel
 → Ricardo → Isabel → Luciano
 → Isabel → Ricardo → Luciano
 → Luciano → Isabel → Ricardo
 → Ricardo → Luciano → Isabel
 8-R = 24 Porque $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

Figura 8: Resposta correta com explicitação da estratégia - Teste final.

Também se percebe que, após o aprendizado da Combinatória através da árvore de possibilidades com a utilização do *Árbol*, os alunos do G1 passaram a utilizar essa estratégia de resolução para os problemas do teste final, desenhando-as no papel, como pode-se observar na Figura 9.

1. Jane possui cinco blusas (amarela, rosa, laranja, vermelha e cinza) e duas saias (preta e branca). De quantas maneiras diferentes ela poderá se vestir usando uma de suas blusas e uma de suas saias? (*produto cartesiano*)

1-R = saia blusas
 preta → amarela
 → rosa
 → laranja
 → vermelha
 → cinza
 branca → amarela
 → rosa
 → laranja
 → vermelha
 → cinza
 10 maneiras porque $2 \times 5 = 10$

Figura 9: Resposta correta com explicitação da estratégia - Teste final.

O melhor desempenho no teste final do grupo que passou pela intervenção também fica evidente no crescimento de respostas corretas por tipos de problema, uma vez que, por exemplo, nas questões de *produto cartesiano* quase a totalidade de crianças do G1 respondeu

O impacto do software Árbol no raciocínio combinatório.

corretamente as questões propostas (93,75%), e nas questões de *combinação* e *arranjo* esse grupo evoluiu da quase totalidade de questões respondidas incorretamente para 68,75% de questões respondidas corretamente (Observar nas Tabelas 1 e 2).

A análise aqui efetuada permite ressaltar a importância do trabalho com o software *Árbol* voltado para a construção do conhecimento combinatório desde os anos iniciais de escolarização, uma vez que o grupo que passou por processos de intervenção com o *Árbol* evidenciou avanços substanciais, tanto em natureza quantitativa (maior número de acertos), quanto qualitativa (estratégias novas – como a construção de árvores de possibilidades).

4 CONCLUSÕES

Diante do que foi observado e analisado, pode-se concluir que mesmo a partir de um baixo desempenho em Combinatória, alunos em período inicial de escolarização, podem ter algumas dificuldades superadas a partir de uso de softwares, em particular o *Árbol*. Destaca-se que o software aqui utilizado permitiu que os alunos utilizassem uma forma de representação – árvore de possibilidades – na qual puderam refletir sobre a estrutura das situações, uma vez que ficaram livres da responsabilidade de listar todos os possíveis casos.

Destaca-se também que o software auxilia no aprendizado, porém é necessário que o professor aponte os principais aspectos de cada tipo de questão, ou seja, se todos os elementos devem ser usados e se a ordem deles pode influenciar ou não no resultado.

Com a participação constante do professor, grandes progressos podem ser obtidos num curto período de trabalho, como o vivenciado com a turma na qual foram coletados dados que revelaram um significativo aumento de respostas corretas. Vale salientar que o recurso tecnológico utilizado possibilitou uma compreensão mais ampla da Combinatória por parte dos alunos participantes da intervenção. Pode-se concluir ainda, que através do uso de materiais tecnológicos, a criança pode ser incentivada à reflexão de novas estratégias de resolução de questões.

Além disso, o uso de softwares educativos poderá servir como mola propulsora para a disseminação do conhecimento combinatório em sua plenitude desde a infância, uma vez que pode estimular o interesse da criança, pois se trata de um recurso prazeroso que, por meio de manipulações, podem tornar o processo de aprendizagem mais concreto. Entretanto, é preciso que o professor esteja bem preparado, de forma a fazer melhor uso do recurso.

Espera-se, dessa forma, que o presente estudo tenha evidenciado o quanto intervenções podem levar alunos de anos iniciais de escolarização a uma grande melhora de desempenho em questões de Combinatória.

LIMITAÇÕES DO ESTUDO E PERSPECTIVAS FUTURAS

É preciso ressaltar que no presente estudo há limitações quanto ao uso de software no que se refere à autonomia total das crianças, pois, é necessário que haja sempre uma discussão – com o professor e com colegas – sobre quais as possibilidades válidas para cada tipo de problema, uma vez que o software não dispõe de feedback. Entretanto, é possível fazer um trabalho positivo com o objetivo do desenvolvimento do conhecimento combinatório.

Esse trabalho nos dá perspectivas positivas quanto ao ensino da Combinatória, pois, é possível refletir na sua essência e destacar, tanto os aspectos positivos, quanto os negativos.

O impacto do software Árbol no raciocínio combinatório.

Entender as limitações do software pode indicar melhorias na sua composição, e, além disso, propiciar novas pesquisas nesta área do conhecimento.

REFERÊNCIAS

- Aguirre, C. (2005). *Diagrama de Árbol*. Multimidea.
- Batanero, C. Navarro-Pelayo, V. Godino, J.D. (1997) Effect of the Implicit Combinatorial Model on Combinatorial Reasoning in Secondary School Pupils. In: *Educational Studies in Mathematics*, v.32, n.2, p.181-199. Disponível em: <http://www.ugr.es/~batanero/ARTICULOS/Implicitmodel.htm>, Acesso em: 06 fev. 2010.
- Brasil. (1997). *Parâmetros Curriculares Nacionais - Matemática*. 1ª a 4ª série. Secretaria de Ensino Fundamental.
- Ferraz, M.; Borba, R.; Azevedo, J. (2010). *Usando o software Árbol na construção de árvores de possibilidades para a resolução de problemas combinatórios*. Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática. Salvador.
- Gitirana, V. (2009). Função matemática: o entendimento dos alunos a partir do uso de softwares educacionais. In: Borba, Rute; Guimarães, Gilda (Orgs.). *A Pesquisa em Educação Matemática: repercussões na sala de aula*. São Paulo: Cortez. P.212 – 240.
- Leite, M.; Pessoa, C.; Ferraz, M.; Borba, R.(2009). *Softwares Educativos e Objetos de Aprendizagem: um olhar sobre a análise combinatória*. Anais do X Encontro Gaúcho de Educação Matemática – X EGEM, Ijuí.
- Pessoa, C.; Borba, R. (2007). *Estratégias de resolução de problemas de raciocínio combinatório de alunos de 1ª à 4ª série*. Anais do IX Encontro Nacional de Educação Matemática. Belo Horizonte.
- Pessoa, C.; Borba, R. (2009). *Quem Dança com Quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1ª a 4ª série*. Zetetiké – Cempem – FE – Unicamp – v17, n.31 – jan/jun.
- Vergnaud, G. (1986). Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didática das matemáticas. Um exemplo: as estruturas aditivas. *Análise Psicológica*, 1. p. 75-90.