XIII CONFERENCIA INTERAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
CIAEM 2011
26 - 30 Junio, 2011
Recife, Brasil
50 años del Comité Interamericano de Educación Matemática

Representaciones con software. Un puente hacia la aprehensión conceptual.

Patricia Alejandra **Có**
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura. Universidad Nacional de Rosario
Argentina
co@fceia.unr.edu.ar
Mónica **del Sastre**
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura. Universidad Nacional de Rosario
Argentina
delsas@fceia.unr.edu.ar
Erica **Panella**
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura. Universidad Nacional de Rosario
Argentina
panella@fceia.unr.edu.ar

Resumen

A través de nuestra experiencia como docentes de Matemática en las carreras de Ingeniería de la Universidad Nacional de Rosario podemos reconocer, en la mayoría de nuestros alumnos, importantes falencias en lo que hace a conocimientos supuestamente adquiridos y grandes dificultades para encarar los nuevos procesos de aprendizaje. En este trabajo proponemos un análisis reflexivo sobre algunas situaciones didácticas tendiente a clarificar el rol que juegan las distintas representaciones de algunos objetos matemáticos en su comprensión, en particular las representaciones generadas a partir de un software matemático.

Palabras clave: herramientas CAS, representaciones semióticas, aproximación sociocultural.

Introducción

Hace ya más de dos décadas que desde el ámbito educativo se están dando a conocer investigaciones sobre cómo enseñar y aprender Matemática en la Universidad. Llevamos tiempo leyendo sobre la detección de dificultades que los alumnos encuentran en el aprendizaje de ciertos conceptos y sobre las vías para superarlas. También son muchos nuestros intentos por cambiar situaciones que se presentan en los cursos de Matemática de las carreras de Ingeniería de la Universidad Nacional de Rosario (U.N.R.), cuando año a año observamos las mismas dificultades en el aprendizaje de temas específicos y la repetición de errores que "a priori" sabemos nuestros alumnos van a cometer.

A través de nuestra experiencia podemos reconocer que estos estudiantes presentan, en su mayoría, dificultades en llevar a cabo actividades que les permitan la interpretación de distintas representaciones, registros de representación, tratamientos y conversiones. Esto se evidencia principalmente en el momento en que tienen que modelizar figuras a partir de definiciones, o bien al intentar deducir propiedades a partir de representaciones gráficas dadas.

En un gran número de casos podemos constatar que los obstáculos persisten aun en alumnos que, habiendo promovido la asignatura con muy buen rendimiento, fracasan o no tienen buen desempeño en asignaturas correlativas posteriores del plan de estudios. Y el panorama es bastante desalentador ya que comprobamos que esta situación tiende a empeorar año tras año.

La realidad muestra que el problema resulta ser más complejo de lo que en principio se supone. Coincidimos con Artigue cuando afirma que**:**

> Los procesos de enseñanza y aprendizaje dependen parcialmente de los entornos culturales y sociales en los que se desarrollan. Hasta cierto punto, los resultados que se obtienen dependen, de esta forma, del espacio y del tiempo; su campo de validez es necesariamente limitado. Sin embargo, estos límites no son generalmente fáciles de identificar… El conocimiento basado en la investigación no se transforma fácilmente en estrategias educativas efectivas. (Artigue, 2003, p. 117)

Diversas teorías de investigación (enfoques constructivistas, socio constructivistas, interaccionistas o antropológicos), que intentan tener más en cuenta las dimensiones sociales y culturales de los procesos de enseñanza y aprendizaje, muestran tendencias generales en cuanto a similitudes entre las dificultades que presentan los estudiantes y entre los problemas de enseñanza que encontramos los docentes.

Estas similitudes, presentadas en diferentes entornos culturales, podrían hacernos pensar que la aplicación de *recetas* es la vía de solución. Sin embargo, sabemos que en educación las *recetas* no son adaptables a cualquier contexto. Todo por el contrario, consideramos que así como debemos planificar cuidadosamente nuestras prácticas intentando dotar de significatividad a las construcciones matemáticas que se llevan a cabo en el aula, también debemos hacerlo atendiendo al saber cultural de nuestros alumnos para lograr un rediseño efectivo del discurso matemático escolar.

El objetivo de este trabajo es proponer un análisis reflexivo sobre algunas situaciones didácticas tendiente a clarificar el rol que juegan las distintas representaciones de algunos objetos matemáticos en su comprensión, en particular las representaciones generadas a partir de un software matemático.

Marco teórico

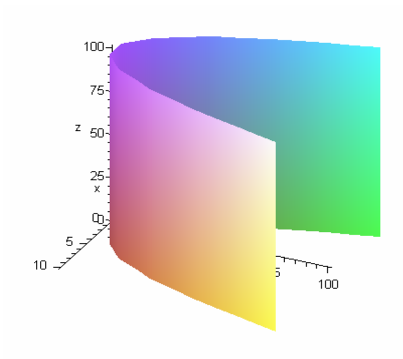
Desde la década del 80 comienza a detectarse un empleo sistemático de la noción de *representación* en la educación matemática. Investigaciones recientes sostienen que las diferentes representaciones de los conceptos matemáticos son fundamentales para su comprensión y han llevado a incrementar su estudio durante los últimos años.

Al respecto, Duval (1993) afirma que las diferentes representaciones semióticas de un objeto matemático son absolutamente necesarias en los procesos de enseñanza y aprendizaje, ya que los objetos matemáticos no son directamente accesibles por la percepción o por una experiencia intuitiva inmediata como son los objetos comúnmente llamados *reales* o *físicos*.

Muchos investigadores han dedicado su esfuerzo a precisar el concepto de *representación* y a analizar el papel que ésta desempeña en la construcción del conocimiento por parte de los estudiantes. Consideramos a las *representaciones semióticas* como:

> producciones constituidas por el empleo de signos que pertenecen a un sistema de representación, el cual tiene sus propios constreñimientos de significancia y de funcionamiento. Una figura geométrica, un enunciado en lengua natural, una fórmula algebraica, una gráfica, son representaciones semióticas que pertenecen a sistemas semióticos diferentes. (Duval, 1993, p.118)

Este autor clasifica las representaciones en distintos *registros de representación*, según sus características. Por ejemplo, para el concepto de superficie cilíndrica podemos dar la siguiente ecuación: $y = x^2$. La misma es *una* representación semiótica de *una* superficie cilíndrica en particular en el registro algebraico. Si en lugar de la ecuación presentamos la definición: "Una superficie cilíndrica es la generada por una recta (generatriz) que se mantiene paralela a una dirección dada y apoyándose en una curva (directriz) contenida en un plano no paralelo a la recta" (Sagristá, 2008); ésta constituye *una* representación semiótica correspondiente al registro lingüístico. Pero también es posible dar su gráfica y en ese caso el registro utilizado es el figural o gráfico y dos representaciones posibles son las que se muestran a continuación:



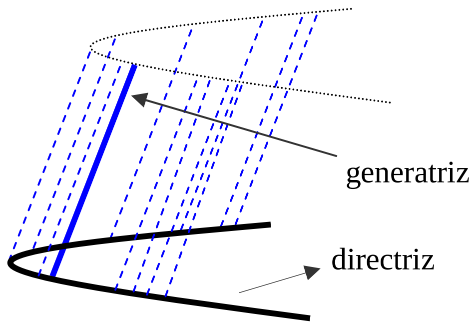


Figura 1. Superficie cilíndrica.

Si cambia el registro, necesariamente cambia la representación semiótica, mientras que puede cambiar la representación semiótica pero mantenerse el mismo registro.

En el interior de cada registro se pueden llevar a cabo *procesamientos*, es decir, *transformaciones* de las representaciones en el mismo registro donde fueron creadas. Más importante aún, entre diferentes registros de representación se pueden realizar *conversiones*, que son transformaciones de la representación de un objeto hecha dentro de un registro, en otra representación de ese mismo objeto dentro de otro registro. En nuestro ejemplo se llevarían a cabo operaciones de conversión entre los registros algebraico o simbólico y gráfico al "representar gráficamente la superficie dada por la ecuación $y = x^2$" o recíprocamente al "escribir la ecuación que representa a una superficie dada por su gráfica".

Duval (1999) advierte que las *reglas de conversión no son las mismas según el sentido en el que se efectúa el cambio de registro* y por lo tanto es posible que al realizar una conversión entre diferentes registros se pierda el contenido dado y la representación obtenida cubra sólo parcialmente el de la representación de partida.

Si el concepto está adquirido, el pasaje de una representación a otra se produce en forma espontánea y cualquier representación del mismo, en cualquier registro, debe producir idéntico significado. Cuando esto no sucede, Duval (1999) afirma que no hay *congruencia* entre las representaciones de un mismo objeto. Esta falta de congruencia puede ser producto de aprendizajes demasiado centrados en contenidos conceptuales o del gran predominio que se le otorga en la enseñanza tradicional al registro algebraico sumado al status inframatemático que se le da en general al registro gráfico.

Sólo puede accederse a un objeto matemático a través de alguna de sus posibles representaciones, y como dice Duval (1999): "dado que cada representación es parcial con respecto al concepto que representa, debemos considerar como absolutamente necesaria la interacción entre diferentes tipos de representaciones del objeto matemático para lograr su aprehensión conceptual" (p. 185).

El papel que juegan las representaciones gráficas y la visualización de dichas representaciones dentro del marco de la educación matemática tiene una importancia notable.

Las nuevas tecnologías modifican esencialmente los entornos de enseñanza y de aprendizaje. Es aún un tema de permanente discusión el hecho de cómo llevar a cabo su implementación en el aula para transformarlas en instrumentos cognitivos. Al respecto, Jonassen (1995) nos dice que una herramienta cognitiva es todo aquel instrumento del que pueden servirse las personas para amplificar su capacidad de comprender y operar en el mundo y que la cualidad de herramienta cognitiva no es intrínseca a un instrumento. Estas herramientas permiten brindar un amplio abanico de representaciones de objetos y de relaciones matemáticas en diferentes registros. Y lo que es más importante, posibilitan y favorecen la conversión entre registros, lo cual supone un recurso didáctico inapreciable en la educación matemática.

Lineamientos metodológicos

El presente trabajo sigue los lineamientos metodológicos del proyecto de investigación que lo enmarca: "Análisis socioepistemológico de los contenidos del Cálculo en carreras de Ingeniería. Un puente entre la investigación y la realidad del aula" (ING336). La metodología en él utilizada podría definirse como una extensión de los primeros pasos de la Ingeniería Didáctica.

El sustento teórico de la Ingeniería Didáctica proviene de la Teoría de Situaciones Didácticas (Brousseau, 1997) y la Teoría de la Transposición Didáctica (Chevallard, 1991), que tienen una visión sistémica al considerar a la Didáctica de la Matemática como el estudio de las interacciones entre un saber, un sistema educativo y los alumnos, con objeto de optimizar los modos de apropiación de este saber por el sujeto (Brousseau, 1998). El término Ingeniería Didáctica se utiliza en Didáctica de la Matemática con una doble función: como metodología de investigación y como producciones de situaciones de enseñanza y aprendizaje:

> ... el término Ingeniería Didáctica designa un conjunto de secuencias de clase concebidas, organizadas y articuladas en el tiempo de forma coherente por un profesor-ingeniero para efectuar un proyecto de aprendizaje de un contenido matemático dado para un grupo concreto de alumnos. A lo largo de los intercambios entre el profesor y los alumnos, el proyecto evoluciona bajo las reacciones de los alumnos en función de las decisiones y elecciones del profesor. Así, la Ingeniería Didáctica es, al mismo tiempo, un producto, resultante de un análisis a priori, y un proceso, resultante de una adaptación de la puesta en

> funcionamiento de un producto acorde con las condiciones dinámicas de una clase. (Douady, 1996, p.241)

Tradicionalmente la Ingeniería Didáctica (Artigue, 1995, p.40) distingue tres dimensiones ligadas a los procesos de construcción del conocimiento:

- Dimensión epistemológica: asociada a las características del saber puesto en funcionamiento.
- Dimensión cognitiva: asociada a las características cognitivas de los alumnos a los que se dirige la enseñanza.
- Dimensión didáctica: asociada a las características del funcionamiento del sistema de enseñanza.

La socioepistemología incorpora la expresión "construcción social del conocimiento matemático avanzado", entendiendo por ello al conjunto de las interacciones, explícitas o implícitas que se establecen entre los procesos avanzados del pensamiento, la epistemología de la matemática avanzada y las prácticas humanas altamente especializadas.

Agregamos entonces, a los tres aspectos antes citados, la Dimensión sociocultural asociada al contexto sociocultural que le da origen al conocimiento en cuestión.

La propuesta es seguir el método que plantean Dolores Flores, Chi Chablé, Canul Pech, Cantú Interián & Pastor Solache (2009) quienes proponen partir de la experiencia cotidiana del profesor para llevarlo a una reflexión sistemática producto de la investigación en donde son incluidas propuestas para el aula.

Descripción de la situación

Los planes de estudio actuales (vigentes desde 1996) de la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura (F.C.E.I.A.) de la U.N.R. se diseñaron en el período histórico que comienza en Argentina en los años 90 como "una época en que se vinculaban el sistema educativo con el productivo, considerándose a la educación como inversión personal y colectiva que debe seguir los lineamientos del mercado". Estos planes se enmarcan en los requisitos de la Ley Educación Superior (LES), la cual forma parte de la Ley Federal de Educación (LFE), sancionadas por el Ministerio de Cultura y Educación de la Nación, en 1995 y 1993 respectivamente. La LFE estructura los niveles de enseñanza en: Educación inicial, Educación General Básica (EGB), Educación Polimodal y Educación Superior.

No hay registro de jurisdicciones en las que la Ley se haya implementado de igual manera (especialmente desde el punto de vista de la Estructura Educativa). La atomización del Sistema Educativo Nacional que provocó la pseudo-aplicación de la Ley Federal evidenció la necesidad de una nueva legislación.

En el año 2006 se sancionó la Ley de Educación Nacional (LEN) que "restituye la unidad del sistema educativo argentino tras una década de fragmentación generada a partir de la llamada Ley Federal" (Prediseño curricular de la provincia de Santa Fe, 2010, p. 1). La misma se encuentra reglamentada y en proceso de implementación.

Desde hace algunos años la F.C.E.I.A. recibe como alumnos a egresados del ya mencionado Nivel Polimodal y hay plena coincidencia en la afirmación docente de que la cantidad y calidad de los conocimientos de los ingresantes viene sufriendo un sensible e ininterrumpido deterioro desde entonces.

Las autoras de este trabajo elegimos enfocarnos en los serios inconvenientes que evidencian nuestros alumnos a la hora de representar algunos objetos matemáticos, principalmente los referidos al espacio tridimensional. Justificamos nuestro interés en la convicción de que las representaciones semióticas son un punto básico para el aprendizaje del Cálculo en general, de la Geometría en particular y para la resolución de problemas, especialmente los de Ingeniería.

Para primero entender y luego tratar de remediar esta situación que aparece instalada en nuestro entorno como algo natural, esperable y frecuentemente explicada sólo como *una consecuencia de las deficiencias atribuidas a la escuela media*, nos propusimos revisar la formación geométrica espacial que deberían haber recibido y con la que deberían contar nuestros alumnos.

Según las declaraciones curriculares, durante el 1º ciclo de EGB (6-8 años) los alumnos se inician en el reconocimiento de las figuras geométricas a partir de la manipulación de objetos de la vida cotidiana y de la observación de sus representaciones gráficas. En el 2º ciclo (9-12 años) comienzan a manejar el vocabulario geométrico, a representar las figuras en dos y tres dimensiones y a diferenciarlas por las características o propiedades que las definen. En el 3º ciclo (12-14 años) empiezan a reconocer y clasificar los elementos de cuerpos poliédricos y redondos como así también a calcular superficies y volúmenes. En el ciclo Polimodal se inician en el estudio de la Geometría Analítica, pasando por vectores y rectas (en el plano y el espacio) hasta llegar al estudio de las secciones cónicas.

Sin embargo estas competencias no se perciben en los alumnos ingresantes a la Universidad. Parecería ser que no alcanzó con establecer una, creemos, excesiva cantidad de contenidos básicos comunes obligatorios para dotar de significatividad a los saberes escolares. Coincidimos con Pochulu (2005) cuando revela como una de las posibles causas del déficit en la formación geométrica de los estudiantes, el hecho de que la enseñanza de los contenidos de Geometría plana y del espacio queda confinada a la adquisición de definiciones, descripciones de cuerpos y figuras, y a la aplicación de fórmulas en problemas sencillos, circunscriptos al cálculo de perímetros o superficies.

Es nuestra responsabilidad mediar entre los futuros ingenieros y los conocimientos matemáticos, fundamentalmente los del Cálculo, básicos para su formación. Nuestra realidad, en cuanto a planes de estudio y tiempo disponible, nos impide explayarnos en la enseñanza de los que deberían ser contenidos previamente adquiridos o en la desaprensión de aquellos que, mal aprendidos, se constituyen en obstáculos de tipo cognitivo.

Consideramos que propiciar la utilización de diferentes representaciones semióticas y concentrarnos en ayudar a nuestros alumnos a desarrollar habilidades de representación conceptual puede contribuir mucho a mejorar nuestra situación.

Algunas situaciones didácticas

A continuación exhibimos reflexiones emergentes del análisis de algunas situaciones de aula que contemplan la utilización de software matemáticos apropiados para el desarrollo de determinados conceptos.

- Superficie cilíndrica

Tradicionalmente enseñamos la noción de superficie cilíndrica a partir de su definición en un registro verbal o lingüístico y luego en un registro simbólico.

Registro lingüístico: Una superficie cilíndrica es la generada por una recta generatriz que se mantiene paralela a una dirección dada , apoyándose en una curva Γ (directriz) contenida en un plano no paralelo a la recta.

Registro simbólico: $x^2 + y^2 = 4$, por ejemplo.

Es posible que a partir de estas definiciones los alumnos logren con más o menos esfuerzo (y/o ayuda) imaginarse o representar la superficie, pero esto no basta para que la noción quede aprehendida, se necesitará algún tipo de manipulación del objeto (rotación, proyección, corte con planos, superposición, etc.) como para que puedan asimilarse las cualidades de las propiedades geométricas correspondientes.

Sabemos, por nuestra experiencia al incorporar las herramientas CAS (Computer Algebraical System) en el desarrollo de temas de Geometría (Có, del Sastre, Panella, 2009), que su implementación, en el marco de una adecuada planificación, favorece la aprehensión de conceptos por parte del alumno al dinamizar el tratamiento de los objetos matemáticos y agilizar su visualización.

La Figura 2 muestra imágenes devueltas por la computadora al efectuar actividades de rotación y corte sobre una representación gráfica de la superficie de ecuación $x^2 + y^2 = 4$:

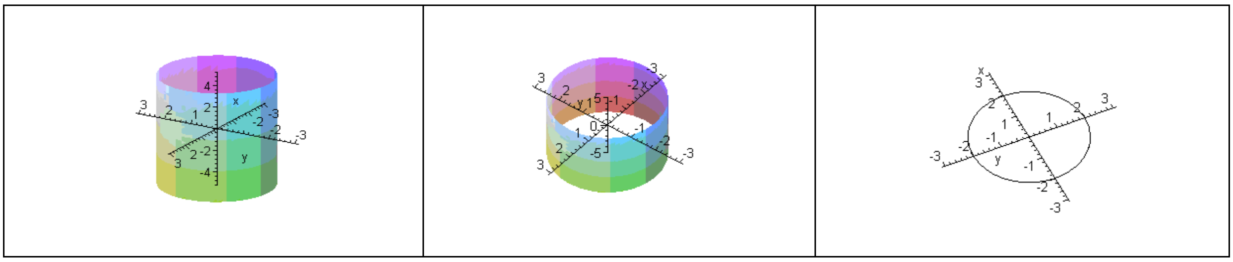


Figura 2. Rotación y corte de la superficie cilíndrica de ecuación $x^2 + y^2 = 4$

- Curvas de nivel

Pretendemos abordar el concepto de *curvas de nivel de una función f de dos variables.*

¿Basta definirlas como las curvas que verifican la ecuación $f(x, y) = k$ (k constante), interpretarlas como el lugar geométrico de todos los puntos en los que f toma el valor k y realizar en la pizarra la representación gráfica de la superficie y de algunas curvas de nivel?

Nuestra experiencia nos muestra que no es suficiente con presentar imágenes a una clase y concentrar la atención en sus detalles para completar la comprensión del concepto. Creemos que necesitamos visualizaciones que resulten más significativas para los alumnos y que permitan las manipulaciones pertinentes.

Evocar un objeto espacial concreto, como por ejemplo una montaña, puede ayudar a aproximar por comparación a la representación gráfica de un paraboloide. De este modo las curvas de nivel de la superficie estarían representadas por las curvas que en la montaña unen los puntos de igual elevación, sendas por las cuales podríamos caminar “constantemente” sin ascender ni descender.

Consideramos apropiado también utilizar un software matemático para generar representaciones gráficas de la superficie (Figura 3) que puedan ser manipuladas (rotadas, proyectadas, cortadas con planos) convenientemente.

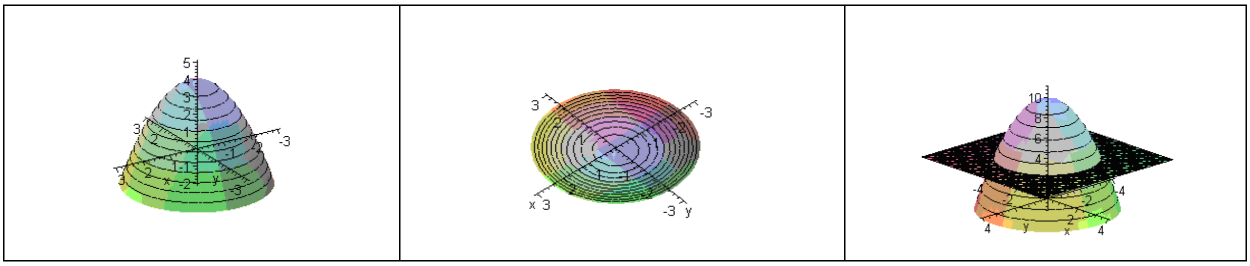


Figura 3. Curvas de nivel del paraboloide circular de ecuación $f(x,y)=4-x^2-y^2$.

- Derivada direccional *de una función f de dos variables*

A pesar de dar la definición de derivada direccional de $z = f(x, y)$ en el punto P, según la dirección del vector unitario $\overline{u}$ y explicar su interpretación geométrica, hemos encontrado que rápidamente (y en esto colabora mucho lo rutinario de la ejercitación realizada) el concepto que nos ocupa queda reducido al número que se obtiene por la mera aplicación de una fórmula.

Creemos imprescindible aquí favorecer las conversiones entre los registros simbólico y gráfico. Con este fin sugerimos realizar la gráfica de la superficie *S* de ecuación $z = f(x, y)$ y mostrar la curva *C* que resulta de su intersección con el plano vertical que pasa por el punto dado y tiene la dirección de $\overline{u}$ para, posteriormente, visualizar la recta T tangente a la curva C y estimar sobre la gráfica su pendiente. Podemos entonces asociar este valor con el de la derivada direccional obtenido por fórmula.

Utilizar un software nos permite optimizar el procedimiento antes descripto y repetirlo cada vez que sea oportuno, ya que en cuestión de minutos podemos obtener representaciones gráficas como las que se muestran a continuación:

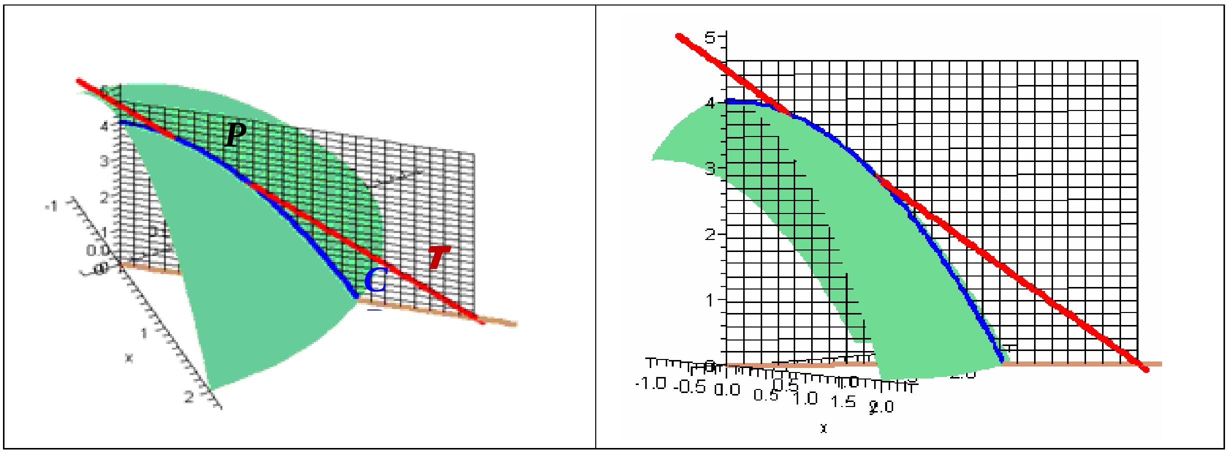


Figura 4. Derivada direccional de la función $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$ en el punto $(3/4,\ 3/4)$, en la dirección del vector $\overline{u} = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$.

- Superficie de revolución

A partir de una buena visualización procuramos escribir la ecuación representativa de una superficie de revolución.

En el caso de una superficie de revolución (por ejemplo: el hiperboloide de una hoja que muestra el cuadro final de la secuencia de la Figura 5) hemos observado cómo los alumnos obtienen, a través del software elegido, una de las mejores representaciones gráficas del objeto matemático en cuestión. Pueden visualizar la curva generatriz y, aplicando las opciones de animación que brinda el programa, distinguir el movimiento continuo de esta curva alrededor de su eje de giro y la generación de la superficie.

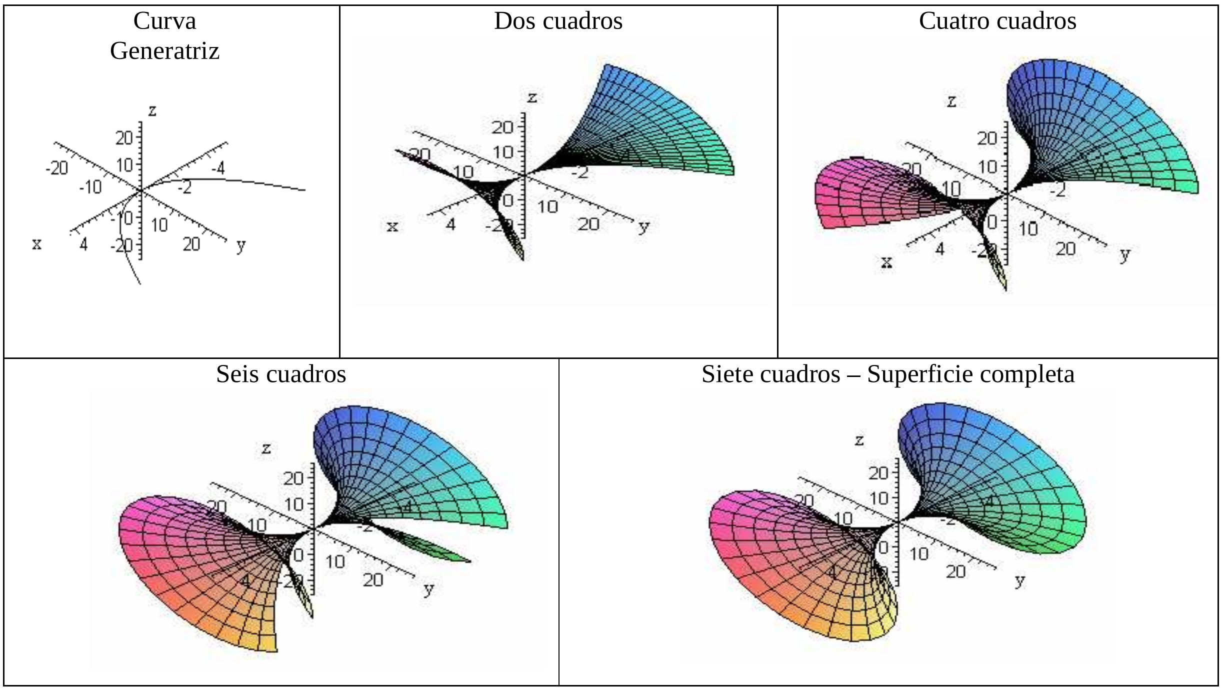


Figura 5. Curva generatriz y secuencias de la animación que genera a un hiperboloide de una hoja.

No obstante, cuando los alumnos intentan pasar del registro gráfico al simbólico (construcción de una ecuación) es cuando surgen serias dificultades. Creemos que esto se produce no porque no logren identificar los elementos constitutivos de la superficie de revolución (generatriz, eje de giro, radio, etc.), sino porque no alcanzan a clarificar la relación existente entre ellos en lo que hace a su variación.

El registro lingüístico cobra así especial importancia al tener en cuenta que sólo reflexionando sobre la definición enunciada en forma coloquial podemos guiar a los estudiantes en su tarea.

Conclusiones

En nuestra tarea referida a la planificación de propuestas para el aula y elección de estrategias didácticas, los docentes debemos decidir cuidadosamente cómo mediaremos entre nuestros alumnos y los diferentes objetos matemáticos, de modo tal de favorecer su aprehensión conceptual. Más aún teniendo en cuenta que estos alumnos provienen de contextos educativos diferentes y cuentan con conocimientos dispares y/o deficientes.

Elegir las representaciones más convenientes, evaluar su complejidad y los obstáculos que pueden presentarse al cambiar de registro (en una instancia previa al tratamiento de la información por parte del alumno) son algunas de las cuestiones que creemos no deben jamás desatenderse.

Se hace necesario enriquecer la metodología de enseñanza, aumentando las estrategias y diversificando al máximo los recursos didácticos con el fin de propiciar la construcción de una mayor cantidad y calidad de representaciones, lo cual, creemos, favorecerá la realización de aprendizajes significativos.

Ya hemos afirmado, en relación a las representaciones gráficas, que no debemos contentarnos con realizar figuras estáticas sino que es importante enriquecer dichas representaciones y poder por ejemplo, dotarlas de dinamismo. En lo que a recursos didácticos se refiere, reafirmamos en este trabajo el lugar de importancia que se le otorga a las herramientas C.A.S. en lo que hace a la formación de *representaciones ejecutables* (Lupiañez y Moreno, 2002), es decir portadoras de la potencialidad de simular acciones cognitivas con independencia del usuario.

Referencias y bibliografía

Có, P., del Sastre, M. & Panella, E. (2009). La compresión de conceptos geométricos. Obstáculos surgidos en el trabajo con diferentes representaciones. *Mathema,* 1, 95-104.

Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., Gómez, P. (Eds.), *Ingeniería didáctica en educación matemática* (pp. 33-59). México: “una empresa docente” & Grupo Editorial Iberoamericana.

Artigue, M. (2003). ¿Qué se puede aprender de la Investigación Educativa en el Nivel Universitario? *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, X (2), 117-134.

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Brousseau, Guy (1998). *Théorie des situacions didactiques.* Grenoble: La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica: Del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires: Aique.

Douady, R. (1996). Ingeniería didáctica y evolución de la relación con el saber en las matemáticas de collège-seconde. En Barbin, E. & Douady, R. (Eds.), *Enseñanza de las matemáticas: Relación entre saberes, programas y prácticas*. Francia. Topiques éditions. Publicación del I.R.E.M.

Dolores Flores, C., Chi Chablé, A., Canul Pech, E., Cantú Interián, C.& Pastor Solache, C. G. (2009). De las descripciones verbales a las representaciones gráficas. El caso de la rapidez de la variación en la enseñanza de la matemática. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática,*18, 41 - 57, ISSN: 1815-0640.

Duval, R. (1993). Semiosis y noesis. En Sánchez y Zubieta (Eds.), *Lecturas en Didáctica de las Matemáticas: Escuela Francesa,* 118-144. México: Departamento de Didáctica Educativa del CINVESTAV-IPN

Duval, R. (1993). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En Hitt, F. (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II*, 173-201. México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano*. Traducción de Myriam Vega Restrepo. Colombia: Peter Lang S.A. Editions scientifiques européens.

Jonannsen, D. (1995). Computers as Cognitive Tools. Learning with Technology. Not from Technology. *Journal of Computing in Higher Education*, 6, 40-73.

Lupiañez, J & Moreno, L. (2002). *Tecnología y representaciones semióticas en el aprendizaje de las matemáticas*. Bogotá: MEN. Serie Memorias.

Pochulu, D. (2005) Continuidades y discontinuidades en la enseñanza de la matemática de tres generaciones. Estudio de caso: sexto año de estudio en una escuela primaria. *Revista Iberoamericana de Educación* , 36/8 . Recuperado de http://www.rieoei.org/deloslectores/1034Pochulu.PDF

Prediseño Curricular de la Educación Secundaria . En Sitio oficial del Gobierno de Santa Fe. Recuperado de http://www.santafe.gov.ar/index.php/educacion/content/download/101419/502711/file/Predise%C3%B1o%20Curricular%20de%20Educaci%C3%B3n%20Secundaria.pdf (2010).

Ministerio de Cultura y Educación (1999). Transformación educativa en Argentina y la Ley Federal de Educación. *Revista Zona Educativa*, 4(32), 26-27.

Sagristá, R. (2008). Superficies y curvas en el espacio. *Apunte de Cátedra: Algebra y Geometría I.* Rosario: Universidad Nacional de Rosario, Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura.

Unión Docentes Argentinos (UDA). (2005). *Críticas a la Ley Federal de Educación y ejes propuestos para una nueva Ley de Educación*. Recuperado de http://www.sindicatouda.com.ar/2005/prensa/estaticosNuevos/LeyFederaldeEducacion.htm

Universidad Nacional de Rosario (2011). Proyecto académico de investigación ING336: *Análisis socioepistemológico de los contenidos del cálculo en carreras de ingeniería. Un puente entre la investigación e la realidad del aula*. Dirección: Dra. Beatriz Introcaso. (Presentado para su acreditación). Rosario, Argentina.