XIII CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
CIAEM 2011
50 anos do Comitê Interamericano de Educação Matemática
26 - 30 Junho, 2011
Recife, Brasil

A produção do conhecimento matemático: um processo coletivo

Sandra Malta **Barbosa**
Universidade Estadual de Londrina (UEL)
Brasil
sbarbosa@uel.br

Resumo

Este artigo apresenta resultados de uma pesquisa que investigou como o coletivo, formado por alunos e Tecnologias da Informação e Comunicação, produz o conhecimento acerca de função composta e regra da cadeia a partir de uma abordagem gráfica. Este resultado está relacionado à produção de duplas de alunos que trabalharam com atividades que exploravam as propriedades de composição de funções e regra da cadeia, utilizando um software gráfico. As atividades propostas, evidenciadas pelo processo de visualização, possibilitaram a geração de conjecturas acerca das propriedades de composição de função e a regra da cadeia a partir de uma abordagem gráfica. Os dados foram coletados por meio de "Experimentos de Ensino". Este resultado mostra como a Matemática produzida por humanos com computadores é qualitativamente diferente da produzida por humanos com papel e lápis e evidencia uma produção do conhecimento matemático como um processo coletivo.

Palavras chave: visualização, experimento de ensino, tecnologias da informação e comunicação, Educação Matemática, função composta, regra da cadeia.

Introdução

Neste artigo os resultados apresentados são relativos à investigação acerca da produção do conhecimento desenvolvida pelo coletivo formado por alunos e Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC) ao explorar atividades relacionadas à composição de funções e regra da cadeia a partir de uma abordagem gráfica. Considera ainda que o conhecimento matemático é processo produzido a partir de um coletivo, formado por alunos e mídias, e destaca a visualização para abordar a função composta e a regra da cadeia.

A metodologia adotada nessa investigação foi a qualitativa (ALVES-MAZZOTTI, 1999; ARAÚJO; BORBA, 2004), pois, trata-se de um estudo em que o objeto está pautado na ação e no comportamento humano, isto é, a partir da perspectiva do indivíduo, sendo esse o intérprete do mundo que o cerca. Os dados são descritivos, em forma de palavras ou imagens, e não de números ou quantificáveis, pois existe uma preocupação maior pelo processo do que pelos resultados ou produtos, e essa característica é, particularmente, útil para a investigação educacional. Ainda, a postura do investigador é indutiva, ou seja, não recolhe "dados ou provas com o objetivo de confirmar ou infirmar hipóteses construídas previamente; ao invés disso, as abstrações são construídas à medida que os dados particulares que foram recolhidos vão se agrupando" (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p.50), isto é, a importância é dada ao significado.

Para além das questões sobre como proceder e o que enfocar, há outra de fundo que é a visão de conhecimento que o investigador concebe. Os procedimentos adotados e a concepção de conhecimento devem estar em consonância, e particularmente, na pesquisa em Educação, "é também necessário que haja uma visão de Educação que esteja coerente com a de conhecimento e a de metodologia" (ARAÚJO; BORBA, 2004, p.42).

Assim, neste artigo, apresentaremos o referencial teórico pertinente à visão de produção do conhecimento matemático como um processo coletivo, os procedimentos metodológicos para a coleta de dados e a conclusão.

Referencial Teórico

Entendendo que a pesquisa qualitativa alia a visão de conhecimento matemático do investigador aos procedimentos adotados na elaboração de atividades e na coleta dos dados, procuramos, no contexto deste artigo, trazer para a produção do conhecimento acerca de função composta e regra da cadeia, no contexto da disciplina Cálculo Diferencial e Integral, uma abordagem gráfica. Entendemos que a produção do conhecimento matemático, que acreditamos ser dinâmico e pautado no processo, pode ser modificada quando as TIC são inseridas no ambiente de ensino e aprendizagem de modo interativo. Assim, a visão de produção do conhecimento, neste artigo, é consistente com a noção de seres-humanos-com-mídias (BORBA; VILLARREAL, 2005), a qual entende que os seres humanos produzem conhecimento junto com determinadas mídias.

Ao se constituir um ambiente com computador, existem várias maneiras de usá-lo na produção do conhecimento. Para Borba e Villarreal (2005), os computadores e humanos não são considerados separadamente, constituindo-se unidades disjuntas. Para os autores, os computadores não são apenas assistentes dos humanos ao se fazer Matemática, pois eles mudam a natureza do que é feito, sugerindo que diferentes coletivos de humanos com mídias produzem diferentes matemáticas. Por exemplo, a Matemática produzida por humanos com papel e lápis é qualitativamente diferente da produzida por humanos com computadores, a partir de simulações e experimentações. Borba e Villarreal (2005), ao proporem que a produção do conhecimento ocorre a partir da noção de coletivo pensante seres-humanos-com-mídia, fundamentam-se nas idéias de reorganização de Tikhomirov (1981) e na visão de coletivo pensante de Lévy (1993).

A teoria de reorganização, proposta por Tikhomirov (1981) baseia-se na idéia de que a ferramenta não é simplesmente adicionada à atividade humana, mas transforma-a. O autor defende que os processos mentais, no ser humano, mudam quando os processos da atividade prática mudam. "Como resultado do uso do computador, a transformação da atividade humana ocorre e novas formas de atividade emergem" (TIKHOMIROV, 1981, p.271). O autor argumenta que o computador proporciona novas possibilidades à atividade humana, como *feedbacks* e resultados intermediários que não podem ser observados externamente e, assim, o processo de produção do conhecimento é modificado. A estrutura da atividade intelectual humana é alterada pelo uso do computador, reorganizando os processos de criação, de busca e de armazenamento de informações.

Para Lévy (1993), o conhecimento é produzido pela simulação e pela experimentação. A manipulação dos parâmetros e a simulação de todas as circunstâncias possíveis dão ao usuário de um programa uma espécie de intuição, e de imaginação, sobre as relações de causa e efeito presentes em um determinado modelo. O autor enfatiza que na medida em que a informatização avança, melhorando suas interfaces, novas habilidades aparecem e a cognição se transforma. Para o autor nenhum tipo de conhecimento é independente do uso das tecnologias intelectuais (oralidade, escrita e informática) e só é possível pensar dentro de um coletivo, pois o pensamento já é a realização desse coletivo.

Segundo Steinbring (2005), a produção do conhecimento matemático ocorre, fundamentalmente, no contexto da construção social e no processo de interpretação individual. O conhecimento matemático não é previamente dado, mas construído por meios de atividades sociais e interpretações individuais. A prática do ensino e da aprendizagem matemática é caracterizada pela variedade de construções e de interpretações matemáticas. A natureza do conhecimento matemático é sempre olhada no contexto cultural, onde são desenvolvidos os sinais e os símbolos, tanto quanto sua interpretação, isto é, os sinais matemáticos adquirem seu próprio significado apenas por meio de uma relação com o contexto. Para o autor, a Matemática científica e a escolar são semelhantes com relação aos seus contextos sociais e seus *status* epistemológicos fundamentais, mas elas diferem consideravelmente com respeito ao grau de formalização e suas propostas de aprendizagem na Educação Matemática.

Segundo o autor, a Matemática é usualmente considerada como uma ciência por excelência, com resultados universais e definitivos expressos como verdades incontestáveis. A unidade da Matemática científica é o resultado do processo de comunicação interativa e histórico-social entre matemáticos, a qual é, de algum modo, orientada na direção de um produto coerente, a matemática uniforme. A esse respeito, distingui-se entre o processo de desenvolvimento e o produto (matemática uniforme). No entanto, outros desenvolvimentos e campos de aplicação da Matemática podem focar diferentes características, como o processo de desenvolvimento do produto matemático. O deslocamento do produto matemático para o processo matemático é um tema importante na aprendizagem e na apropriação ativa do conhecimento matemático, especialmente no contexto de mediação do conhecimento na sala de aula.

Para Steinbring (2005), os processos de desenvolvimento da matemática não são nem uniformes, nem universais e nem homogêneos. As características subjetivas da manutenção do processo, tanto quanto as representações, as notações e as interpretações do conhecimento matemático, são múltiplas, divergentes e parcialmente heterogêneas. No processo do desenvolvimento do conhecimento matemático, o contexto cultural, as influências subjetivas e as dependências são efetivas e inevitáveis, e são as razões para uma diversidade observável e uma não uniformidade do conhecimento emergente. Para o autor, aprender matemática requer olhar a matemática como um processo ativo de construção, o qual, através da interpretação interativa dos conceitos e notações matemáticas, se desenvolve um novo conhecimento. A aprendizagem do estudante não pode ser comparada com a do profissional matemático.

Steinbring (2005) argumenta ainda que a unidade do conhecimento matemático científico, não pode ser transferida para a matemática escolar. Pois, dessa forma, a matemática escolar perderia seu fundo cultural e a matemática se tornaria meros sinais formalísticos e fórmulas. O autor entende que sinais matemáticos, símbolos, princípios e estruturas apenas podem ser significativamente interpretados em uma cultura emergente, que questiona a unidade da matemática no processo de ensino e aprendizagem. “Se o conhecimento matemático (sinais, símbolos, princípios, estruturas, etc.) puder apenas ser interpretado significativamente a partir de um ambiente cultural específico, então não existe apenas uma simples, mas muitas diferentes formas de matemática” (STEINBRING, 2005, p.16).

Pensamos que essas muitas diferentes formas de matemática, à qual Steinbring (2005) se refere, com a interpretação interativa dos conceitos e das notações matemáticas, que são caracterizadas pelas representações múltiplas, no caso específico de funções, podem ser potencializadas por um ambiente escolar em que os alunos e professores utilizam as TIC. Dessa forma, o processo de produção do conhecimento, especificamente do conhecimento matemático, modifica-se qualitativamente. A Matemática produzida pelos alunos, quando utilizam papel e lápis, é diferente daquela produzida com a utilização das TIC, no qual a visualização tem seu destaque.

A abordagem visual de um conceito matemático pode ser considerada, atualmente, como um dos elementos que caracterizam novos modos ou estilos de produção do conhecimento. Para Guzmán (2002), o uso da visualização é benéfico do ponto de vista da apresentação para outros e a manipulação ao resolver problemas. “Visualização surge deste modo, não só como algo absolutamente natural no nascimento do pensamento matemático, mas também na descoberta de novas relações entre objetos matemáticos e, também, no processo de transmissão e comunicação que é próprio à atividade matemática” (GUZMÁN, 2002, p.2-3). A visualização surge com um peso de interpretação, codificação e decodificação, o qual intervém um mundo inteiro de intercâmbios pessoais e sociais. Para Borba e Villarreal (2005), o componente visual parece ser o principal foco desde que os computadores passaram a ter monitor de vídeo. A visualização, realçada pelas TIC, pode alcançar uma nova dimensão, onde a animação, proporcionada pelos recursos computacionais, constitui um elemento primordial, quando as imagens são vistas de forma dinâmica e interpretadas pelos alunos em outras formas de produzir o conhecimento. A abordagem gráfica, na produção do conhecimento acerca de função composta e regra da cadeia, potencializada pelas TIC, constituiu uma alternativa à abordagem estritamente algébrica.

Metodologia

Os procedimentos adotados na elaboração das atividades e na coleta dos dados estão em sintonia com a noção de um coletivo seres-humanos-com-mídias que produz conhecimento. Como procedimento de coleta dos dados foi utilizado experimentos de ensino (STEFFE; THOMPSON, 2000) com alunos ingressantes no Curso de Matemática, UNESP de Rio Claro (SP), e que estavam cursando a disciplina Cálculo I.

O Experimento de Ensino é um procedimento metodológico de coleta dos dados, que consiste em uma série de encontros entre os estudantes e o pesquisador por um determinado período de tempo. Nesses encontros, o pesquisador promove uma investigação sobre o modo como os estudantes produzem seus conhecimentos no processo de exploração de atividades pré-elaboradas. A Metodologia de Experimento de Ensino é uma ferramenta conceitual para ser utilizada na organização de atividades e, derivada da entrevista clínica de Piaget, é voltada para a exploração da matemática dos estudantes, ou seja, a matemática que os estudantes entendem como tal. No entanto, o Experimento de Ensino é mais do que uma entrevista clínica e se diferencia dessa vertente pelo fato de ser direcionado para o progresso dos estudantes e não para o conhecimento corrente dos estudantes, como se dá na entrevista clínica. Seu foco principal é a análise do raciocínio desses estudantes.

Steffe e Thompson (2000) denominam de episódios os encontros que acontecem durante um experimento de ensino. Cada episódio supõe que exista, além da presença do agente de ensino, nesse caso o pesquisador, um método de registro dos dados. Nesta investigação foi utilizado o *software* Camtasia Studio, que grava todos os movimentos feitos na tela do computador, sons e imagens captadas por uma *webcam* e uma filmadora fixa. Assim, houve a possibilidade de registrar todo o processo de cada dupla, capturando as ações realizadas no computador, as imagens e os diálogos entre os alunos e o pesquisador.

Os experimentos propiciam situações em que estudantes e pesquisador podem interagir. Isso faz com que o pesquisador deixe de ser apenas um observador para se envolver e participar de forma efetiva do processo e não apenas tentar explicar a matemática dos alunos por meio de sistemas matemáticos conhecidos. Interpretar o que os alunos dizem e fazem, por meio de um diálogo desencadeado a partir das atividades e questões elaboradas pelo pesquisador, em uma tentativa de entender como eles elaboram seus conceitos matemáticos, é parte essencial no experimento de ensino (STEFFE; THOMPSON, 2000).

Interpretar o que os alunos dizem e fazem, por meio de um diálogo desencadeado a partir das atividades e das questões elaboradas pelo pesquisador, em uma tentativa de entender como eles elaboram seus conceitos matemáticos, é parte essencial em pesquisas desenvolvidas por meio de experimentos de ensino. Sendo assim, algumas das atividades foram propostas com o intuito de analisar como o coletivo, formado pelos alunos e o *software* Winplot, explora a composição de funções e regra da cadeia. Ainda, o desenvolvimento das atividades propostas possibilitou a comparação do gráfico da derivada da função composta, $(f(g(x)))'$, gerado pelo comando de derivar do *software* Winplot, com o gráfico da derivada da função *f* em relação à função *g*, $f'(g(x))$. Desta forma, foi possível indicar que a derivada da função composta, $f(g(x))$, não era apenas a derivada da função *f* em relação à função *g*, $f'(g(x))$, que é um erro muito comum evidenciado na literatura.

Os experimentos de ensino foram realizados com cinco duplas que desenvolveram oito atividades resultando em cinco episódios. Para este artigo será apresentado apenas a atividade a qual gerou o episódio da enunciação da regra da cadeia. A atividade proposta consistiu em fazer com que os alunos percebessem e enunciassem a fórmula da regra da cadeia, $f'(g(x)).g'(x)$, já que eles não haviam tido contato com essa fórmula anteriormente, embora tenham começado a estudar uma introdução à derivada, sabendo calcular apenas a derivada de funções polinomiais, ou regra da potência. Para isso, foi pedido que os alunos inserissem, utilizando o comando do *software* Winplot, as funções, $f(x)=x^2$ e $g(x)=3x$, e suas respectivas derivadas, $f'(x)$ e $g'(x)$. Utilizando uma abordagem gráfica, a proposta dessa atividade era comparar o gráfico da derivada da função composta, $(f(g(x)))'$, gerado pelo comando de derivar do *software* Winplot, com o gráfico da derivada da função *f* em relação à função *g*, $f'(g(x))$. Com isso, poderíamos indicar que a derivada da função composta, $f(g(x))$, não era apenas a derivada da função *f* em relação à função *g*, $f'(g(x))$.

Depois de evidenciado, graficamente, que a derivada da função composta não era apenas a derivada da função *f* em relação à função *g*, era pedido que o aluno completasse uma tabela, onde a função $f(x)=x^2$ era fixada e o coeficiente da função *g* era variado com números inteiros. Tal tabela tinha por objetivo levar o aluno a perceber uma generalização da regra da cadeia, de forma indutiva, evidenciando o papel da derivada da função *g*, e não apenas a derivada da função *f* em relação à função *g*. As duplas já estavam familiarizadas com os comandos do *software* Winplot e com as funções que apareciam nessa atividade, mas não sabiam que se tratava da regra da cadeia.

Esse episódio foi elaborado com o objetivo de mostrar como a comparação dos gráficos das funções $(f(g(x)))'$ e $f'(g(x))$ desconstrói a idéia de que essas funções poderiam ser iguais, isto é, o gráfico da derivada da função composta permite ao aluno uma desconstrução da idéia de que a derivada de uma função composta é apenas a derivada da função *f* em relação à função *g*, $f'(g(x))$. Para construir esse episódio, foram escolhidos alguns diálogos presentes nas discussões das duplas, Victor e Francielle, Andrews e Daiane, Lucas e Pedro, por caracterizarem uma enunciação da regra da cadeia, a partir de uma abordagem gráfica proporcionada pelo comando do *software* Winplot.

A dupla, formada por Victor e Francielle, inseriu as funções $f(x)=x^2$, $g(x)=3x$ e suas respectivas derivadas, $f'(x)=2x$ e $g'(x)=3$ e, a partir do comando de combinações para a composição, obteve o gráfico da função $f(g(x))$. Posteriormente, com o comando derivar, a dupla plotou o gráfico da função $(f(g(x)))'$ e, em seguida, o gráfico da função $f'(g(x))$, em um mesmo plano cartesiano; porém, como o plano cartesiano obtido ficou muito confuso, devido à variedade de gráficos, os alunos deixaram à mostra somente os gráficos das funções $(f(g(x)))'$ e $f'(g(x))$, escondendo os demais, conforme Figura 1.

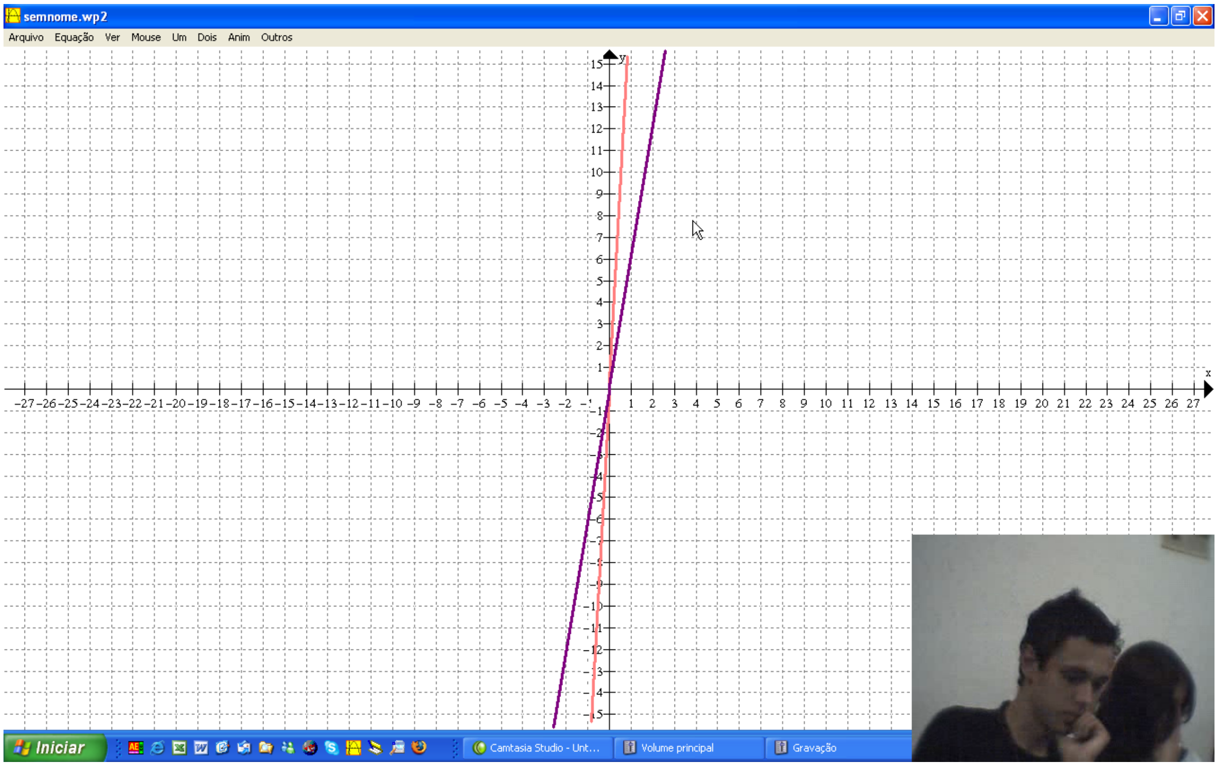

Figura 1. Gráficos das funções $\left(f\left(g(x)\right)\right)'$ (rosa) e $f'\left(g(x)\right)$ (roxo).

Ao serem questionados sobre a relação entre os gráficos das funções $\left(f\left(g(x)\right)\right)'$ e $f'\left(g(x)\right)$, Victor respondeu que uma era um terço da outra.

Victor: *Podemos chegar à conclusão* [de] *que ela* [função $f'\left(g(x)\right)$] *é um terço da outra* [função $\left(f\left(g(x)\right)\right)'$].

Pesquisador: *Que relação existe entre as duas?*

Victor: *O* 3... *O* 3 *multiplicando*.

Pesquisador: *De onde surgiu esse* 3*?*

Depois de algum tempo, Victor observou a tabela que eles haviam completado no item 3, conforme Figura 2, e perguntou se esse 3 seria o da derivada da função $g(x)=3x$.

3) Liste na tabela abaixo, algebricamente, as seguintes funções:

$f(x) = x^2$	$g(x) = 3x$
$f'(x) = 2x$	$g'(x) = 3$

Figura 2. Tabela de funções obtidas.

Victor: *Seria o* 3 *da derivada de* g *?*

Victor percebeu, pela observação dos gráficos, que as funções, dadas pelas notações $\left(f\left(g(x)\right)\right)'$ e $f'\left(g(x)\right)$, apesar de serem distintas, tinham uma relação entre elas. Essa relação apenas foi notada quando ele observou a tabela que continha a derivada da função *g*. Dessa forma, ele enuncia a regra da cadeia a partir da observação dos gráficos, buscando uma relação entre eles e a derivada da função *g*.

A dupla, formada por Andrews e Daiane, obteve os gráficos pedidos da atividade e, ao ser questionado sobre as diferenças entre os gráficos da função $f'\left(g(x)\right)$ e o gráfico da derivada da função $f\left(g(x)\right)$, Andrews comentou algo sobre os coeficientes de inclinação.

Andrews: *As retas... coeficientes de inclinação dela ... o m que é a derivada ... tá diferente... A derivada da composta tá menos... tá mais inclinada... tá mais inclinada do que... a composta da derivada de f com g* [conforme pode ser observado na Figura 3].

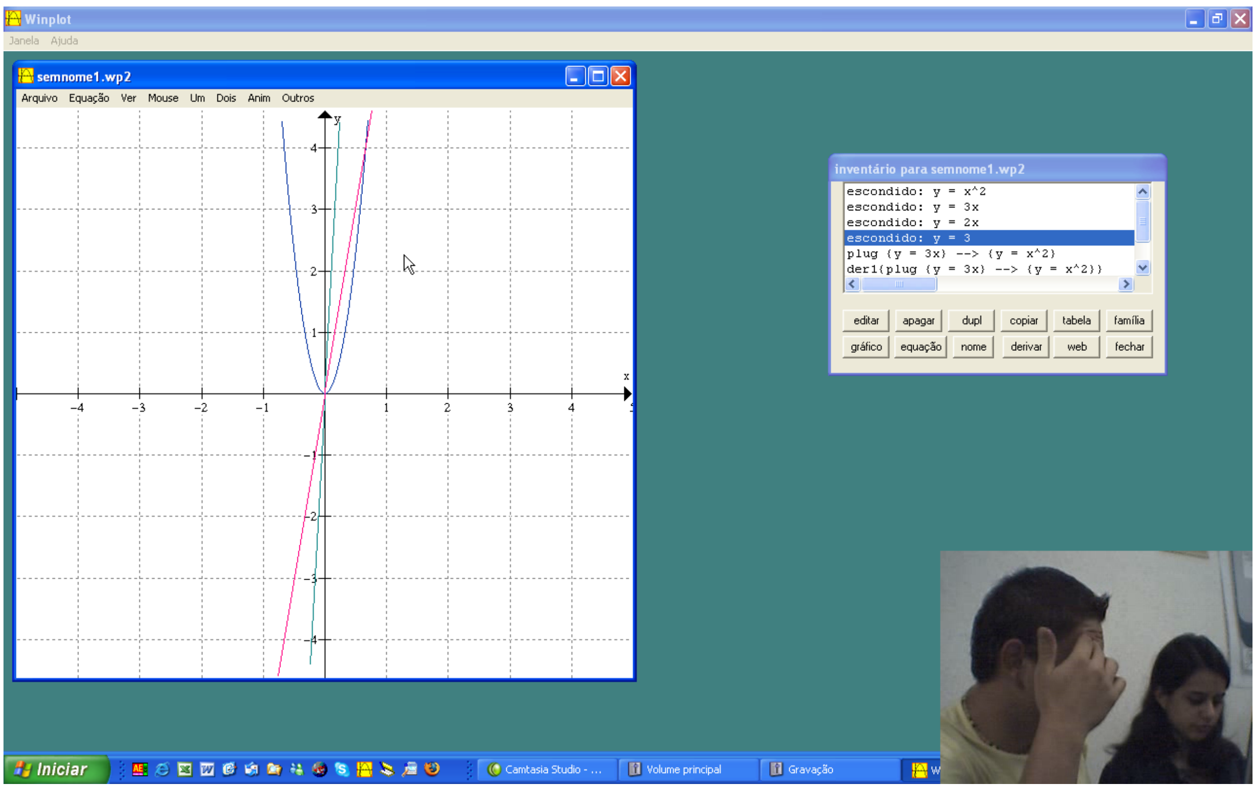

Figura 3. Gráficos das funções $f'\left(g(x)\right)$ e $\left(f\left(g(x)\right)\right)'$.

Andrews completou sua observação, dizendo que era por causa da inclinação que eles eram distintos. Perguntei se $f'\left(g(x)\right)$ não era a derivada de função composta, e eles disseram que não, porque os gráficos eram diferentes. No entanto, Andrews questionou sobre a derivada da função *g*.

Andrews: *A $g(x)$ também não tinha que ter derivada?*

Pesquisador: *Como assim?*

Andrews: *Aqui dentro teria que também colocar a derivada de* $g(x)$*...* 3*.... f da derivada de* 3*.*

Pesquisador: *f da derivada de* 3*?*

Andrews: *O g da derivada de x é* 3 [ele quis dizer $g'(x)=3$]*... Aí esse* 3 *eu ia colocar aqui* [apontando para a função $f'(x)$]*. Então f da derivada de* 3 *é* 6*.*

Pelo discurso de Andrews, a derivada da função composta $f(g(x))$ seria $f'(g'(x))=f'(3)=6$. Essa afirmação evidencia outra maneira de como os alunos enxergam a derivada de uma função composta. Entretanto, como eles já haviam obtido o gráfico da derivada da função composta, essa hipótese foi refutada.

Daiane: *Mas aí não vai ser...*

Andrews: *Vai ser uma reta constante.*

Daiane: *Então não é isso também...*

Daiane: *Você tem que fazer a composta das duas depois derivar.*

Pesquisador: *Como é que é?*

Daiane: *Você faz a composta de f com g. O resultado daí você faz a derivada... Eu faria a composta de f com g que seria* $9x^2$.

Daiane: *Aqui vai dar* $9x^2$ *e esse resultado a gente faz a derivada*.

Embora a observação do gráfico da derivada da função composta levasse Andrews a repensar o que ele havia dito em relação à derivada da função *g*, sua parceira Daiane reformulou a questão em termos algébricos, pois as funções pedidas eram polinomiais e geravam uma função composta que Daiane sabia calcular a derivada. A dupla completou a tabela do item 5), conforme a Figura 4.

5) Mantendo a função $f(x)=x^2$ complete a tabela abaixo:

	$g(x)=3x$	$g(x)=4x$	$g(x)=5x$
$f(g(x))$	$9x^2$	$16x^2$	$25x^2$
$g'(x)$	3	4	5
$f'(g(x))$	$6x$	$8x$	$10x$
$(f(g(x)))'$	$18x$	$32x$	$50x$

Figura 4. Tabela do item 5.

A intenção dessa tabela era levar os alunos a perceberem, indutivamente, a fórmula da regra da cadeia, mas isso não aconteceu de imediato, sendo necessária a minha intervenção.

Pesquisador: *O que você pode observar dessa tabela aqui, para você chegar a esse resultado aqui* [derivada da função composta]*? Ao invés de você fazer isso aqui* [compor] *e derivar isso aqui?*

Andrews: *Esse* [apontou para a terceira linha da tabela] *vezes esse* [apontou para a quarta linha]... *É a multiplicação desses dois*.

Pesquisador: *É a multiplicação desses dois?*

Andrews: *Eu acho que é... Eu faço a multiplicação da derivada da f composta com a g de x* [$f'(g(x))$] *com a derivada de g de x* [$g'(x)$].

Pesquisador: *Isso.*

Andrews: *Vou falar de novo: Eu faço a derivada da f composta com g, vezes a derivada da g de x... Ficou até bonito!*

Pesquisador: *Você acabou de enunciar a regra da cadeia. Isso é chamado regra da cadeia.*

Lembrando que, a princípio, eles não haviam tido contato com a regra da cadeia anteriormente. Porém, Andrews começara um curso de Matemática em outra faculdade, antes de ser transferido para a UNESP.

Andrews: *Ahhh... Você tá de sacanagem comigo. Nunca entendi isso no outro curso. Nunca entendi a regra da cadeia.*

Pesquisador: *Você já viu regra da cadeia?*

Andrews: *Já.*

Pesquisador: *Você acabou de falar ela*.

Andrews: *Nossa, fiquei até emocionado... Agora ganhei o dia! A derivada da f composta com a g vezes a derivada de g.*

Embora Andrews tenha dito que já havia visto regra da cadeia em outro curso, ficou evidente que ele não a havia entendido, nem mesmo sequer seu enunciado. Ao observar os gráficos e uma tabela de forma indutiva, ele foi capaz de enunciar a regra da cadeia evidenciando as diferenças entre as notações que estão relacionadas às funções derivadas.

Outra dupla, formada por Lucas e Pedro, recusava-se a utilizar o *software* Winplot para fazer os cálculos das funções derivadas, utilizando apenas a folha de papel. Porém, ao ser questionado sobre a expressão algébrica da função $f'(g(x))$, Lucas calculou-a, $f'(3x) = 2.3x = 6x$, e Pedro comentou que essa expressão era a derivada da função composta.

Pedro: *Seria a derivada da composta.*

Perguntei qual seria a relação entre essas duas funções $(f(g(x)))'$ e $f'(g(x))$ já que pareciam que a princípio seriam derivadas de função composta. Lucas explicou que a primeira ele compunha e depois derivava e que a segunda ele primeiro derivava, e depois compunha com *g*, que ficava no lugar de *x* e depois completou que seria multiplicar por 3.

Lucas: *Multiplica por* 3.

Perguntei se esse 3 tinha alguma relação com algumas das funções que eles haviam obtido anteriormente. Lucas, observando a tabela, disse que tinha a ver com a derivada da função *g*.

Lucas: *Aqui tem uma... Cresce por exemplo...* 3, 4 *e* 5*... Multiplicação... É o que a gente tava discutindo... A* $g(x)$ *muda... Veja!... A derivada da* $g(x)$ *causa interferência aqui... entre a derivada da composta... e a composta da derivada não é?*

Como não havia ficado claro o que ele dissera, pedi para repetir e esclarecer como essa interferência acontecia.

Lucas: *Isso. Interfere... é... deixa eu pensar... pelo que dá pra perceber... se eu fizer... a... a derivada de f composta com g... é... vezes a derivada de* $g(x)$ *dá a minha derivada da composta... do fog.*

Podemos notar pelas 3 duplas apresentadas neste episódio que, somente foi possível enunciar a regra da cadeia a partir da visualização, evidenciando a diferença entre os gráficos das funções $(f(g(x)))'$ e $f'(g(x))$ e pela observação de uma tabela, onde era explicitada a interferência da derivada da função *g* no cálculo da derivada da função composta $f(g(x))$.

Conclusão

Este episódio mostra que o recurso de animação do Winplot teve um papel fundamental na elaboração e na enunciação da regra da cadeia, que ficou evidente quando Andrews enunciou a derivada da função composta sem saber que se tratava da fórmula da regra da cadeia. Embora ele tivesse tido contato com essa regra em outra faculdade, ou seja, tinha a informação que existia uma regra com esse nome, porém ele não a havia compreendido, nem mesmo sequer seu enunciado, pois ao enunciá-la, ele se surpreendeu quando eu disse que era essa a regra da cadeia.

Pelo que se pode perceber da fala de Andrews, embora ele tivesse visto regra da cadeia, para ele, até aquele momento não havia uma relação da fórmula com o objeto que é a derivada da função composta, pois não existe uma correspondência fácil entre os objetos e os símbolos. Podemos supor que a dominância dessa suposta correspondência é a razão para a falha de métodos de ensinos tradicionais, pois o professor usa a linguagem como um objeto representado e seus significados para ensinar, mas como não existe uma transmissão simples de significados por meio da linguagem, todos os estudantes também aprendem a falar pela rotina que deles são esperados a dizer em certas situações definidas.

A dinamicidade dos gráficos possibilitou aos alunos desconstruir a ideia de que as funções $(f(g(x)))'$ e $f'(g(x))$ poderiam ser iguais, isto é, o gráfico da derivada da função composta permite ao aluno uma desconstrução da idéia de que a derivada de uma função composta é apenas a derivada da função *f* em relação à função *g*, $f'(g(x))$.

Podemos notar que a observação e a análise dessa descontrução foram feitas junto com o computador, sugerindo que conhecimento, acerca de composição de funções e regra da cadeia, foi produzido por um coletivo seres-humanos-com-mídias assim como sustentam Borba e Villarreal (2005). Concordando com esses autores, entendo que não é o ser humano sozinho que pensa, mas o coletivo, formado por humanos e mídias, é que pensa. E nesse sentido todo o ambiente físico, as pessoas, as TIC e o conteúdo interagem na produção do conhecimento. Nesse processo, muitas vezes, existe uma mudança, qualitativamente diferente para cada mídia e, dependendo do *feedback*, novamente repenso tudo, em um movimento. Entendo essa mudança como proposto por Tikhomirov (1981), uma reorganização, que transforma toda a atividade humana.

Além disso, podemos perceber que os estudantes, embora não soubessem a regra da cadeia foram confrontados em um processo ativo de construção, no qual, através da interpretação interativa dos conceitos e notações matemáticos, desenvolveram um novo conhecimento, sugerindo uma produção do conhecimento matemático visto como um processo coletivo, assim como defende Steinbring (2005).

Referências Bibliográficas

ALVES-MAZZOTTI, A. J. O método nas ciências sociais. In: ALVES-MAZZOTTI, A. J.; GEWANDSZNAJDER, F. *O método nas ciências naturais e sociais:* pesquisa quantitativa e qualitativa. 2.ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 1999. Parte II, p. 107-188.

ARAÚJO, J. L.; BORBA, M. C. Construindo pesquisas coletivamente em educação matemática. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Org.) *Pesquisa qualitativa em educação matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2004. Cap.1, p.25-45. 120 p. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. *Investigação qualitativa em educação*: uma introdução à teoria e aos métodos. Tradução de M. J. Alvarez; S. B. Santos; T. M. Baptista. Porto: Porto Editora, 1994. 336 p. (Coleção Ciências da Educação, 12).

BORBA, M. C.; VILLARREAL, M. E. *Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking:* information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization. New York: Springer, 2005. 232 p. (Mathematics Education Library, 39).

GUZMÁN, M. The role of visualization in the teaching and learning of mathematical analysis. In: International Conference on the Teaching of Mathematics at the Undergraduate Level, 2., 2002, Hersonissos. *Proceedings of 2nd International Conference on the Teaching of Mathematics at the Undergraduate Level*. Hersonissos: University of Crete, 2002. p.1-24. Disponível em: <http://www.math.uoc.gr/~ictm2/> Acesso em: 9 mai. 2007.

LÉVY, P. *As tecnologias da inteligência:* o futuro do pensamento na era da informática. Tradução de C. I. Costa. Rio de Janeiro: Ed. 34, 1993. 208 p. (Coleção Trans).

STEFFE, L. P.; THOMPSON, P. W. Teaching experiment methodology: underlying principles and essential elements. In: LESH, R.; KELLY, A. E. *Research Design in Mathematics and Science Education*. Hillsdale: Erlbaum, 2000. p.267-307.

STEINBRING, H. *The construction of new mathematical knowledge in classroom interaction*: an epistemological perspective. Dordrecht: Springer, 2005. 236 p. (Mathematics Education Library, 38).

TIKHOMIROV, O. K. The psychological consequences of computerization. In: WERTSCH, J. V. (Ed.) *The concept of activity in sovietc psychology*. New York: M. E. Sharpe, 1981. p.256-278.