XIII CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
2011 CIAEM
26 - 30 Junho, 2011
Recife, Brasil
50 anos do Comitê Interamericano de Educação Matemática

Ensino de Conjuntos Numéricos em disciplinas de Fundamentos de Análise Real: Dos livros didáticos para a sala de aula em cursos de Licenciatura em Matemática

Alexandre Botelho **Brito**
Instituto Federal do Norte de Minas Gerais - Campus Salinas
Brasil
alexandre.brito@ifnmg.edu.br
Frederico da Silva **Reis**
Universidade Federal de Ouro Preto
Brasil
fredsilvareis@yahoo.com.br

Resumo

O presente trabalho é fruto de nossa dissertação defendida no Mestrado Profissional em Educação Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto e investiga como os Conjuntos Numéricos são apresentados / abordados em livros didáticos de Análise Real utilizados em cursos de Licenciatura em Matemática e de que forma eles podem ser problematizados / explorados na perspectiva de um ensino que aborde dialeticamente seus aspectos intuitivos e rigorosos. A pesquisa teórico-bibliográfica tece algumas considerações sobre o ensino de Análise Real, a partir da discussão de questões como definição e imagem conceitual, prova formal, rigor e intuição. A pesquisa de campo foi feita a partir da elaboração de uma proposta didática para ser utilizada em disciplinas de Fundamentos de Análise Real, implementada num curso de Licenciatura em Matemática. As considerações destacam a importância do professor como mediador no processo de ensino e aprendizagem e a relevância de se considerar níveis de rigor no ensino de Análise Real.

Palavras chave: Ensino de Análise Real. Educação Matemática. Ensino Superior.

Algumas considerações sobre o ensino de Análise Real

O ensino de Análise Real nas universidades tem se destacado por altos índices de reprovação. Nossa experiência docente com Análise realmente aponta para uma "tensão" em seu ensino, que frequentemente é relacionada, pelos alunos, aos momentos avaliativos, dentre outros. Mas porque ensinar Análise?

Na pesquisa realizada por Moreira, Cury e Vianna (2005), a segunda categoria levantada como resposta a essa questão (dentre três) relaciona a disciplina de Análise Real com a Matemática a ser ensinada nos Ensinos Fundamental e Médio, mas afirmam que a articulação entre esses conhecimentos é uma tarefa "excessivamente complexa", mesmo para um professor licenciado.

Entretanto, é fundamental que tal articulação já comece a ser discutida no processo de formação inicial do professor, em seu curso de licenciatura. Logo, a disciplina de Análise Real ganha fôlego na medida em que, a partir do estudo de conceitos básicos trabalhados na Educação Básica, abre-se espaço para a reflexão sobre questões relacionadas "ao papel, ao dimensionamento adequado e à contribuição efetiva que um enfoque 'avançado' pode oferecer ao processo de articulação da formação do professor com a prática na escola" (MOREIRA, CURY E VIANNA, 2005, p. 40).

Nesta perspectiva, podemos discutir a importância da disciplina de Análise Real para um curso de Licenciatura em Matemática sob duas óticas: focando-nos na sua permanência ou não na matriz curricular, ou discutindo a abordagem que deve ser dada à disciplina pelos seus professores, o que perpassaria pela discussão do seu papel na formação / fortalecimento do elo "Educação Básica – Análise Real".

Moreira, Cury e Vianna (2005) discutem a permanência ou não da Análise Real nos cursos de licenciatura, argumentando que a decisão recai sobre a abordagem que se dá ou que se deva conferir à disciplina. Então, este é o foco pelo qual optaremos, uma vez que ao discutirmos tal abordagem, tentaremos discutir a prática docente do professor de Análise Real.

No campo legal, o parecer CNE/CES 1.302/2001 publicado no dia 05 de dezembro de 2001, remete os conteúdos de "Fundamentos de Análise" como obrigatórios nos cursos de Licenciatura em Matemática, coadunando com as idéias de Reis (2001) que defende a importância da Análise Real na formação inicial do Professor de Matemática que, mesmo ao atuar nos Ensinos Fundamental e Médio, necessita de consolidação e aprofundamento de seus conhecimentos específicos do conteúdo matemático.

Realmente, concebemos a Análise como uma ponte entre a formalização dos conceitos e conteúdos que serão ensinados pelo Professor de Matemática em sua futura prática docente. Entretanto, acreditamos que, para que isto aconteça, a relação do conteúdo estudado em Análise com a Matemática da sala de aula dos Ensinos Fundamental e Médio, deve ser um elo fortemente trabalhado no curso de Análise Real. Entretanto, de nossa experiência discente e docente, parece-nos coerente afirmar que o ensino de Análise Real está sistematizado e organizado privilegiando a prática do matemático (aqui, entendemos por matemático, o pesquisador em Matemática Pura e/ou Aplicada, formado em cursos de bacharelado), mesmo nas disciplinas ministradas no curso de licenciatura.

Outro viés interessante dessa discussão é a tensão entre a "coerência" da Matemática elementar e a "conseqüência" da Matemática formal (PINTO, 2009). O descompasso entre a Matemática elementar, trabalhada nos Ensinos Fundamental e Médio e a Matemática formal, trabalhada nos cursos de licenciatura, é evidente na literatura atual.

Podemos, ainda, remeter essa discussão a um desencontro, como denominado por Tall (1992) entre a formulação formal (rigor!) de um conceito por parte do professor de Análise Real e sua interpretação de significados (intuição!), por parte dos alunos de Análise Real, os quais, futuramente, serão os professores de Matemática da Educação Básica.

Nesse momento, julgamos ser necessário um aprofundamento dos termos intuição e rigor, o que faremos a seguir.

A tensão entre Rigor e Intuição

À luz da questão que envolve a transição para o Pensamento Matemático Avançado (TALL, 1991), vale ressaltar que, na prática pedagógica de Análise Real, ela pode ser identificada com a transição entre uma noção intuitiva dos conceitos e uma demonstração rigorosa dos resultados, o que nos remete à tensão entre rigor e intuição, discutida por Reis (2001, 2009).

Em sua experiência docente, Reis (2001) sempre se questionou sobre as causas das dificuldades apresentadas pelos alunos no curso de Análise, além das altas taxas de reprovação historicamente inerentes a ela, mesmo sendo os tópicos de Análise anteriormente trabalhados na disciplina de Cálculo.

Uma característica atribuída a essas disciplinas, é que no Cálculo o conteúdo é visto de forma mais intuitiva e muitas vezes explorando os aspectos gráficos e geométricos; já em Análise Real, prima-se pelas definições formais de conceitos e pela demonstração rigorosa das propriedades sob a forma de teoremas.

Devemos discutir essa transição Cálculo-Análise, muitas vezes reduzida à transição intuição-rigor, buscando responder, ou pelo menos refletir sobre as questões que envolvem o processo de aprendizagem em Análise Real. Esse debate pode contribuir para que o Professor de Matemática do Ensino Superior reflita sobre que metodologias de ensino se apresentam para o ensino de Matemática e, mais especificamente, para as disciplinas de Fundamentos de Análise Real.

Voltando às relações entre o rigor e a intuição, seriam estas entidades totalmente dicotômicas? Para Tall (1991, p. 20):

> O movimento do pensamento matemático elementar para o avançado envolve uma transição significante: de descrever para definir, de convencer para provar de uma maneira lógica baseada nas definições. Esta transição requer uma reconstrução cognitiva, a qual é vista durante a luta inicial dos estudantes universitários com as abstrações formais, enfrentadas por eles no primeiro ano de universidade.

Parece-nos que a intuição é, então, o ponto inicial da busca do rigor, permanecendo ativa durante todo o processo sendo, pois, complementar ao rigor!

Pinto (2009) destaca que não temos apenas dois percursos para a construção de uma Matemática avançada, trabalhando de uma Matemática denominada de intuitiva para outra denominada de formal.

Na realidade, podemos pensar tal situação como uma reta com dupla seta, em que uma extremidade é representada pela intuição e a outra pelo rigor, apresentada por Reis (2001, 2009), sugerindo que o trabalho do professor pode situar-se em qualquer um dos pontos dessa reta contínua. Na prática docente, o ponto de equilíbrio é, ou pelo menos deveria ser um ponto móvel e dinâmico.

Hanna (1989, p.45) afirma que não há infidelidade à Matemática ao buscar, tanto quanto possível, uma explicação matemática em detrimento de uma "prova matemática", 'mesmo abrindo mão do rigor' (grifo nosso). Isto não quer dizer que o rigor não tem seu papel na construção do conhecimento matemático nem deva ser "deixado de lado", em algum momento. Reiteramos as idéias de Reis (2001) que o rigor deve aparecer / acontecer em níveis.

Tanto uma "prova que prova" como uma "prova que explica" devem estar implícitas de rigor, e de acordo com a necessidade, usá-lo em maior ou menor grau. Usamos aqui os termos apresentados por Hanna (1989), "provas que provam", como sendo aquelas que têm a única função de provar a veracidade de certa propriedade matemática, muitas vezes vazias de significado prático, e "provas que explicam" como aquelas que, além da função necessária de verificar essa veracidade, demonstram / apresentam propriedades e características do que se está demonstrando, tornando-as mais inteligíveis e claras aos olhos dos discentes, sem dever nada às "provas que provam".

Outra discussão interessante sobre as provas e seu papel no ensino de Matemática é feita por Garnica (2002, p. 6), ao afirmar que a prova rigorosa pode ser "considerada como uma – dentre as várias – forma de argumentação acerca do objeto matemático".

Essa questão nos remete, novamente, à importância do papel do professor na escolha / seleção do que e de que forma fazer a transposição entre a Matemática e o seu ensino. Entretanto, é reconhecida a dificuldade de caminhar da história da evolução da Matemática para a sala de aula.

Essas discussões devem levar os professores das disciplinas de Introdução a Análise Real, principalmente nos cursos de licenciatura, a reconhecer, segundo Reis (2009, p. 93), que:

> [...] o "rigor acadêmico", dominante no mundo das publicações e apresentações de trabalhos, artigos científicos e outros, não pode ser transposto de uma maneira direta, mecânica ou simplista para o ensino. Essa transposição, na verdade, deveria proporcionar uma exploração múltipla e flexível dos conceitos, de modo que os mesmos sejam intuitivamente significativos e compreensíveis, tendo um tratamento de validação e demonstração (isto é, rigor) compatível ao contexto de ensino (instituição; Licenciatura ou Bacharelado; conhecimento prévio dos alunos, etc).

Apresentando nossa pesquisa

A questão de investigação que norteou nossa pesquisa foi assim formulada: **Como os Conjuntos Numéricos são apresentados / abordados em livros didáticos de Análise Real utilizados em cursos de Licenciatura em Matemática e de que forma eles podem ser problematizados / explorados na perspectiva de um ensino que aborde dialeticamente seus aspectos intuitivos e rigorosos?**

Inicialmente, analisamos a apresentação e a abordagem dos conceitos de Conjuntos Numéricos, em livros didáticos de Análise Real utilizados em cursos de Licenciatura em Matemática. Os livros escolhidos, por se encontrarem nas referências bibliográficas de diversos cursos de Licenciatura em Matemática de universidades brasileiras (conforme pesquisa virtual) foram: Ávila (2006), Figueiredo (1996) e Lima (1993).

Nossa pesquisa de campo foi realizada no 2º semestre letivo de 2009 com os alunos regularmente matriculados na disciplina de "Introdução a Análise Real", obrigatória do curso de Licenciatura em Matemática de um Instituto Superior de Educação particular da cidade de Montes Claros – MG.

A ementa da disciplina era composta por: Preliminares de Lógica; Conjuntos Numéricos; Números Reais; Sequências e Séries. A carga horária foi de 60 horas/aula. Adotamos como bibliografia básica o livro "Análise Matemática para Licenciatura" de Geraldo Ávila.

A partir da análise dos livros didáticos, pudemos elaborar uma proposta didática para o ensino de Conjuntos Numéricos, passível de utilização em disciplinas de Fundamentos de Análise de cursos de Licenciatura em Matemática.

Na elaboração, procuramos levar em consideração, alguns questionamentos levantados por Pinto (2009, p. 27), que sempre nos inquietaram, tanto quanto discente como docente de Análise Real:

> Que sentido faz a Matemática formal para um futuro matemático, em um primeiro curso na área? Mais especificamente, seria possível descrever o processo (ou processos) cognitivo(s) por meio do(s) qual (is) um estudante de Matemática se relaciona com definições formais e deduções? Como as experiências anteriores dos alunos [...] referenciam a teoria matemática formal, estruturada, a ser compreendida?

Parece-nos claro que tentar responder a essas questões demanda uma investigação criteriosa por parte dos educadores matemáticos / pesquisadores em Educação Matemática. Entretanto, acreditamos que se deve manter um foco quando se trata do Ensino Superior de Matemática, como descreve Tall (1992, p. 495): "O foco principal da Educação Matemática em níveis superiores é o iniciar o aprendiz na totalidade do mundo do matemático profissional, não somente em termos do rigor que é requerido, mas também na vivência das experiências que fundamentam os conceitos".

Nesta perspectiva, procuramos elaborar nossa proposta, tentando apresentar um pouco da história do desenvolvimento dos conceitos como elemento importante na sua própria construção, buscando uma identificação dos conjuntos com suas estruturas algébricas correspondentes e, por fim, primando por uma abordagem que caminhe da intuição para o rigor de uma maneira suave e contínua.Nossa proposta se intitula "História e Desenvolvimento dos Conjuntos Numéricos: Das noções intuitivas para as definições rigorosas" e se divide em 5 (cinco) atividades didáticas relacionadas aos números naturais, inteiros, racionais, irracionais e reais:

1) Números Naturais: Do problema do princípio da contagem para os Axiomas de Peano;

2) Números Inteiros: Do problema da comparação de medidas para as estruturas de Anel e Domínio de Integridade;

3) Números Racionais: Do problema da razão de grandezas para a estrutura de Corpo;

4) Números Irracionais: Do problema da incomensurabilidade de segmentos para a Teoria das Proporções de Eudoxo;

5) Números Reais: Do problema da representação da reta numérica para os Cortes de Dedekind.

Cada atividade possui objetivos específicos, sua estrutura é composta por duas subdivisões: "Da intuição...", na qual prima-se pela construção histórica dos conjuntos numéricos e discute-se alguns aspectos ligados ao seu ensino e "Para o rigor!", na qual os conjuntos numéricos foram formalizados como se espera em disciplinas de Introdução a Análise Real. Além disso, apresentamos alguns exercícios retirados de livros didáticos consagrados e outros de nossa própria autoria (BRITO, 2010).

Como instrumentos de coleta de dados, optamos pela aplicação de 2 (dois) questionários gerais, aplicados no início e ao final da realização das atividades, contendo questões como a importância das demonstrações para o futuro Professor de Matemática dos Ensinos Fundamental e Médio e as dificuldades que os alunos carregavam ao longo do curso com as demonstrações e também 5 (cinco) questionários específicos, aplicados após a realização de cada atividade, contendo uma avaliação da atividade e das dificuldades apresentadas pelos alunos em sua realização.

A visão dos alunos participantes da pesquisa

Em relação às dificuldades encontradas pelos alunos na realização das atividades propostas, muitos ainda consideraram como maior entrave, a dificuldade em expressar as idéias matemáticas. Em contrapartida, muitos relataram que sentiram dificuldades no momento de "escrever matematicamente", buscando se "expressar em palavras":

> Minha maior dificuldade foi exatamente na questão da transformação de dados matemáticos seguindo o rigor. Consigo expressar em palavras, mas não matematicamente. (Aluno 1)

Antes da aplicação das atividades, percebemos através do Questionário Inicial, que os alunos tinham como maior dificuldade a escrita das ideias matemáticas, tanto nas demonstrações densas de simbologia matemática como nas demonstrações mais textuais (aqui, não estamos relacionando uma ou outra à questão de demonstrações mais rigorosas ou mais intuitivas). A dificuldade era, então, expressar as suas ideias "no papel":

No questionário da avaliação das atividades, então, eles relataram que tinham dificuldade de escrever e demonstrar matematicamente, mas conseguiam se expressar textualmente. Podemos notar, de nossas observações em sala de aula, que um exemplo dessa situação foram as demonstrações que envolviam sucessores de números naturais. Alguns alunos utilizaram termos como "sucessor de um número" e "sucessor do sucessor de um número", mas nenhum deles utilizou as simbologias "s(n)" e "s(s(n))" com $n \in$ IN.

É claro que um Professor de Matemática precisa saber se expressar sobre alguns conceitos não somente utilizando simbologias. Entretanto, também é fundamental para futuros professores dos Ensinos Fundamental e Médio, conhecer profundamente a simbologia matemática, até mesmo como forma de escolher as melhores explicações sobre o que os símbolos matemáticos representam.

Ao analisarmos as respostas dadas pelos alunos às contribuições das atividades para uma ressignificação dos seus conhecimentos em relação aos Conjuntos Numéricos, percebemos uma visão positiva :

> Sim, este tipo de trabalho desperta uma outra visão analítica sobre a composição

> e operações com conjuntos. (Aluno 3)

Em relação a sugestões de mudança ou acréscimo nas atividades ou na sua forma de realização, alguns alunos apresentaram sugestões de continuidade do projeto, apontando como fator positivo a "forma agradável e proveitosa de abordar um conteúdo tão complexo como a Análise Real" (Aluno 3). Outro fato destacado foi a abordagem intuitiva e histórica no início de cada atividade.

Em relação à importância dada, como Professor de Matemática, ao rigor matemático presente nos enunciados e demonstrações de resultados, 11 (onze) alunos conferiram ao rigor um papel muito importante para a sua formação e apenas um aluno afirmou que o rigor não é importante, justificando que às vezes "ele atrapalha e limita o raciocínio e a liberdade de pensar" (Aluno 5).

Dentre aqueles que ressaltaram a importância do rigor, a maioria dos alunos o fez defendendo-o como fundamental para organizar, sistematizar e validar as propriedades matemáticas:

> A presença do rigor matemático no processo ensino/aprendizagem de Matemática, torna-a uma disciplina organizada e sistematizada, garantindo credibilidade ao conteúdo proposto. (Aluno 7)

Achamos interessante a relação entre a intuição e o rigor pensada por um aluno ao destacar que "aquilo que vem a fundamentar a intuição é exatamente o rigor!" (Aluno 3). Estaria essa fundamentação, na visão do aluno, atrelada a uma forma de se trabalhar de forma intuitiva, sendo o rigor uma diretriz do processo dessa aprendizagem intuitiva? Difícil de se afirmar com certeza!

Outro grupo de alunos atribuiu ao rigor a função didática de "ensinar" (HANNA, 1989), ressaltando também a utilização do rigor no desenvolvimento do raciocínio crítico do aluno e no seu aperfeiçoamento. Entretanto, houve quem destacasse que:

> Mesmo sendo o rigor de suma importância, devemos a todo momento buscar diferentes formas para transmitir os objetivos tanto nos enunciados como nas demonstrações. (Aluno 2)

Um aluno destacou a atividade de Números Inteiros, como aquela em que ele sentiu maior dificuldade na resolução dos exercícios. Conjecturamos que isto pode estar relacionado ao fato de que, na atividade de Números Naturais, os 2 (dois) exercícios iniciais eram de demonstração por indução, tema estudado pelos alunos anteriormente e os 2 (dois) últimos eram efetivamente "novidade". Já na atividade de Números Inteiros, todos os exercícios apresentavam novos desafios.

Já outro aluno destacou a atividade de Números Irracionais, por tratar de um tópico bastante abstrato. De nossas observações em sala de aula, percebemos essa "abstração" dos números irracionais relacionada à diferença com as atividades anteriores. A atividade de Números Naturais é iniciada relatando o processo de contagem de objetos (abordagem "concreta" para os alunos); a atividade de Números Inteiros trabalha com a ideia de excesso e falta, relacionando-os com os números positivos e negativos (abordagem também "concreta" para os alunos); a atividade de Números Racionais busca relacioná-los com a razão de segmentos (outra abordagem "concreta" para os alunos).

Logo, até então, as atividades tinham um certo cunho "prático" para os alunos, diferentemente da atividade de Números Irracionais, que buscou abordá-los a partir de segmentos incomensuráveis. A questão é que o senso comum aponta para a inexistência de segmentos incomensuráveis, isto é, a grande maioria dos estudantes acredita sempre na possibilidade de existência de um "submúltiplo comum" a quaisquer outros dois segmentos! Aqui, provavelmente, resida a dificuldade de "abstração" levantada.

Um aluno afirmou ter sido a primeira vez que pesquisou / estudou a escrita de demonstrações, sinalizando para uma "introdução ao Pensamento Matemático Avançado", com as ideias intuitivas sendo substituídas por (ou evoluindo para) conceitos alicerçados em definições formais (TALL, 1991):

> Pela primeira vez pesquisei a fundo quanto à escrita. Percebi que antes, o medo de errar me impedia de raciocinar harmonicamente, mas agora entendi que a escrita segue um sistema coordenado de ideias que tem que ser rigorosamente obedecidas. (Aluno 5)

Nessa perspectiva, alguns alunos relataram muitas dificuldades iniciais na escrita e, especialmente, nas demonstrações (já destacadas aqui), mas perceberam sua evolução com o decorrer das atividades. Essas dificuldades iniciais podem estar relacionadas ao processo de formulação da definição conceitual, quando as imagens conceituais normalmente entram em conflito (TALL e VINNER, 1981). A construção da definição conceitual envolve um processo de construção-desconstrução-construção contínua da imagem conceitual, até que ocorra uma acomodação a ponto de permitir a formatação da definição conceitual (VINNER, 1991). Também é um processo natural de evolução para o "Pensamento Matemático Avançado" (TALL, 1991).

A partir da análise dos livros didáticos e dos questionários preenchidos pelos alunos participantes de nossa pesquisa de campo, e ainda das nossas observações quando da realização das atividades, pudemos elaborar algumas categorias de respostas à nossa investigação, que aqui apresentamos sucintamente, como considerações finais do presente trabalho.

Sobre a apresentação e a abordagem dos livros didáticos de Análise Real

Os livros didáticos aqui analisados não se balizam, de uma maneira geral, por trabalhar "linearmente" todos os Conjuntos Numéricos. Isto talvez se explique pelo fato de que a própria história dos números revela uma construção "não-linear"

Optamos por seguir uma certa linearidade, presente também nos livros do ensino médio, na confecção das nossas atividades e execução dos trabalhos em sala de aula.

Pinto (2009) ressalta o aspecto "impactante" para os alunos de um primeiro curso de Análise Real, no qual os alunos de Licenciatura em Matemática se iniciam na cultura do matemático profissional. Sendo assim, achamos prudente fazer um estudo gradativo dos Conjuntos Numéricos, buscando referenciá-los historicamente, destacando conexões com os aspectos algébricos e, principalmente, considerando os níveis de rigor, sobre os quais dissertaremos a seguir.

Sobre a importância dos níveis de rigor no ensino de Análise Real

Considerando a importância do rigor no ensino e na aprendizagem de Análise, consideramos fundamental o papel do professor como mediador na busca do equilíbrio entre rigor e intuição na prática pedagógica. Assim, buscamos iniciar as atividades fazendo uma abordagem histórica e intuitiva, objetivando contribuir para uma reelaboração da imagem conceitual dos alunos; a partir daí, iniciamos um trabalho que pode ser considerado "mais rigoroso", tentando contribuir para uma composição da sua definição conceitual. Entretanto, essa diferenciação não coincide, necessariamente, com a transição "Da intuição... para o rigor!" feita em nossas atividades. Isto porque acreditamos que tal transição deve ser um processo contínuo e dialeticamente construído na prática, pelo professor.

Logo, acreditamos também na influência da forma de se expressar do professor, que deve buscar usar uma linguagem mais próxima do aluno, tanto no que se refere aos aspectos intuitivos, quanto no que se refere aos aspectos rigorosos.

Reafirmamos aqui as ideias defendidas por Reis (2009), de que o rigor deve ser trabalhado em níveis, cabendo ao professor a tarefa de explorá-lo, levando em consideração as diversas componentes do processo de ensino e aprendizagem, tais como os aspectos sócio-histórico-culturais dos alunos, a realidade por eles vivenciadas, a exigência da disciplina ministrada, o nível de ensino (Fundamental, Médio, Superior ou Pós-graduação) e os objetivos e metodologias de cada disciplina.

Defendemos, portanto, que o rigor é fundamental no ensino de Análise Real, mas que deve ser buscado de forma gradativa, levando-se em consideração todo o contexto da sala de aula e do profissional em formação.

Sobre a questão da maturidade do aluno de Análise Real

Conforme Moreira, Cury e Vianna (2005), a Análise Real tem a particularidade de se constituir em um espaço de percepção da Matemática como um instrumento de entendimento profundo de certos fenômenos naturais e de aplicações em outras ciências, proporcionando uma compreensão sólida e profunda dos conceitos básicos da Matemática escolar. Exigem-se, então, habilidades até então pouco exploradas em outras disciplinas do curso de licenciatura e certa "maturidade" dos alunos, muitas vezes ainda não consolidada.

Isto nos leva a sugerir que a disciplina de Análise Real se adequa melhor aos períodos finais do curso, época em que os alunos têm uma maior experiência matemática, adquirida em todas as disciplinas dos períodos anteriores, destacadamente em Cálculo, Teoria dos Números, Estruturas Algébricas e Geometria Euclidiana.

Sobre as relações em sala de aula de um curso de Análise Real

Apesar de não ser o objetivo principal desse trabalho, preocupamo-nos com as relações em sala de aula no processo de ensino e aprendizagem, tendo uma atenção especial com o vocabulário usado nas explanações e em conversas informais, dentro e fora do ambiente da sala de aula, para desmistificar, ou pelo menos atenuar, o receio apresentado pelos alunos diante da disciplina de Análise Real, muitas vezes provocadas pelo próprio docente que "mistifica" o seu trabalho. Essa atenção ao vocabulário estava presente também durante as explicações do conteúdo, onde nos pautamos pelo uso de uma linguagem mais próxima do aluno.

Outro destaque foi o posicionamento dos alunos em relação ao seu esforço individual com relação à frequência e ao interesse na implementação das atividades, atitudes essas inerentes ao sucesso de todo o processo de aprendizagem, conforme discutido por Bortoloti (2009), ao investigar as relações entre afeto e cognição em um curso de Análise Real para a licenciatura.

A autora nos chamou a atenção para a influência de aspectos emocionais na aprendizagem, corroborando com Lorenzato (2008, pref.) ao afirmar, no prefácio do seu livro, que as motivações da escrita surgiram no "reconhecimento de que a metodologia de ensino empregada pelo professor é determinante para o desempenho dos seus alunos, tanto cognitiva como afetivamente".

Pesquisas futuras e contribuições para o presente

Acreditamos que muitas das questões / indagações aqui levantadas são passíveis de futuras investigações na área de Educação Matemática no Ensino Superior.

Ademais, esperamos com esse trabalho, contribuir para um repensar não só de nossa metodologia, enquanto professores / educadores de Análise Real, mas principalmente, de nossas concepções e práticas, para que, com efeito, a disciplina de Análise Real se manifeste e seja assim reconhecida, como fundamental para a formação de Professores de Matemática dos Ensinos Fundamental, Médio e Superior com multiplicidade de conhecimentos específicos e pedagógicos.

Referências

Ávila, G. S. S. *Análise Matemática para Licenciatura*. São Paulo: Edgard Blücher, 2006.

Bortoloti, R. D. M. *Afeto e cognição no contexto da disciplina Análise Real no curso de Matemática*. In: Frota, M. C. R.; Nasser, L. (Orgs.) *Educação Matemática no Ensino Superior: Pesquisas e Debates.* Recife: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, p. 147-167, 2009.

Brito, A. B. *Ensino de Conjuntos Numéricos em disciplinas de Fundamentos de Análise Real: Da abordagem dos livros didáticos para a sala de aula em cursos de Licenciatura em Matemática*. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Ouro Preto. Ouro Preto, 2010. Disponível em: <www.ppgedmat.ufop.br>. Acesso em: 03/01/2011.

Figueiredo, D.G. *Análise I*. Campinas: UNICAMP, 1996.

Garnica, A. V. M. *As demonstrações em Educação Matemática: Um ensaio*. In: *Bolema*, n. 18. Rio Claro, p. 91-122, 2002.

Hanna, G. *Proofs that prove and proofs that explain*. Proceedings of the Tentieth Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, v. III. Paris, p. 45-54, 1989.

Lima, E.L. *Análise Real* – Volume 1. Rio de Janeiro: IMPA, 1993;

Lorenzato, S. *Para aprender Matemática.* Campinas: Autores Associados, 2008.

Moreira, P. C.; Cury, H. N.; Vianna, C. R. *Por que Análise Real na licenciatura?* In: *Zetetiké*, v. 13, n. 23. Campinas, p. 11-42, 2005.

Pinto, M. M. F. *Re-visitando uma teoria: O desenvolvimento matemático de estudantes em um primeiro curso de Análise Real*. In: Frota, M. C. R.; Nasser, L. (Orgs.) *Educação Matemática no Ensino Superior: Pesquisas e Debates*. Recife: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, p. 27-42, 2009.

Reis, F. S. *A tensão entre rigor e intuição no ensino de Cálculo e Análise: A visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos.* Tese de Doutorado. Faculdade de Educação. Universidade Estadual de Campinas. Campinas, 2001.

Reis, F. S. *Rigor e intuição no ensino de Cálculo e Análise*. In: Frota, M. C. R.; Nasser, L. (Orgs.) *Educação Matemática no Ensino Superior: Pesquisas e Debates.* Recife: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, p. 81-97, 2009.

Tall, D. O. *The Psichology of Advanced Mathematical Thinking*. In: Tall, D.O. (Ed.) Advanced Mathematical Thinking. Londres: Kluwer Academic Publisher, p. 3-21, 1991.

Tall, D. O. *The transition to the Advanced Mathematical Thinking: Functions, limits, infinity and proof.* In: Grows, D. A. (Ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: Macmillan, p. 495-511, 1992.

Tall, D. O.; Vinner, S. *Concept image and concept definition in Mathematics with particular reference to limits and continuity*. Educational Studies in Mathematics, n. 12, p. 151-169, 1981.

Vinner, S. *The role of definitions in the teaching and learning of Mathematics*. In Tall, D. O. (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking*. Londres: Kluwer Academic Publisher, p. 65-81, 1991.