XIII CONFERENCIA INTERAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
2011 CIAEM 50 años
26 - 30 Junio, 2011
Recife, Brasil
del Comité Interamericano de Educación Matemática

La resolución de problemas como herramienta de aprendizaje de la matemática

Alicia Graciela **Matassa**
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura. Universidad Nacional de Rosario Argentina.
matassa@fceia.unr.edu.ar
Mariana del Valle **Pérez**
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura. Universidad Nacional de Rosario Argentina.
mperez@fceia.unr.edu.ar
Marisa Inés **Piraino**
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura. Universidad Nacional de Rosario Argentina.
piraino@fceia.unr.edu.ar
Ana Inés **Sadagorsky**
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura. Universidad Nacional de Rosario Argentina.
sadagors@fceia.unr.edu.ar

Resumen

En este trabajo se presenta una experiencia didáctica realizada con estudiantes de la asignatura Análisis Matemático II de las carreras de Ingeniería de la Universidad Nacional de Rosario, utilizando la metodología de la Ingeniería Didáctica. El objetivo de esta experiencia es profundizar en los procesos de resolución de problemas. Se trabajó en el aula un problema de Física que relaciona el concepto de Trabajo con el de Integral Definida. En la experiencia se observaron y registraron distintas formas de abordaje, preguntas realizadas, obstáculos y errores de los alumnos, a fin de tratar de lograr nuestro objetivo. Esta experiencia, encuadrada dentro de proyectos de investigación que se desarrollan en FCEIA esperamos que sea considerada un antecedente para la organización de un taller para resolver problemas destinado a alumnos de la facultad, puesto que la única manera de aprender a resolver problemas es justamente resolviendo problemas.

Palabras clave: resolución de problemas, integración de conceptos, aprendizaje de la matemática, ingeniería didáctica.

Introducción

Con intención de lograr mejores aprendizajes, intentamos difundir mediante este material una experiencia de Investigación desarrollada en la FCEIA, analizar brevemente las acciones que desde las posibilidades concretas de nuestra intervención docente fueron realizadas y comunicar conclusiones e innovaciones derivadas. La población destinataria han sido los alumnos de Análisis Matemático II, del segundo cuatrimestre de 1°de año de Ingeniería Industrial.

Una revisión documental previa nos permitió seleccionar nuestra línea de investigación y precisar que entenderíamos por un buen aprendizaje. Ante los fines perseguidos, aprendizaje significativo, aprendizaje activo, sentido crítico, contexto, dialoguicidad, aparecieron como conceptos válidos, para concluir que, la construcción de un buen aprendizaje tiene que ver con todo aquello que hace posible la obtención de aprendizajes duraderos en el tiempo y de fácil transferencia a nuevas situaciones problemáticas, para lo cual, el proceso de enseñanza aprendizaje debería ser activo y más vinculado a la práctica, atendiendo a la etapa evolutiva del alumno y la diversidad del contexto.

Las docentes que realizamos esta experiencia, creemos que es necesario fomentar, desde que los alumnos se inician en las carreras universitarias de Ingeniería, la capacidad de integración de conceptos del cálculo en distintas áreas como Física, Mecánica o Economía por ejemplo.

En su libro sobre enseñanza Arons (1990) escribió: *"... está mostrado que la simple exposición de ideas abstractas y desarrollos matemáticos (tan atractivos y lúcidos como podamos hacerlos) a oyentes pasivos conduce a resultados patéticamente bajos de aprendizaje y comprensión, excepto en aquel pequeño porcentaje de estudiantes especialmente dotados para la disciplina…"*

Para resolver problemas no existen fórmulas mágicas, no hay un conjunto de procedimientos o métodos que aplicándolos lleven necesariamente a la resolución del problema, en el caso de que tenga solución, de allí la importancia de adquirir habilidad para resolver problemas.

Modelizar situaciones reales, plantear estrategias, analizar respuestas, obtener conclusiones, son cuestiones sumamente valiosas para la formación del perfil del futuro ingeniero.

Orientó este trabajo además, el tener en cuenta que todo progreso científico y tecnológico, y hasta la supervivencia dependen de la habilidad para resolver problemas.

Fundamentación

Consideramos de gran interés la inserción del problema como herramienta de aprendizaje de la matemática y el aporte de Guzmán, M. de (1987) en cuanto que sostiene: *"Tengo un verdadero problema cuando me encuentro en una situación desde la que quiero llegar a otra, unas veces bien conocida, otras un tanto confusamente perfilada, y no conozco el camino que me puede llevar de una a otra. Nuestros libros de texto están, por lo general, repletos de meros ejercicios y carentes de verdaderos problemas"*.

Por otra parte, Polya, G (1965) considera que la resolución de problemas es la base del proceso cognitivo que resulta de *"encontrar un camino que evite una dificultad, rodee un obstáculo, consiguiendo un propósito que no era inmediatamente realizable o alcanzable"*.

En el campo educativo se ha reconocido ampliamente la importancia de la resolución de problemas y en muchas Universidades el desarrollo de la creatividad y de la habilidad para resolver problemas es una parte integral de la currícula.

No es de extrañar entonces que la resolución de problemas se haya convertido en un nuevo objeto de estudio, atrayendo por igual la atención de psicólogos, ingenieros, matemáticos, especialistas en inteligencia artificial y científicos de todas las disciplinas.

La Psicología Cognitiva es de importancia indiscutible para el diseño de la práctica docente desde la perspectiva constructivista debido a que brinda un cuerpo considerable de saberes sobre los procesos mentales implicados en la construcción del conocimiento.

Ausubel (1986) resalta la importancia, en la resolución de problemas, de la aptitud para conectar la información del problema con la que se dispone en la estructura cognitiva y la posibilidad de procesar (comprender, analizar, interpretar, etc.) la información que suministra el enunciado del problema.

En el modelo planteado, se explicitan las siguientes condiciones:

- Que el sujeto muestre una actitud hacia el aprendizaje significativo. Es decir, que tenga una disposición para relacionar no arbitrariamente, sino sustancialmente el material nuevo con su estructura cognoscitiva.
- Que el material que vaya a aprender sea potencialmente significativo para él, especialmente relacionable con su estructura de conocimiento, de modo intencional y no al pie de la letra.

Como docentes nos interesa contribuir efectivamente en el proceso de construcción de los aprendizajes con una acción educativa sistemática directa y mediada, lo cual nos motivó a realizar una experiencia áulica utilizando la metodología de la Ingeniería Didáctica, que cuenta con Michèle Artigue como máximo exponente.

La Ingeniería Didáctica surgió en la didáctica de las matemáticas francesa, a principios de los años ochenta, como una metodología para las realizaciones tecnológicas de los hallazgos de la teoría de Situaciones Didácticas y de la Transposición Didáctica. El nombre surgió de la analogía con la actividad de un ingeniero.

En realidad el término Ingeniería Didáctica se utiliza en didáctica de las matemáticas con una doble función: como metodología de investigación y como producciones de situaciones de enseñanza y aprendizaje.

Como metodología de investigación se caracteriza por un esquema experimental basado en las "realizaciones didácticas" en el aula, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza y por el registro de los estudios de caso y la validación que es esencialmente interna, basada en la confrontación entre el análisis *a priori* y *a posteriori*.

Para esta metodología Artigue propone las siguientes fases: análisis previos, concepción y análisis a priori, experimentación, análisis a posteriori y validación.

El análisis previo comprende la ubicación curricular del tema o de los temas a enseñar, concepciones de los estudiantes, dificultades y obstáculos que determinan su evolución y un primer proceso de selección de problemas en relación a los contenidos a tratar de la asignatura elegida.

El análisis a priori se enfoca a la concepción del problema seleccionado, principalmente referidos a las competencias específicas requeridas , estrategias posibles, registros que pueden intervenir, riqueza conceptual, discusión sobre posibles formas de propuesta y organización del contexto de trabajo con los alumnos (individual o grupal, enunciado pautado o no, en el ámbito de la clase o fuera de ella etc.)

La experimentación es la fase de la realización de la ingeniería con una cierta población de estudiantes, esta etapa se inicia cuando se da el contacto entre los docentes – investigadores con el grupo de estudiantes objeto de la investigación. Durante la experimentación se busca respetar las selecciones y deliberaciones hechas en el análisis a priori.

El análisis a posteriori consiste en la evaluación de los procesos de resolución realizados por los alumnos en la fase de experimentación, dificultades y errores generalizados, obstáculos epistemológicos, procesos de solución no esperados.

De la confrontación de análisis a priori y a posteriori se espera resulte una validación (interna) de la experiencia y la categorización de logros y errores a tener en cuenta para una propuesta de un nuevo ciclo.

Metodología

Siguiendo los lineamientos de la metodología de la Ingeniería Didáctica se realizaron los siguientes procesos.

Análisis previo

Luego de desarrollar en la asignatura Análisis Matemático II, el concepto de integral definida, se efectuó la búsqueda y selección de un problema de aplicación de la misma.

Del intercambio de opiniones en nuestro grupo docente surgió el interés por un problema físico que involucra el concepto de Trabajo. El interés provino de considerar que los estudiantes han aprobado la asignatura Análisis Matemático I y se encuentran cursando la asignatura Física I.

Para poder resolver el problema elegido, los estudiantes debían tener clara la diferencia entre lo que significa el Trabajo realizado por una fuerza constante y el realizado por una fuerza variable, así como el concepto de integral definida.

El problema de la caja arrastrada. El hombre de la figura 1 ejerce a través de una soga una fuerza de módulo constante *F,* mediante la cual arrastra una caja. Determinar el trabajo que realizó cuando la caja llegó a la pared.

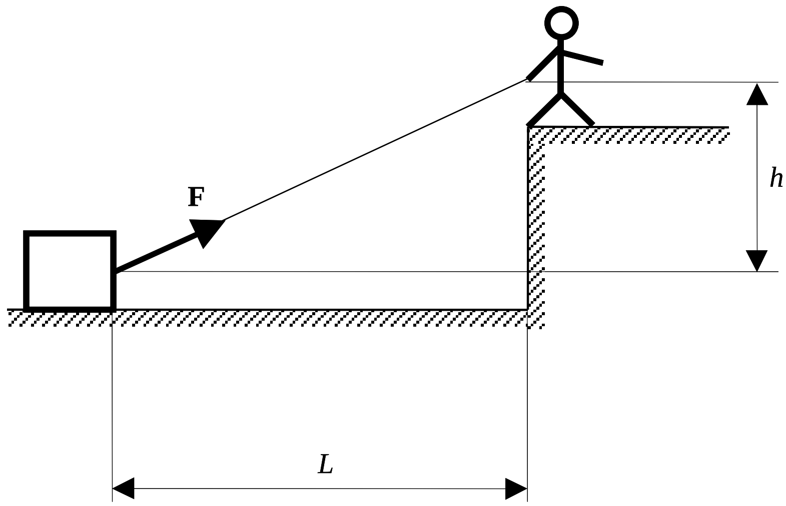

Figura 1. Representación gráfica de la situación inicial planteada en el problema de la caja arrastrada.

Análisis a priori

¿Qué significa trabajo?

¿Cómo relacionar este concepto con la fórmula: trabajo = fuerza x distancia?

¿Se realiza trabajo en la dirección de movimiento?

¿Qué diferencia hay entre fuerza constante y fuerza de módulo constante?

¿Cuál es la noción de fuerza variable?

¿Qué diferencia hay entre la situación planteada y arrastrar la caja con una fuerza de módulo constante siempre horizontal?

¿Qué conceptos de cálculo además del de integral definida se necesitan manejar para abordar el problema? ¿Cómo relacionan los alumnos estos conceptos: vector, ángulos, relaciones trigonométricas?

Al introducir este problema se preguntaron los alumnos si es razonable la premisa del enunciado de que la fuerza va a ser de módulo constante. Fácilmente llegaron a la respuesta correcta de que la fuerza que ejerce el hombre depende de su musculatura, por lo cual es razonable pensar que se mantendrá constante, por lo menos mientras no se canse. Luego se les pidió su opinión intuitiva sobre si resultará más fácil o más difícil arrastrar la caja a medida que se vaya acercando a la pared (respuesta: más difícil, porque menos componente de la fuerza va a ser aprovechada para la traslación horizontal).

Solución del problema. En la figura se ve la situación luego de transcurrido un tiempo desde que el hombre empezó a tirar de la caja. El ángulo que forma la soga (por ende la fuerza) con la horizontal (esto es, la dirección de movimiento) ahora cambió. Por lo tanto, también va a haber cambiado la componente de **F** sobre dicha dirección.

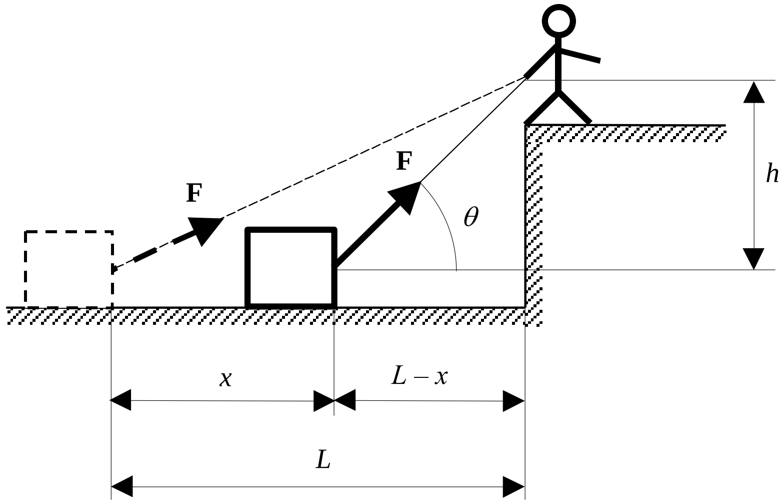

Figura 2. Representación gráfica de las situaciones posibles que se plantean en el problema de la caja arrastrada.

Tenemos, pues:

$$F_x = F\cos\theta = F\frac{(L-x)}{\sqrt{(L-x)^2+h^2}} \Rightarrow W = \int_0^L F_x dx = \int_0^L F\frac{(L-x)}{\sqrt{(L-x)^2+h^2}}dx$$

De esta manera se llega a una integral por sustitución de manera mucho más motivante que si en cambio se la hubiera enunciado para resolver directamente en una clase tradicional.

Experimentación

La experiencia se realizó con 26 alumnos, organizados espontáneamente en grupos de dos y tres, de la asignatura Análisis Matemático II de la comisión 53 durante el 2º cuatrimestre de 2010. Cabe observar que el día previsto para llevar a cabo esta experiencia un paro de transporte ocasionó la baja asistencia de alumnos y a pesar de esto se decidió no postergarla para no alterar el desarrollo curricular exigido por la cátedra.

Se propuso un problema que surgió a partir del análisis preliminar que fue entregado en forma impresa. Se les pidió a los alumnos que lo leyeran y trataran de resolverlo. Podían consultar con sus apuntes y con el libro de texto de la asignatura “Cálculo: Trascendentes Tempranas” de J. Stewart. Mientras realizaban esta actividad, el rol de las docentes era el de guía, interviniendo sólo cuando los grupos las solicitaban.

El tiempo de trabajo que se destinó fue de 2 horas reloj.

Cada una de las docentes registró libremente por escrito las preguntas y los comentarios de los grupos como así también las inquietudes y estrategias de resolución que se generaban. No se emplearon otros instrumentos en la observación.

Ante la dificultad de algunos grupos de no darse cuenta de que la fuerza era variable por lo cual no podían relacionarla con la integral definida, las docentes debimos intervenir para orientarlos en este aspecto. Una vez que entendieron que actuaba una fuerza variable se encontraron con la dificultad de encontrarla debido a la falta de visualización de la situación problemática en donde era necesario el uso de la trigonometría.

Luego del tiempo destinado a la resolución del problema, cada grupo lo entregó en forma escrita. A continuación se realizó una puesta en común, en donde se observó una gran interacción entre los grupos. Cada uno de ellos contó como lo había pensado y las dificultades que se le presentaron. Los aportes fueron escritos en el pizarrón hasta que se logró arribar a la solución del mismo.

La corrección de cada uno de los trabajos y la puesta en común, nos permitió reunir los elementos necesarios para realizar el análisis a posteriori, obtener resultados y conclusiones, detallados en la descripción de la metodología.

Cabe observar que los alumnos no habían trabajado anteriormente en aspectos que le enseñen a resolver problemas, mientras que las docentes que llevamos a cabo la implementación de la experiencia, venimos realizando cursos de formación de postgrado en Resolución de Problemas

La experiencia que analizamos en este trabajo se encuadra dentro de los proyectos de investigación 1Ing276 y 1Ing214, que se llevan adelante en FCEIA. UNR.

Dichos proyectos de investigación han aportado a la comunidad educativa talleres de resolución de problemas para docentes y un libro: *Del Texto a la ecuación* (Anido, M; Miyara, A.; Piraino M.-2010), en el que se publican los detalles de distintas experiencias, desde qué marco teórico están sostenidas y avaladas, cómo se llevaron a cabo, cuáles fueron los análisis y las conclusiones que se obtuvieron.

Análisis a posteriori

Algunos alumnos calcularon el ángulo de la soga con respecto a la horizontal en la situación inicial y mantuvieron ese valor constante en todo el recorrido. Se los animó a dibujar, como se hizo arriba, la situación en un punto intermedio, y comparar los ángulos. Es importante destacar que lo que interesa es el coseno, el cual se puede calcular directamente sin pasar por la obtención del ángulo en radianes.

Otra inquietud que trajeron, los que algo recordaban de Física, fue la cuestión del rozamiento. Éste es proporcional a la normal que ejerce el piso (la cual neutraliza al peso), cuyo valor será menor a medida que la caja avance sobre el plano horizontal, debido a que habrá una mayor componente vertical de la tensión, que también contribuye a equilibrar el peso y hace necesaria una menor normal. Se sugirió que determinaran la aceleración de la caja para cada punto del recorrido en función de esas consideraciones, dividiendo la fuerza total horizontal (componente horizontal de la tensión menos fuerza de rozamiento) por la masa de la caja.

Resultados y conclusiones de la experiencia

Sólo un grupo de estudiantes resolvió el problema en primera instancia. Los demás grupos lo lograron luego de recibir un aporte a través de la discusión de las distintas formas de abordaje surgido casi al final del encuentro. Así fueron superándose los obstáculos y los errores de planteo, tras lo cual el ciclo de resolución se reinició en esos casos, llegando a la solución del problema y con esto a la validación interna del mismo.

A través del desarrollo de esta experiencia pudo observarse gran interés y esfuerzo considerable por parte del grupo en general para resolver el problema propuesto.

Se manifestó siempre espíritu de colaboración entre compañeros ya que cada uno aportó sus conocimientos para plantear la resolución del problema en términos matemáticos.

De la confrontación del análisis a priori y a posteriori, observamos que las dificultades que se presentaron, fueron las que habíamos previsto. Suponemos que esto es debido a la falta de entrenamiento en resolución de problemas, que se relaciona no solamente con el uso y desarrollo de habilidades para que el estudiante tenga acceso y utilice diversos recursos; sino también con estrategias que le permita trabajar eficientemente con tales recursos en diversas situaciones.

En cuanto al objetivo de esta experiencia, que es profundizar en los procesos de resolución de problemas, creemos que en parte se ha cumplido en el sentido de que los estudiantes expresaron la necesidad de ahondar en estos procesos que consideraron fundamentales para su formación como futuro ingeniero.

La experiencia resultó movilizante para el grupo, a nivel de contenidos y relaciones humanas que sumado a otras experiencias áulicas de resolución de problemas, hace pensar en la necesidad de trabajar sobre la posible implementación de un taller de resolución de problemas abierto a la comunidad de estudiantes de la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura.

Conclusión

El poder o no resolver un problema, no solo depende de los conocimientos adquiridos sino también de cómo se utilizan dichos conocimientos. Lo importante es el nexo entre la estructura cognitiva del alumno y la nueva información que recibe. Para poder resolver un problema utilizando los conocimientos que posee, éstos deben haber sido aprendidos significativamente. Además, el alumno debe manejar algunas habilidades y estrategias, para lo cual debe ser instruido, al igual que los docentes, quienes se transforman en guías en el aprendizaje de sus alumnos, que de esta manera se transforman en actores principales del proceso.

La oferta de nuevos espacios de enseñanza, aprendizaje y evaluación que coloquen al alumno en situaciones de desafíos cognitivos y construcción y reconstrucción permanente de sus conocimientos se corresponde con la demanda de nuevas competencias y actitudes exigidas a nuestros profesionales actuales.

Todas las acciones mencionadas refieren a un mismo objetivo: la generación de las condiciones para un efectivo mejoramiento en el rendimiento estudiantil y el logro de una formación profesional de excelencia dentro de las condiciones institucionales existentes en la FCEIA.

Referencias Bibliográficas

Arons, A. (1990). *A Guide to Introductory Physics Teaching*. New York: Wiley

Guzmán, M.(1987). *Enseñanza de la Matemática a través de la Resolución de Problemas.* ICE de la Universidad de Zaragoza

Artigue, M, Douady, R., Moreno, L. & Gómez, P. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica.

Artigue, M. (2003). ¿Qué se puede aprender de la Investigación Educativa en el Nivel Universitario? *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, X(2), 117-134.

Ausubel,N.(1986).*Psicología Educativa. Un punto de vista cognoscitivo*. (2da ed.).México: Trillas.

Benedito, Ferrer & Ferreres (1995).*La Formación Universitaria a debate*. (1ra ed.). Barcelona.

Miyara, A; Piraino, M.; Anido, M.(2010).*Del Texto a la ecuación.1ra***.** Ed. UNR EDITORA. Rosario, Argentina.

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Editorial Trillas.

Stewart, J. (2008). *Cálculo*: *Trascendentes Tempranas*. (6th ed.). México: Cengage Learning Editores.

Thomas, G. (2006). *Cálculo Varias Variables*. (11a ed.). México: Pearson Educación.

Solaz-Portolés, J.J.(2008). *Una aproximación a la resolución de problemas de lápiz y papel en el aula de la ciencia.* Edición electrónica gratuita .Texto completo en http://www.eumed.net/libros/2008c/450/.