



Um estudo de planos, cilindros e quádricas, explorando seções transversais para o desenvolvimento da visualização, com o Winplot

Janine Freitas **Mota**

Universidade Estadual de Montes Claros / Fundação Educacional Montes Claros / ISEIB
Brasil

janinemota@gmail.com

João Bosco **Laudares**

PUC Minas

jblaudares@terra.com.br

Resumo

Este artigo é resultado de uma dissertação de Mestrado em Ensino de Matemática, cuja temática foi: estudo de planos, cilindros e quádricas. A metodologia utilizada contemplou os parâmetros da sequência didática, com exploração da habilidade de visualização. As sequências didáticas propostas articulam teoria e prática, privilegiando o tratamento gráfico, utilizando seções transversais e curvas de níveis, com o objetivo de facilitar, para o estudante, o esboço de gráficos das superfícies com as mídias “lápiz e papel” e informática, com o *software* Winplot. A análise qualitativa dos resultados evidenciou como os estudantes realizaram as representações gráficas, suas reflexões, dúvidas e resultados, e verificou-se que houve uma postura mais ativa e participativa, por parte dos estudantes, no processo de aprendizagem. Ainda foi observado que a articulação entre a equação (álgebra) e a figura (geometria) promoveu uma abordagem integrada entre Álgebra e Geometria, que é o foco da Geometria Analítica.

Palavras-chave: educação matemática, sequências didáticas de atividades, planos, cilindros, quádricas.

Introdução

As pesquisas na área de Educação Matemática promovem reflexões sobre como a forma tradicional no processo de ensino-aprendizagem pode ser inovada por meio de estratégias diferenciadas que visem a uma melhor qualidade nesse processo.

A nossa prática profissional, com estudantes da Licenciatura em Matemática e cursos de Engenharias, revelou o quanto é difícil trabalhar os tópicos planos, cilindros e quádricas nas disciplinas Geometria Analítica ou Cálculo Diferencial e Integral, seja por reduzida carga horária para esse conteúdo, seja pela dificuldade que os estudantes têm na visualização geométrica no espaço tridimensional ou na relação entre questões visuais (figuras) e analíticas (equações).

As dificuldades dos estudantes nos tópicos de geometria perpassam toda a educação básica, chegando ao ensino superior. Essa deficiência é evidenciada por vários pesquisadores em Educação Matemática, tais como Lorenzato (1995), Dante (1988), Perez (1991), Pavanello (1993).

Essa defasagem gera dificuldades na aprendizagem da disciplina Geometria Analítica e em tópicos do Cálculo Diferencial e Integral, da Álgebra Linear, entre outras.

A pesquisa

A nossa proposta de pesquisa compõe-se de uma sequência didática para o ensino dos tópicos: planos, cilindros e quádricas, onde foi explorada a visualização com o traçado dessas figuras, utilizando interseções das mesmas com planos (cortes), obtendo-se as seções transversais no traçado do esboço, por meio de uma análise da equação das superfícies e dos planos interceptos.

Assim, o objetivo geral da pesquisa foi de propor atividades que possibilitem ao estudante de Matemática e Engenharia desenvolver a habilidade de visualização e representação de planos, cilindros e quádricas.

Dessa forma, as atividades propostas foram desenvolvidas de forma a articular as mídias “lápis e papel” com ferramentas informatizadas, utilizando o *software* Winplot, que é um programa *freeware* (gratuito), executado no sistema operacional *Windows*, o qual permite uma dinâmica de rotação e translação de figuras, facilitando a visualização geométrica em espaços tridimensionais, com múltiplas representações.

Dentre os objetivos específicos, destacamos: análise de livros didáticos de Geometria Analítica e Cálculo; elaboração, avaliação e validação de uma sequência didática de atividades que desenvolva o pensamento geométrico, interligado aos aspectos teóricos e práticos das superfícies em estudo; articulação das representações algébrica e geométrica dessas superfícies; exploração das interseções de planos com superfícies cilíndricas e quádricas; seleção e análise da utilização de um *software* matemático no desenvolvimento da sequência didática.

A nossa questão de investigação foi assim delineada:

como a habilidade de visualização das figuras espaciais: planos, cilindros e quádricas contribuem para o desenvolvimento do pensamento geométrico?

como a utilização das seções transversais das superfícies podem facilitar o traçado do esboço das mesmas?

como a articulação entre as representações algébrica e geométrica pode contribuir para o desenvolvimento do processo de ensino-aprendizagem de planos, cilindros e quádricas na disciplina Geometria Analítica?

de que forma a utilização das mídias “lápiz e papel” e do software contribui para o desenvolvimento da habilidade de visualização de figuras tridimensionais?

Os métodos utilizados na pesquisa foram: análise documental correspondente ao estudo dos tópicos Planos, Cilindros e Quádricas em livros didáticos de Geometria Analítica e Cálculo; elaboração, aplicação e avaliação de uma sequência didática de atividades.

O processo ensino-aprendizagem de geometria: visualização e pensamento geométrico

O ensino de geometria tem sido pautado ainda tradicionalmente com definições e demonstrações no tratamento formal de conceitos. Partindo de uma proposta mais progressista, Nasser (1994), Viana (2000) buscam a compreensão conceitual com o desenvolvimento do pensamento geométrico. Essas autoras analisaram e divulgaram no Brasil o modelo de Van Hiele que, segundo Nasser e Sant’Anna (2004), defendem o desenvolvimento da assimilação do conhecimento geométrico dos estudantes a partir de um reconhecimento das figuras geométricas de um nível básico até a percepção dos aspectos formais da dedução rigorosa, passando por níveis intermediários.

Embora o modelo de Van Hiele seja mais utilizado no nível básico de ensino, entendemos que esse também pode ser utilizado no nível superior, de maneira similar, pois, também no ensino superior, a aprendizagem de conceitos geométricos ocorre por níveis de compreensão – os estudantes atribuem significado a um conceito básico de forma gradual, observando regularidades e produzindo generalizações.

Na nossa pesquisa, tratamos especialmente dos 3 (três) primeiros dos 5 (cinco) níveis de Van Hiele, que são: (1) reconhecimento (visualização das figuras), (2) análise (evidência nos conceitos, elementos e propriedades geométricas). (3) abstração (percepção da necessidade de uma definição precisa, argumentação lógica informal e ordenação de classes de figuras geométricas), com o tratamento gráfico das figuras espaciais: planos, cilindros e quádricas. Passando por esses níveis, o estudante estará desenvolvendo habilidades para contribuir com o seu pensamento geométrico e facilitar o aprendizado de tópicos relacionados com geometria, que necessitam especialmente da visualização.

A imagem mental está associada à visualização dos objetos. Segundo Gravina (1996), Barbosa (2009) e Machado (2008) o objeto geométrico é tratado como tendo duas componentes: uma conceitual e outra figural. A componente conceitual expressa propriedades que caracterizam uma classe de objetos e a componente figural corresponde à imagem mental que associamos ao conceito.

Destacamos que a visualização é uma aptidão que está relacionada com a habilidade de gerar uma imagem mental, promover diversas transformações com objetos e reter alterações produzidas sobre o mesmo.

Ensino e aprendizagem de planos, cilindros e quádricas

Na literatura científica especializada, encontramos referência ao pensamento aritmético, ao pensamento algébrico e ao pensamento geométrico, que são fundamentais para a compreensão

conceitual e a formalização em Matemática. Habilidades e competências são trabalhadas para explorar, conjecturar e raciocinar logicamente. Entretanto, a iniciação da aprendizagem da geometria na educação básica não é realizada de forma satisfatória, conforme destaca Pavanello (1993), dentre outros.

Desta forma, quando o estudante inicia seus estudos em Geometria Analítica, definida como integração da Álgebra e Geometria, figura e equação, há uma dificuldade de interpretação e análise, pois o desconhecimento de propriedades de geometria plana e espacial prejudica a compreensão dos tópicos relacionados a essa disciplina. A falta desses conhecimentos fundamentais também pode acarretar dificuldades na visualização de objetos geométricos com representação bidimensional e tridimensional.

Para melhor compreensão de propriedades dos planos, cilindros e das quádricas e domínio de visualização de seus gráficos, é importante o traçado de esboço e constituição de sólidos construídos a partir de figuras espaciais.

A informática educativa no estudo de figuras espaciais

O processo ensino-aprendizagem tem sido reformulado em mudanças, especialmente a partir das novas tecnologias da informação e comunicação, buscando promover mediação entre professor/aluno, aluno/aluno, segundo Moran (2000) e Valente (1993).

Especialmente, os *softwares* de geometria dinâmica proporcionam possibilidades de exploração e experimentação pelo movimento das figuras, facilitando a visualização e a compreensão de propriedades das figuras planas e espaciais nos espaços de duas e três dimensões. Optamos pelo *software* Winplot, que atende a essas características.

A dificuldade dos alunos em visualizar uma figura espacial pode ser atenuada com a exploração dessa figura em diferentes posições e com diversificação de possibilidades de representação. A integração da mídia computacional com o traçado utilizando lápis e papel traz a possibilidade de uma melhor compreensão das figuras nos vários espaços, possibilitando, ainda, uma melhor interpretação da equação referente à mesma.

A sequência didática

As sequências didáticas possibilitam ao estudante construir um conhecimento significativo, ao mesmo tempo em que desencadeia indagações, refutações e comparações, integrando as informações obtidas e descobertas.

Foram elaboradas, em nossa pesquisa, três sequências didáticas de atividades que articulam teoria e prática, propiciando a construção de significados, por meio de atividades de exploração e visualização, com base no esboço das superfícies no espaço – planos, cilindros e quádricas. Essas atividades contam com elementos teóricos de Zabala (1998), que retrata a sequência didática como uma maneira de encadear e articular as diferentes atividades ao longo de uma unidade didática, de forma que se tenha uma análise e possibilidade de intervenção para execução das mesmas.

As sequências foram organizadas da seguinte forma:

1. planos;
2. cilindros (quádricos e não quádricos);
3. quádricas;
 - 3.1 elipsoide / esferoide / esfera;
 - 3.2 parabolóide elíptico;
 - 3.3 hiperbolóide de uma folha / hiperbolóide de duas folhas;
 - 3.4 cone quádrico;
 - 3.5 parabolóide hiperbólico (sela).

O planejamento das atividades foi fundamentado destacando as possíveis interações que poderiam ser estabelecidas entre os sujeitos da pesquisa. As estratégias de solução para cada atividade foram construídas de forma a verificar a viabilidade de sucesso na execução das atividades, bem como, verificar as contribuições cognitivas que essas trariam aos sujeitos da pesquisa e que conjecturas poderiam ser levantadas e, posteriormente, validadas.

A sequência didática de atividades foi aplicada em um ambiente de sala de aula (1º período do curso de Licenciatura em Matemática, como parte das atividades constantes da disciplina Geometria Analítica), favorecendo a relação entre os sujeitos da pesquisa e o pesquisador, que também era professor da disciplina.

Em todas as atividades elaboradas, focalizamos o traçado das superfícies, buscando proporcionar ao estudante um amadurecimento na desenvoltura do trabalho nos espaços bi e tridimensional, diminuindo, a aparente insegurança evidenciada nos primeiros períodos do curso superior.

Exploramos com intensidade, nas atividades propostas, o significado dos parâmetros presentes nas equações, bem como a natureza das variáveis (livres ou não) e qual a interferência desses (parâmetros e variáveis) na representação gráfica da superfície.

A seguir, destacamos tópicos das atividades propostas:

Atividade 1: Planos

A metodologia utilizada consistiu em, inicialmente, trabalhar com a familiarização do espaço tridimensional, no que se refere à identificação dos octantes e, posteriormente, com a equação e o esboço de planos. São exploradas as variáveis, parâmetros e as características gerais da equação de plano. Sempre que possível, solicitamos que o estudante, inicialmente, fizesse o traçado dos gráficos de forma manual, considerando o espaço bidimensional (retas que definem os planos), para que, posteriormente, pudesse partir para representação no espaço tridimensional.

Por exemplo, para o traçado do gráfico de equação $x + y - 2 = 0$, estabelecemos a seguinte sequência:

Considere a equação $x + y - 2 = 0$

1. Como será a representação gráfica dessa equação considerando o \mathbb{R}^2 (plano xy)? Faça o esboço do gráfico.
2. Essa equação é uma equação de plano. Dê os valores dos parâmetros.
3. Vamos descobrir como se dá a representação gráfica no \mathbb{R}^3 . Siga os passos:
 - a) Complete a equação introduzindo a variável z .
 - b) Dê as coordenadas das interseções da reta com os eixos x e y no sistema tridimensional.
 - c) Esboce o gráfico, abaixo, usando os interceptos.

Figura 1: Sequência de construção do gráfico do plano de equação $x + y - 2 = 0$.

A seguir, propomos que o gráfico fosse plotado no *software* Winplot. Para tanto, foram dadas todas as orientações com relação aos comandos que poderiam ser utilizados, conforme destacamos:

- d) Plote o gráfico no Winplot:
 Abra o Winplot. Acione a opção JANELA \rightarrow 3-Dim
 Use a opção **EQUAÇÃO \rightarrow PLANO** e informe os parâmetros **a, b e c** e um ponto pertencente ao plano **(k, m, n)**. Altere os valores **t mín: -4 ; t máx: 4 ; u mín: -4 ; u máx: 4**

Figura 2: Sequência de construção do gráfico do plano de equação $x + y - 2 = 0$ no Winplot.

Apresentamos, a seguir, o resultado do comando executado na tela do Winplot:

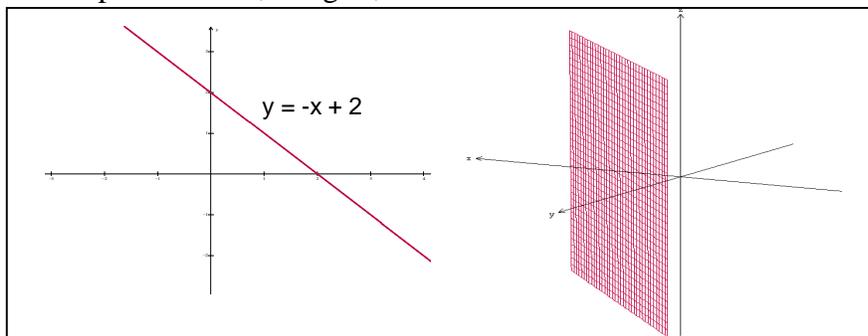


Figura 3: Representação gráfica da equação $x + y - 2 = 0$ nos espaços bi e tridimensional.

Também foram exploradas famílias de planos. Como exemplo, ilustramos os planos plotados pelos estudantes: $x + y + 7 = 0$; $x + y - 5 = 0$; $x + y - 10 = 0$ com a equação geral $x + y + d = 0$. Outra atividade proposta constituiu-se em plotar a figura composta pelos planos $x = 1$; $y = 1$; $z = 1$, no primeiro octante. A seguir, apresentamos os resultados na tela do Winplot:

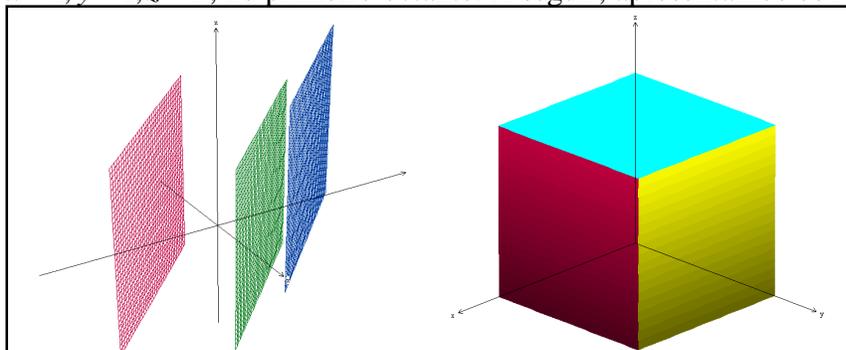


Figura 4: Planos paralelos e superfície composta por planos.

Atividade 2: Cilindros

Nesta atividade, também exploramos, de forma intensiva, a relação entre a equação da superfície e sua representação geométrica, uma vez que muitos estudantes apresentam dificuldades em lidar com as diversas representações gráficas e algébricas. A metodologia utilizada consistiu em, inicialmente, propor atividades que proporcionam o entendimento das definições iniciais sobre cilindro, seus elementos e classificação. Exploramos a classificação dos cilindros quanto à sua geratriz (retos ou oblíquos), quanto à forma de sua diretriz (parabólico, elíptico, circular, hiperbólico) e quanto à forma da sua equação: quádricos (apresenta pelo menos uma variável de 2º grau e as outras de 1º grau), não quádricos.

Apresentamos as equações de cilindros retos, para que o estudante fizesse o esboço dos gráficos manualmente, seguindo passos orientados e, em seguida, computacionalmente, usando o *software* Winplot.

Por exemplo, em uma das atividades, em que exploramos o cilindro circular, propomos, após a definição dessa superfície, o esboço do cilindro de equação $x^2 + y^2 = 4$, definindo os passos a serem seguidos para o desenvolvimento da atividade, conforme destacamos a seguir:

- Esboçar, no papel, o cilindro circular com geratrizes paralelas a z:
- Esboce o gráfico da curva de equação $x^2 + y^2 = 4$ no plano xy .
Que curva essa equação representa?
 - No \mathbb{R}^3 , esboce o cilindro, usando a curva dada no item anterior.
Observe que teremos como variável livre a variável z . Que equações representam o cilindro gerado?
 - Plote no *software* Winplot o cilindro esboçado anteriormente.
Use as opções: EQUAÇÃO → IMPLÍCITA → (Aumente as dimensões do BOX.) → OK
Clique em NÍVEIS → AUTO → MANTER MUDANÇAS.
 - Observando o cilindro traçado no Winplot, registre no papel os seguintes gráficos, no 1º octante:
 - Trace a **porção do cilindro** limitada pelo plano $z = 6$, no 1º octante.
 - Trace as curvas de níveis observadas.
 - Variando o valor de z , que tipo de figura obtém-se nos planos paralelos a xy ?
 - Trace o sólido resultante, no 1º octante, da intersecção do cilindro com o plano $z=6$. (Hachure com cores diferentes os contornos visíveis das superfícies).

Figura 5: Fragmento da atividade 2. Traçado do cilindro de equação $x^2 + y^2 = 4$.

Na sequência da atividade, solicitamos que a superfície fosse plotada no *software* Winplot. O estudante obteve como resultado as seguintes figuras:

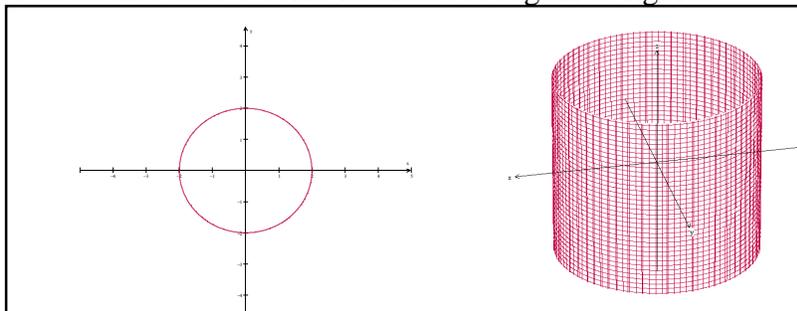


Figura 6: Representação gráfica da equação $x^2 + y^2 = 4$ nos espaços bi e tridimensional.

Ainda nessa atividade exploramos outros tipos de cilindros quádricos e não quádricos e, também, a porção dos cilindros limitados por planos, apenas no 1º octante, e ainda, as curvas de níveis paralelas aos planos coordenados e o sólido resultante, no 1º octante, da intersecção do cilindro com planos. O objetivo era que o estudante produzisse as seguintes imagens no *software* Winplot:

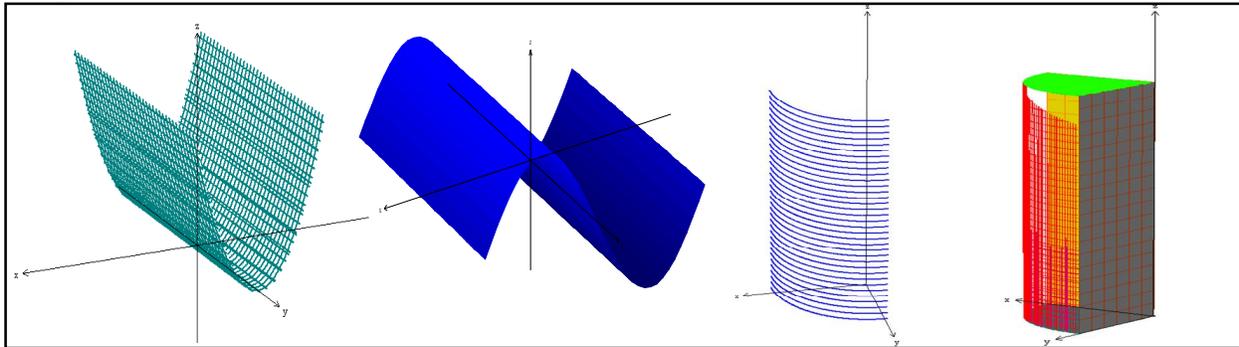


Figura 7: Representação gráfica de cilindros: parabólico (quádrico), senoidal (não quádrico) e das curvas de níveis do cilindro circular e do sólido formado por este, no 1º. octante, limitado pelo plano $z = 6$.

Dessa forma, possibilitamos ao estudante a generalização das equações dos cilindros e a análise da relação dessas com a sua representação geométrica, isto é, obter sua visualização pelo esboço da figura.

Atividade 3: Quádricas

Nesta atividade, exploramos a visualização das superfícies quádricas, as curvas de níveis e as seções transversais das superfícies, relacionando com as equações algébricas das mesmas.

Foram abordadas as quádricas: Elipsoide (esferóide e esfera), Hiperboloide de uma folha, Hiperboloide de duas folhas, Cone Quádrico, Paraboloides Elípticos e Hiperbólicos. A sequência de atividades foi desenvolvida, partindo do esboço das interseções da superfície com os planos coordenados, para se chegar ao esboço da superfície no espaço tridimensional e análise de possíveis superfícies de revolução (estudando a variação dos parâmetros das equações).

A metodologia utilizada nessa atividade consistiu em, inicialmente, destacar a definição das quádricas, abordando suas equações. Posteriormente, destacamos a classificação das quádricas, de forma que o estudante pudesse se familiarizar com os nomes das mesmas e sua visualização geométrica.

Como exemplo, apresentamos trecho da atividade em que propomos o esboço de um elipsoide:

Esboçar o elipsoide de equação: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{1} = 1$:

a) Esboce as interseções da superfície com os planos coordenados $xy(z = 0)$; $yz(x = 0)$; $xz(y = 0)$, de forma a obter as cônicas nos respectivos planos:

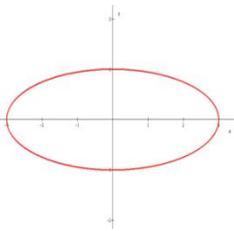
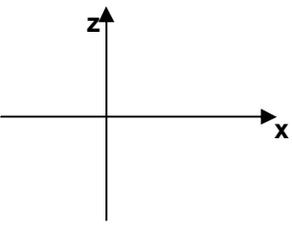
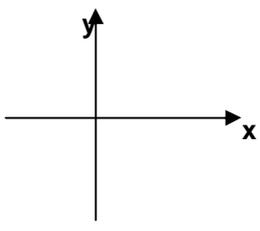
Para $x = 0$	Para $y = 0$	Para $z = 0$
Equação: $\frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{1} = 1$	Equação:	Equação:
Gráfico no plano: 	Gráfico no plano: 	Gráfico no plano: 
Cônica: elipse	Cônica	Cônica

Figura 8: Fragmento da atividade 3. Esboço do elipsoide de equação $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{1} = 1$.

Propomos a identificação das curvas de níveis e o esboço do elipsoide no 1º octante. Solicitamos a plotagem no Winplot, para que houvesse a comparação dos resultados das figuras obtidas. Apresentamos os possíveis resultados que os estudantes obtiveram, na tela do computador, ao seguir as orientações propostas:

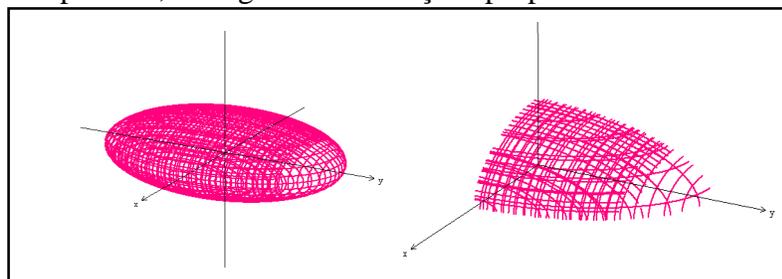


Figura 9: Representação gráfica do elipsoide de equação: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{1} = 1$.

No trabalho com as quádricas, os estudantes puderam esboçar com lápis e papel e visualizar as seguintes imagens plotadas no *software* Winplot, sempre utilizando as seções transversais e curvas de níveis:

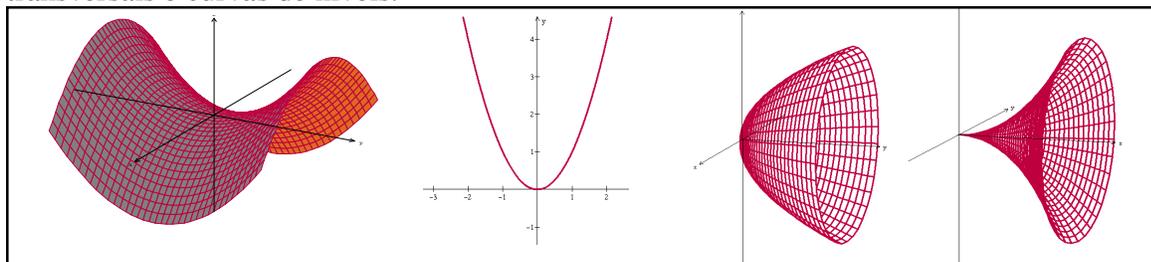


Figura 10: Representação gráfica do Parabolóide Hiperbólico de equação $z = y^2 - x^2$; parábola geradora de superfícies de revolução e superfícies de revolução geradas pela curva $y = x^2$.

Análise dos resultados obtidos

Analisamos as atitudes e habilidades adquiridas, pelos estudantes, na realização das atividades propostas, bem como, os registros realizados por esses na execução dessas atividades.

Percebemos que, no início do desenvolvimento das atividades, alguns estudantes apresentaram dificuldades com relação à utilização do *software* Winplot, por terem pouca familiaridade com o computador. No entanto, aos poucos foram se familiarizando com as ferramentas mais utilizadas, não prejudicando, desta forma, o desenvolvimento das atividades.

Ao esboçar as figuras, no papel, os estudantes tiveram um bom desenvolvimento. A seguir, apresentamos exemplos de esboços feitos pelos mesmos:

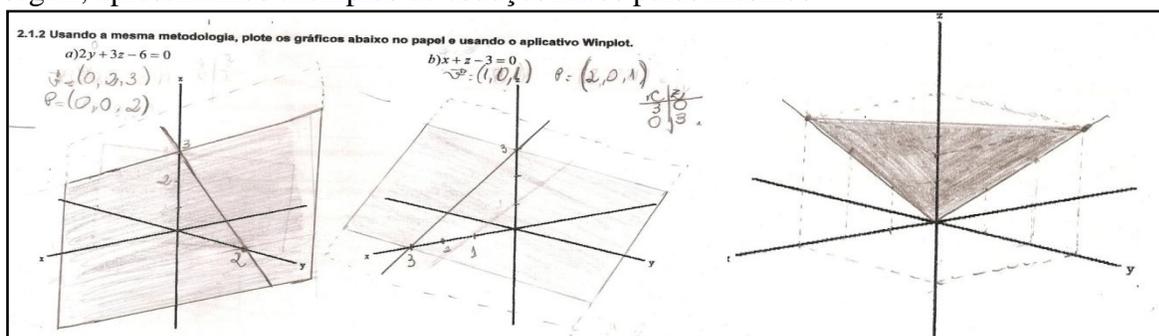


Figura 11: Protocolo extraído do caderno de atividades de um dos estudantes. Esboço de planos.

A maioria dos estudantes conseguiu fazer a relação entre a representação algébrica (análise dos parâmetros da equação) e geométrica.

Percebemos que os estudantes se sentiram mais seguros e mais dispostos a realizar o traçado de figuras geométricas. Em nenhum momento, reagiram negativamente às propostas de traçados das superfícies, o que normalmente acontece quando se trabalha com geometria: os estudantes, como não têm costume de construir esboços, preferem, muitas vezes, trabalhar apenas com a representação algébrica.

A seguir, apresentamos alguns protocolos referentes aos cilindros traçados pelos estudantes:

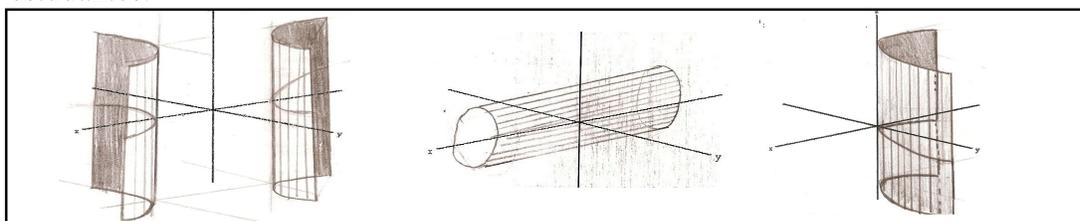


Figura 12: Protocolos extraídos dos cadernos de atividades dos estudantes. Esboço de cilindros.

Segue o esboço do parabolóide elíptico construído, pelos estudantes, a partir das figuras planas (parábolas e elipses) que o compõe, isto é, a partir das seções transversais dessa superfície, obtidas pela intersecção de planos com a mesma:

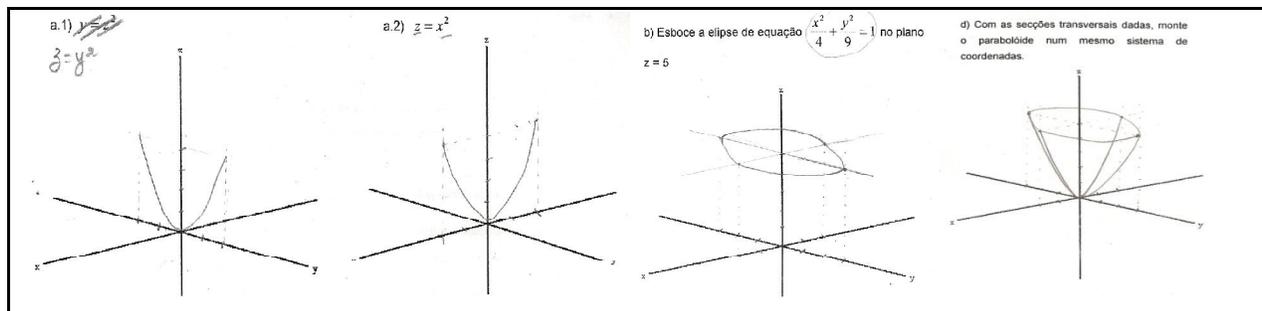


Figura 13: Protocolos extraídos dos cadernos de atividades dos estudantes. Esboço de um parabolóide.

Considerações Finais

O saber-fazer, explorado em diversas situações e com diferentes superfícies, relacionando a equação (álgebra) à figura (geometria), favoreceu o desenvolvimento do pensamento relacional e uma melhor compreensão conceitual em Geometria Analítica, a qual integra álgebra com geometria, equação com a figura.

Zabala (1998), exemplificando e estruturando as unidades da sequência didática, propõe o diálogo professor/aluno para discussão de questões relacionadas ao tema estudado, o que ocorreu na aplicação das atividades, quando instigamos o estudante a usar sua intuição, fazer conjecturas e buscar sua elaboração mental da imagem gráfica, que deveria esboçar no “papel” e plotar pelo *software*. Percebemos que a visualização espacial, por parte dos estudantes, foi melhorando no desenvolvimento das atividades.

Consoante ao que Machado (2008), Barbosa(2009) e Gravina (1993) explicitam, a visualização é o desenvolver da habilidade de criação de imagens mentais, o que foi bastante explorado nas atividades propostas. Verificamos que ao tratar a informação figural, o estudante conseguiu conceituar, através de relações abstratas, representações em termos visuais.

A utilização das seções transversais e curvas de níveis das superfícies contribuem para a visualização das mesmas, uma vez que o estudante parte da representação plana para a representação espacial. Isso fez que a dificuldade de esboçar gráficos em três dimensões fosse minimizada ao longo das atividades.

A articulação entre as representações algébrica e geométrica contribuiu para uma abordagem integrada entre Álgebra e Geometria, conforme destaca o estudante com a fala registrada: “o aprendizado foi um dos fatores mais importante para mim. Apesar das minhas figuras (*sic*) não saírem bonitas eu consegui notar a diferença de cada figura, seja ela um cilindro, elipse, cone ou hipérbole, pois as equações são diferentes.”

A interação entre as mídias possibilitou uma diversificação na sequência didática proposta. Segundo Valente (1993) e Moran (2000), a informática não requer exclusividade nos processos didáticos, mas alternância entre aulas expositivas e atividades com as mídias.

A aplicação das atividades também revelou o grau de dificuldades dos estudantes em relação a tópicos da geometria básica, evidenciando o que foi também retratado nas pesquisas de

Pavanello (2002) e Gravina (1996). As atividades elaboradas necessitavam de conhecimentos prévios, isso causou algumas dificuldades para determinados estudantes.

A pesquisa, trazendo a metodologia do esboço das superfícies com as seções transversais e as curvas de níveis, definiu uma série de itinerários e passos que o estudante trabalhou e, dessa forma, pelos resultados alcançados, foi conseguida uma aprendizagem mais efetiva.

Bibliografia e referências

- Barbosa, Sandra Malta. (2009). Tecnologias da Informação e Comunicação, função composta e regra da cadeia. 2009. *Tese (Doutorado)*. Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, SP.
- Dante, Luis R. (1988). Criatividade e resolução de problemas na prática educativa matemática. *Tese (Livre Docência)*. Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, SP.
- Gravina, Maria Alice. (1996). Geometria dinâmica: uma nova abordagem para o aprendizado da geometria. *VII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação*. Anais... Belo Horizonte. 1-13.
- Lorenzato, Sergio. (1995). Por que não ensinar geometria? *A Educação Matemática em Revista*. Blumenau, ano 3, n. 4, 3-13.
- Machado, Rosa Maria. (2008). A visualização na resolução de problemas de cálculo diferencial e integral no ambiente computacional MPP. *Tese (Doutorado)*. Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP.
- Moran, José Manuel. Ensino e aprendizagem inovadores com tecnologias audiovisuais e telemáticas. (2000). In: Moran, José Manuel; Masseto, Marcos T; Behrens, Marilda Aparecida. *Novas Tecnologias e Mediação Pedagógica*. 8. Ed. Campinas, São Paulo: Papirus, Cap. 1. 11-66.
- Nasser, Lílian. (1994). Usando a teoria de Van Hiele para melhorar o ensino secundário de geometria no Brasil. *Eventos (Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais)*, nº04, 2ª parte.
- Nasser, Lílian; Sant'anna, Neide da Fonseca Parracho. (2004). Geometria segundo a teoria de Van Hiele. *Projeto Fundação*. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Rio de Janeiro, 4. Ed.
- Pavanello, Regina Maria. (1993). O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e conseqüências. *Revista Zetetiké*, Universidade Estadual de Campinas, ano 1, n. 1, 7-17.
- Perez, Geraldo. (1991). Pressupostos e reflexões teóricos e metodológicos da pesquisa participante no ensino de geometria para as camadas populares. *Tese (Doutorado)*. Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, Campinas, SP.
- Valente, José Armando. (1993). Computadores e Conhecimento: repensando a educação. *Gráfica Central da Universidade Estadual de Campinas*.
- Valente, José Armando. (1993). Computadores e Conhecimento: repensando a educação. *Gráfica Central da Universidade Estadual de Campinas*.
- Viana, Odaléa Aparecida. (2000). O conhecimento geométrico de alunos do CEFAM sobre figuras espaciais: um estudo das habilidades e dos níveis de conceitos. *Dissertação (Mestrado)*. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Educação. Campinas, SP.
- Zabala, Antoni.(1998). A Prática Educativa: unidades de análise. In: Zabala, Antoni. *A prática educativa*. Porto Alegre: ArtMed Editora.

* Agradecemos o apoio financeiro da FAPEMIG -Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais.