Resolución de problemas y modelización geométrica en la formación inicial de profesores.

María Aravena Díaz
Facultad de Ciencias Básicas, Departamento de Matemática
Universidad Católica del Maule
Talca, Chile
maravena@ucm.cl

Resumen

La ponencia se enmarca en una investigación más amplia en el marco del Proyecto **FONDECYT 1090617**, que se encuentra en ejecución, y fue financiado por el proyecto FONIDE F-104987. Consiste en un experimento de aula, en la línea de la resolución de problemas a través de la modelización, cuyo objetivo consistió en determinar las capacidades que alcanzan los alumnos de tercer año de Pedagogía en Matemática, cuando se enfrentan a tareas de modelaje de situaciones del mundo real y de las ciencias. La metodología de trabajo es de corte cualitativo, donde se levantaron categorías de análisis para reconocer las capacidades de los alumnos en tareas de modelaje. A nivel de resultados, se puede concluir que, los futuros docentes: (1) desarrollan la capacidad crítica para enfrentarse al problema, identificando datos condiciones y restricciones; (2) formulan el modelo en términos matemáticos; (3) construyen una estructura conceptual potente al interrelacionar los conceptos y procesos matemáticos; (4) comunican los procesos que les permite modelar la situación.

Palabras claves: modelización matemática, resolución de problemas, formación inicial.

I. La problemática actual.

A pesar de los cambios curriculares que se han realizado en la última década, la formación matemática en Chile, en todos los niveles, salvo excepciones, está basada en un trabajo eminentemente algorítmico con escasas aplicaciones en las diversas áreas del conocimiento e incluso existe una parcelación entre la propia matemática (Aravena, Caamaño & Giménez, 2008). Esta forma de trabajo, arraigada en los sistemas educativos chilenos, ha tenido como consecuencia que los estudiantes no logran desarrollar capacidades y competencias requeridas para enfrentarse a una sociedad en cambio permanente. Las críticas por esta problemática se han enfocado a la formación inicial del profesorado, concentrando la mayor atención la poca capacidad de innovación de los formadores de formadores, donde se coloca de manifiesto los problemas más relevantes entre la que destacamos: (1) escaso trabajo basado en la resolución de

problemas, lo que tiene como consecuencia que los futuros profesores no logran establecer la interconexión de la matemática con las otras áreas del conocimiento; (2) escasa interrelación entre la propia matemática, en particular geometría y álgebra (Díaz & Poblete, 1998; Aravena & Caamaño, 2007; Aravena, Caamaño & Giménez, 2008; Aravena & Caamaño, 2008); (3) escasa interrelación con los modelos de enseñanza y las corrientes pedagógicas que no permiten a los futuros docentes preparar situaciones de enseñanza de acuerdo a los contextos en los cuales se va a impartir y (4) escaso conocimiento de los procesos histórico-epistemológicos de la disciplina, que no les permite comprender la dinámica del desarrollo científico.

Al mismo tiempo, la literatura especializada da cuenta que uno de los temas que concita el interés, en los últimos años, ha sido la resolución de problemas a través de la modelización, puesto que ha permitido romper con la atomización de los curriculum tradicionales de matemática. Al respecto, tal como lo plantea Niss (2001); Gómez(1998), Alsina(1998) y Aravena (2001) hacer un trabajo matemático basado en la resolución de problemas a través del modelaje, posee una serie de ventajas, entre las que se destaca: el desarrollo de la capacidad de resolver problemas y la creatividad; prepara a los alumnos a usar la matemática, desarrolla la capacidad crítica de la matemática en la sociedad, permite una visión completa de ésta y ayuda a la comprensión de los conceptos y métodos. Desde el punto de vista del aprendizaje, la enseñanza a través de la acciones de modelaje es más conveniente para un buen desempeño matemático posterior, porque es a partir de la realización de problemas concretos complementados con un tratamiento teórico, donde se modelan los nuevos objetos matemáticos, permitiendo con el tiempo introducirse en situaciones cada vez más abstractas (Niss, 1989; Gómez, 1998; Aravena, 2001; Aravena, Caamaño & Giménez, 2008; Aravena & Caamaño, 2009).

En Chile hay una desatención al trabajo de modelos y aplicaciones en todos los niveles de enseñanza (Aravena & Caamaño 2009), coincidiendo con los planteamientos de Blomhøj, (2009), quien coloca de manifiesto que en la formación de profesores esta metodología de trabajo es poco considerada y se requiere de investigaciones que den cuenta de la potencia del modelaje en este nivel. Al respecto, la enseñanza de los formadores de formadores sigue estando cargada de estructuralismo, con escasas aplicaciones, con lo cual implementar este tipo de trabajo, puede ser un medio potente en la formación de profesores, permitiendo que en su futuro laboral ayude a los alumnos del sistema educativo a superar las dificultades y poder enfrentarse como ciudadanos a una sociedad cambiante, en especial para los estudiantes más desfavorecidos socioculturalmente (Abrantes, 1994, Alsina, 1998, Niss, 2001, Aravena, 2001).

En este contexto, hemos apostado por revertir la situación actual, incorporando en la formación inicial de profesores, como elemento clave, la modelización de situaciones de tal manera de desarrollar capacidades y competencias necesarias para enfrentarse a un mundo cada vez más matematizado. En efecto, las necesidades actuales en la formación de profesores de matemática deben considerar los destinatarios, por ello, un trabajo basado en la modelización de situaciones permitirá el desarrollo de capacidades y competencias para enfrentar en forma eficiente la problemática de aula, tanto en sus prácticas como en su futuro profesional docente.

Problema de investigación. A partir de la problemática descrita en el apartado anterior, nos propusimos el siguiente problema de investigación:

¿Qué capacidades y habilidades matemáticas desarrollan los alumnos de pedagogía en matemática cuando son enfrentados a la resolución de problemas a través de la modelización de situaciones?

Para dar respuesta al problema los objetivos de la investigación son:

(1) Analizar las componentes teóricas y didáctica de un trabajo matemático basado en la modelización de situaciones. Analizar aquellas que acentúan una vertiente formadora para el trabajo matemático en el contexto chileno.

(2) Seleccionar problemas que apunten a modelar situaciones reales y de las ciencias con el propósito de implementarlos a un grupo de estudiantes de Tercer año de Pedagogía en Matemática para potenciar su formación.

(3) Analizar cualitativamente las producciones de los estudiantes con el propósito de reconocer las capacidades desarrolladas cuando son enfrentados a problemas de modelización ya sea en contextos reales o de las ciencias.

II. Antecedentes.

Uno de los temas que ha concitado el interés nacional en todas las esferas educativas está referido a la formación inicial del profesorado, donde se coloca en evidencia que la formación de profesores de matemática, salvo contadas excepciones, sigue estando basada en un esquema tradicional, sobrecargada de estructuralismo, de abstracción y de parcelación del conocimiento con escasas aplicaciones que no permiten el desarrollo de capacidades y competencias concretas de visualización, modelización e interpretación, elementos esenciales en la formación matemática.. Esta forma de enseñanza repercute posteriormente en su trabajo profesional, puesto que siguen manteniendo la forma tradicional como las que aprendieron durante su formación, generando consecuencias negativas en la formación del alumnado de secundaria.

Esta problemática vigente en Chile, y que tiene sus raíces en la formación del profesorado a partir de la década de los 60, ha sido compleja y difícil de revertir tanto a nivel conceptual como metodológico. En efecto, esta forma de enseñanza arraigada en todos los niveles de enseñanza ha tenido consecuencias negativas para la formación de los futuros docentes puesto que no se están diseñando actividades que son consideradas aspectos claves de la matemática y que permiten el desarrollo capacidades y habilidades de alto nivel. Entre las más importantes destacamos: (1) ***la visualización*** y en este sentido son numerosas las investigaciones que confirman la importancia de ésta y la intuición geométrica en la comprensión y tratamiento de problemas matemáticos (Presmeg, 1986; Bishop, 1989; Clements y Battista, 1992; Dreyfus, 1991; Zimmermann & Cunningham, 1991; Hitt, 1998); (2) ***la modelización*** de situaciones que ha sido ampliamente investigada mostrando que cuando es incorporada en el aula, permite el desarrollo de capacidades de alto nivel, necesarias para enfrentar un mundo en cambio permanente (Niss, 1989; Keitel, 1993; De Lange, 1996; Niss, 2001; Aravena & Caamaño, 2007; Gómez, 2007; Aravena, Caamaño & Giménez, 2008; Aravena& Caamaño, 2009; Barbosa, 2009; Blomhøj & Carreira, 2009); (3) ***las representaciones***, aspecto primordial en el trabajo matemático, ya que las investigaciones señalan que en el trabajo con problemas se vuelve central el tránsito por diferentes sistemas de representación (Janvier, 1987, Font, 2001); (4) **procesos de pensamiento y razonamiento matemático**, aspectos claves para la comprensión de los

problemas, los procesos de resolución y la comunicación matemática de éstos (Aravena, Caamaño & Giménez, 2008) y (5) la ***componente histórica-epistemológica de conceptos y procesos matemático*** porque permite comprender en forma profunda las dificultades y obstáculos que se han dado en el desarrollo de los conceptos y procesos matemáticos, así como captar los principios esenciales y los procesos dinámicos de la actividad científica. En medio de este escenario, la formación de los futuros profesores es de vital importancia y se transforma en el núcleo de interés para mejorar la calidad de la enseñanza en los niveles de secundaria.

Al mismo tiempo, numerosas son las investigaciones en Didáctica de la Matemática que dan cuenta que uno de los temas que ha concitado el interés en los últimos años es el diseño de actividades basada en la modelización, constatando que es una vía prometedora tanto para enfrentar las dificultades y deficiencias, como para elevar la calidad de los aprendizajes matemáticos (Aravena, 2001). En diferentes países y condiciones, su inclusión en el currículo, ha permitido desarrollar capacidades de alto nivel, colocándose en evidencia que, el modelaje de situaciones favorece la comprensión de los conceptos y métodos matemáticos, aspectos relevantes para una sociedad en la que los ciudadanos van a ser enfrentados a resolver problemas o proponer nuevos problemas (Niss, 1992; Keitel, 1993; Matos, et.al**,** 1996; William & Ahmed, 1997; Aravena, 2001; Blomhøj&Carreira, 2009; Aravena, 2007).

Los argumentos básicos para determinar el modelaje como una forma de enseñanza y que son los pilares de esta metodología, los podemos encontrar en las propuestas de Niss (1989) y seguidores, donde se destaca la importancia de incorporar en las aulas este tipo de trabajos, presentando una serie de ventajas frente a otras metodologías, puesto que: permite desarrollar la capacidad de resolver problemas y la creatividad; prepara a los alumnos a usar la matemática; desarrolla la capacidad crítica de la matemática en la sociedad y permite una visión completa de la matemática y ayuda a la comprensión de los conceptos y métodos y su utilización práctica, desarrolla la capacidad de analizar e interpretar ejemplos actuales a través de la matemática y ayuda además a desarrollar habilidades comunicativas, mediante la explicitación de ideas, la comunicación de métodos y justificación de procesos (De Lange, 1998; Alsina, 1998; Niss, 2001; Aravena & Giménez, 2002; Aravena, 2007; Caamaño & Giménez, 2008; Aravena & Caamaño, 2009). Las investigaciones en esta línea colocan en evidencia que, en la actualidad, la matemática aplicada y la matematización de situaciones han tenido un crecimiento acelerado en todas las áreas del conocimiento. Por ello, se hace imprescindible manejar conceptos matemáticos relacionados con la vida diaria y con las otras ciencias, para entender los diferentes fenómenos sociales (De Guzmán, 1974; Gómez, 2007; Aravena, 2001; Aravena, Caamaño & Giménez, 2008; Aravena & Caamaño, 2009).

Tal como lo menciona Blomhøj, (2009), durante las últimas dos décadas, la introducción de modelos matemáticos y aplicaciones es, probablemente, junto con la introducción de tecnología de la información las reformas más importantes de los planes de estudio en matemáticas en todo el mundo mostrando que la investigación sobre modelización matemática ha tenido gran impacto en las prácticas de enseñanza de las matemáticas. Además, los planes de estudio de las reformas curriculares en muchos países occidentales, especialmente en la educación secundaria han hecho hincapié en trabajar en las clases de matemática a través de la modelización matemática, considerándose un elemento importante para una puesta al día de las matemáticas. Sin embargo, Blomhøj (2009) plantea que a pesar de las investigaciones reportadas que dan cuenta de la importancia de introducir en el aula un trabajo matemático

basado en la modelización, cuando se trata del nivel de la práctica docente, sigue siendo una cuestión pendiente.

En este contexto, en Chile hay una desatención al trabajo de modelos y aplicaciones en todos los niveles de enseñanza en particular en la formación de profesores esta metodología de trabajo es poco considerada, con lo cual implementar un trabajo matemático basado en situaciones de modelaje, puede ser un medio potente en la formación de profesores, permitiendo que en su futuro laboral ayude a los alumnos del sistema educativo a superar las dificultades y obstáculos para poder enfrentarse como ciudadanos a una sociedad cambiante, en especial para los estudiantes más desfavorecidos socioculturalmente (Aravena, 2001; Aravena & Caamaño, 2007, Aravena, Caamaño & Giménez, 2008; Aravena & Caamaño, 2009).

III. Metodología.

El enfoque de la investigación fue de corte cualitativo, para lo cual se diseñó e implementó en el aula: (1) Trabajo con pequeños problemas que apuntaron a modelizar situaciones para encontrar una función matemática que se aproxime a la situación, (2) problemas en contextos susceptibles que ocurran en la realidad de tal manera de analizar en los alumnos como van modelando situaciones geométricas (Aravena & Giménez, 2002).

3.1. Propuesta integradora. En el diseño de la propuesta hemos considerado las investigaciones que nos muestran que el problema de fondo de cómo impartir la enseñanza reside en las condiciones de aprendizaje adecuadas para que los esquema de conocimiento, que de todas maneras construye el alumno, evolucionen en un sentido determinado (Jorba,1996, Davydov, 1998). Desde este punto de vista, en el Cuadro 1 definimos las bases de la enseñanza que fue tomado de Aravena & Caamaño (2009) que permitió organizar el diseño y su implementación.

Formación del **Propósito del aprendizaje**	Confrontar a los estudiantes con	Problemas del entorno donde el conocimiento de que disponen no es suficiente para soluciones inmediatas.
Orientación hacia la ***relación de la estructura interna del objeto***	Puedan producir generalización teórica	A través de la Modelización de una situación.
Orientado hacia la formación de ***ciertas competencias y destrezas matemáticas necesarias***.	Sirve de puente para	aproximarse al objeto de aprendizaje de la matemática, permite reconocer la aplicabilidad de los conceptos
Orientado hacia la ***propia actividad de los estudiantes***.	Trabajo grupal permite	Aprendizaje independiente y eficiente. la cooperación y la comunicación permite un aprendizaje efectivo.
Orientado de lo ***concreto a lo abstracto***.	análisis y exploración permite	generalización sobre el objeto que ha estudiado

***Cuadro 1*. Bases de la enseñanza para el trabajo de modelización**

Planificación trabajo de clases. Incorporar en las clases problemas de modelización permite apoyar el trabajo que los estudiantes para la realización del problema en contexto real. En este punto hemos seguido las recomendaciones de Williams y Ahmed (1997), quienes plantean que las ideas de modelaje se pueden introducir en la clase de manera que los estudiantes vayan

regulando el proceso, en vista a la realización de la tarea de modelaje. En el cuadro 2, mostramos la organización de las clases.

ACTIVIDAD	Propósito del aprendizaje	Habilidad a desarrollar
Apoyo al trabajo de modelización	Crear atmósfera de investigación Discusión de modelos	Desarrollo de pensamiento matemático
Trabajo con modelos	Interpretación del problema. Matematización Verificación y validación Análisis y aplicación Comunicación matemática	Afianzar contenidos Elaboración de procesos de resolución
Informes escritos y orales	Producción matemática del trabajo realizado	Comunicación de métodos y argumentos Discusión matemática

Cuadro 2. **Etapas de la planificación de las clases**

3.2. Muestra. Planificación de los grupos de trabajo

La muestra corresponde a 10 grupos de trabajo de tercer año de la carrera de pedagogía en matemática, que cursan la asignatura de didáctica del álgebra y la geometría. Cada grupo de 4 y 3 alumnos se les presentó 10 problemas en los cuales hay involucrado un proceso de modelización. Esta asignatura tiene como objetivo principal trabajar la resolución de problemas en diferentes contextos, especialmente situaciones del ámbito escolar donde se van a desempeñar en su futuro profesional. Para efectos de esta presentación, se mostrarán los resultados y análisis de un grupo de trabajo que permite observar cómo se enfrentan a la modelización de una situación geométrica en contexto real.

3.3. Métodos e instrumentos de análisis.

Categorías de análisis. Se realizó un *análisis interpretativo del contenido* que permitió reconocer el progreso real en cada una de las etapas del trabajo de modelaje. Para ello, se diseñaron a priori y se consolidaron en un segundo nivel de análisis las siguientes categorías:

Categoría 1: Interpretación del problema. Identificando datos, condiciones y restricciones. Haciendo supuestos de diversas hipótesis, consideración de la situación fragmentada o bien se suponen despreciables ciertas variables, utilización de diversos sistemas de representación.
Categoría 2: Matematización. Traducción en términos matemáticos. Que incorpora la descripción de relaciones matemática que interpretan el proceso, reconocimiento de las variables que intervienen en el problema. Se aplican las propiedades y algoritmos adecuados que resuelven el problema y se consigue una formulación matemática del problema.
Categoría 3. Verificación y validación. Se trata de reestudiar los resultados numéricos obtenidos en términos del problema propuesto inicialmente, interpretarlos para ver si hay diversas soluciones, cual es la más adecuada al problema. Determinado si el modelo matemático satisface las condiciones iniciales del problema. Evalúa el modelo con nuevos datos del dominio. Concluyendo justificadamente la validez del modelo.
Categoría 4. Análisis, aplicación y proyección del modelo. Determinar las fortalezas y limitaciones del modelo. Identificando posibles aplicaciones del modelo. Identificando posibles generalizaciones del modelo.
Categoría 5. Comunicación matemática. Donde incorpora la comunicación de métodos y procesos que incorpora la utilización de lenguaje formal en la redacción de los procesos y resultados (simbología), Utilización de un lenguaje adecuado de acuerdo al contexto; la comunicación de

resultados donde se incorpora la explicitación de los resultados y conclusiones de acuerdo a las condiciones y en el contexto del problema.

IV. Resultados.

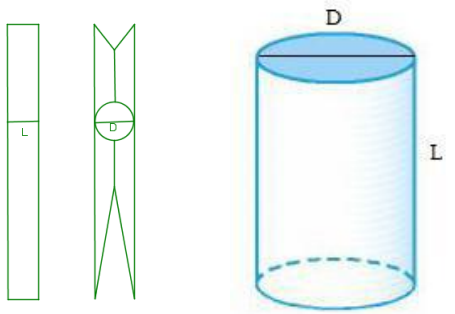
A continuación damos cuenta de los resultados extraídos de la experiencia, de acuerdo a las categorías de análisis propuestas en el estudio. Para ello, se irá ejemplificando las distintas etapas del trabajo de modelaje a partir de las producciones de un grupo de trabajo.

El problema que trabajó este grupo se trataba de construir un modelo geométrico de la espiral de la pinza de tender ropa (ver figura 1)

Respecto de la ***interpretación de datos condiciones y restricciones***, se observa en la producción la forma como se enfrentan al problema, donde se apoyan en diferentes esquemas de tal manera de visualizar la situación, se identifican condiciones y restricciones que presentan el problema y se establecen relaciones geométricas.

Se observa en la figura 1, cómo se asocia al dibujo de la pinza de ropa una transferencia de un tipo de representación visual a otra que corresponde al cilindro.

Si pensamos en una pinza de ropa cualquiera que contenga una espiral en su estructura podemos apreciar la siguiente arquitectura de cada uno de ellos:



Ahora por el interior de la pinza podemos ver que pasa un cilindro de diámetro "D" cm. y altura "L" cm.

***Figura 1*: interpretación de datos**

Antes de entrar al proceso de matematización, podemos observar que el dibujo lo han identificado en el plano, lo que podríamos llamar un "cambio dimensional", para comprender el comportamiento del fenómeno a modelar. A partir de ello, realizan un análisis de casos particulares, estableciendo una proyección de lo que pretenden, como se puede observar en la figura 2.

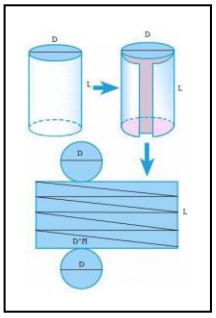


***Figura 2*. Red plana del cilindro**

Matematización

Una vez distinguidas las condiciones, restricciones y las variables entran al proceso de matematización. Tal como se observa en la figura 3, en esta etapa se plantean las relaciones matemáticas que interpretan el proceso. Se puede observar además, las argumentaciones y explicaciones que presentan en el discurso, lo que permite justificar las ecuaciones matemáticas que colocan en juego. En esta etapa, se desarrollan los algoritmos, se utilizan propiedades matemáticas y cálculos, lo que les lleva a la formulación del modelo en términos matemáticos. En todo momento dan explicaciones y justifican cada uno de los pasos. Se destaca la formulación del modelo en términos matemáticos, como elemento central en esta etapa, lo que se puede observar en la figura 4.

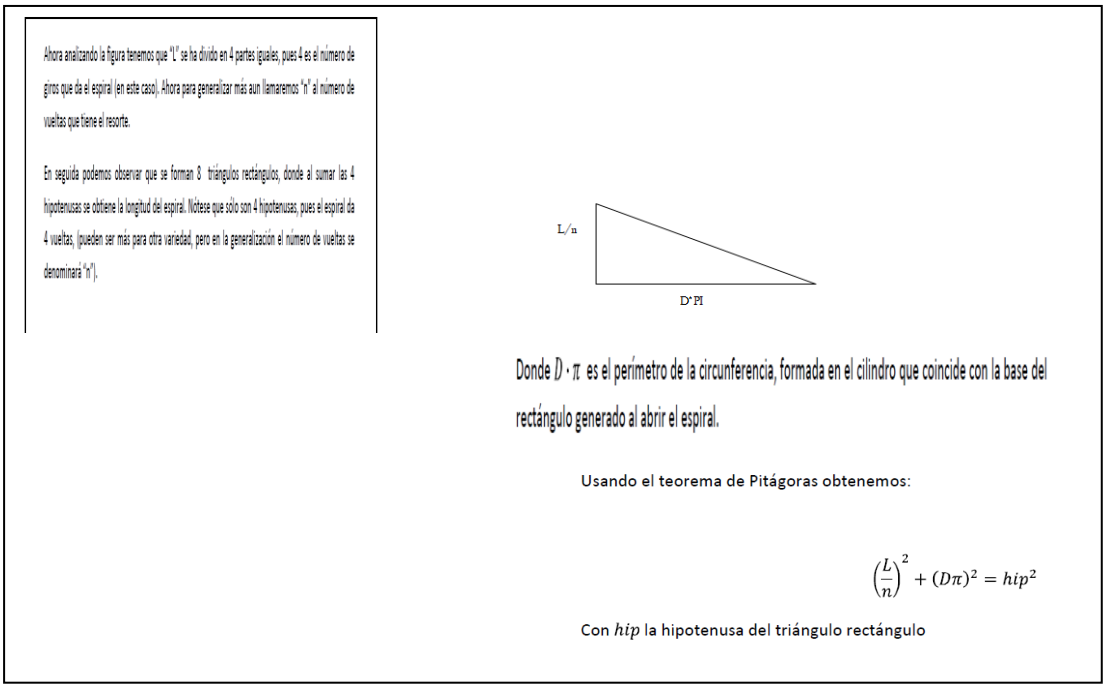


***Figura 3*: Matematización del problema**

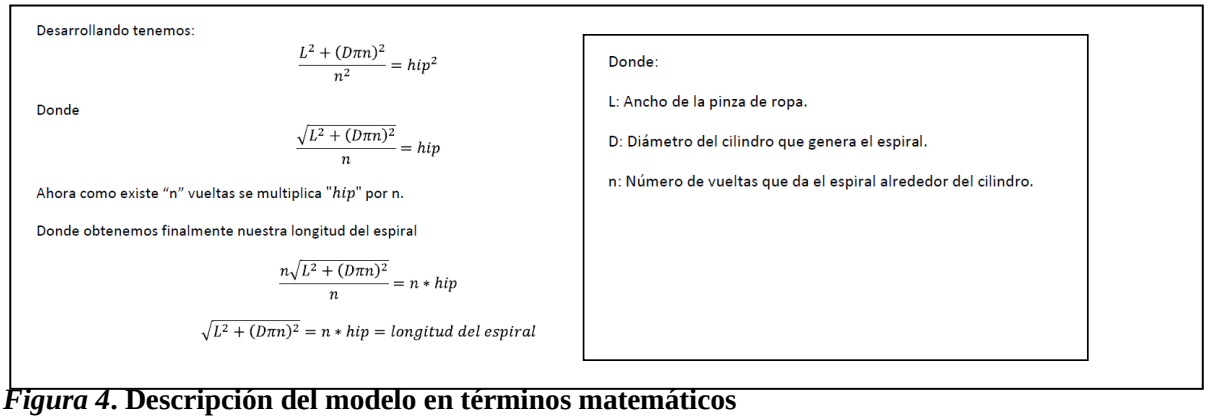


***Figura 4*. Descripción del modelo en términos matemáticos**

Respecto de la ***validación y verificación***, se presentan dificultades en el alumnado, a pesar que hacen un estudio de los resultados numéricos en términos particulares no hay un estudio de las diversas soluciones de tal manera de verificar si la solución obtenida es la adecuada al problema inicial o si satisface las condiciones iniciales, asimismo no realizan una evaluación del modelo con nuevos datos para justificar la validez de éste. Esta dificultad es frecuente en los grupos de trabajos producto de una tradición en la enseñanza de la matemática en los distintos niveles de enseñanza, donde el alumnado sólo le interesa dar respuesta a lo pedido que es formular el modelo, no así justificar su validez.

Respecto del ***análisis, aplicación y proyección del modelo***, el grupo de trabajo, intenta posibles generalizaciones del modelo, y en ninguno de los grupos se realizó un análisis de las fortalezas y limitaciones de éste,. Sin embargo, se destaca el trabajo matemático basado en la

modelización de situaciones, ya que permite a los alumnos utilizar la matemática en contextos reales. Respecto de la comunicación matemática, donde se valora el lenguaje adecuado a la temática, la explicitación de procesos y de resultados, este grupo en particular y el alumnado en general, presenta un lenguaje acorde al problema, explicita los procesos seguidos y los resultados, donde las mayores dificultades se presentan en dar respuesta en el contexto del problema. Estos resultados coinciden con las investigaciones de Alsina(1998), Aravena(2001) y Aravena, Caamaño y Giménez(2008), quienes colocan en evidencia, la dificultad de dar respuesta la problema real, más bien dan respuesta al problema matemático.

Por último, la comunicación matemática de métodos y procesos, como elemento clave en la modelización matemática, se observa en las producciones anteriormente señaladas que el grupo de alumnos comunica, justifica y argumenta muy bien los procesos de organización de datos, condiciones y restricciones, así como también en los procesos de matematización, pero este elemento es débil cuando se trata de la validación, verificación y análisis, lo cual es coincidente con las investigaciones de Alsina(1998), Aravena &Caamaño(2007), quienes colocan en evidencia la necesidad de colocar el énfasis en estos aspectos en el trabajo matemático.

V. Conclusiones e implicaciones didácticas.

Dentro de los principales hallazgos de esta innovación en la formación de los futuros docentes podemos destacar. (1) El trabajo con situaciones de modelaje, que han desarrollado los futuros docentes, permitió una comprensión más profunda de los conceptos y procesos matemáticos, dando significado a lo que es hacer matemática, comprendiendo la utilidad de los conceptos y procesos matemáticos en situaciones (Blomhøj, 2000, Niss, 2001, Gómez, 2007, (Niss,1989; Aravena, Caamaño & Giménez, 2008), (2) la integración de los conocimientos con las diferentes áreas del saber crea un entorno de aprendizaje más interdisciplinar, evitando que los temas matemáticos estén desvinculados y descontextualizados; (3) permite a los futuros docentes reconocer que la enseñanza y el aprendizaje de la matemática debe considerar que ésta se tiene que interrelacionar con otras disciplinas, tendiendo a la generalización, al desarrollo del pensamiento y razonamiento y que se tienen que enseñar a partir de problemas que revistan interés para sus interlocutores. (4) la comunicación matemática de tal manera de analizar como los estudiantes están estructurando su marco conceptual. La importancia de comunicar y argumentar permite construir los vínculos entre las nociones informales e intuitivas, entre el lenguaje abstracto y simbólico y establecer la conexión entre las representaciones físicas, gráficas, simbólicas verbales y mentales de las ideas matemáticas.

VI. Limitaciones del estudio.

(1) La formación teórica-formal y el escaso trabajo con problemas en la formación del profesorado, dificultó la puesta en práctica de la investigación, ya que el alumnado no estaba acostumbrado a enfrentarse con problemas en las cuales hay que tomar decisiones.
(2) La cantidad de alumnos por curso dificultó al profesor-investigador al apoyar a 10 grupos de trabajo en temas diferentes.

VII. Proyecciones.

Aunque no es posible establecer generalizaciones, sería de sumo conveniente replicar esta investigación en diferentes contextos del profesorado, especialmente en Latinoamérica, para

analizar las capacidades que desarrollan, las dificultades y obstáculos que se manifiestan cuando se enfrentan a la resolución de problemas de modelaje.

VIII. BIBLIOGRAFÍA.

Alsina, C. (1998). *Neither a microscope nor a telescope, just a mathscope*. Proceed. ICTMA-1997.

Aravena, M. (2001): *Evaluación de proyectos para un curso de álgebra universitaria. Un estudio basado en la modelización polinómica*. Tesis Doctoral no publicada. Departament de Didáctica de la Matemática i de les Ciències Experimentals. Universitat de Barcelona, España.

Aravena, M. & Giménez, J. (2002). Evaluación de procesos de modelización polinómica mediante proyectos. Monografía modelización y matemáticas. *Revista UNO. Didáctica de las Matemáticas. 31*, 44-56.

Aravena, M.; Caamaño, C. (2007). Modelización matemática con estudiantes de secundaria de la comuna de Talca-Chile. *Revista Estudios Pedagógicos*. *33*, 7-25

Aravena, M; Caamaño, C. & Giménez, J. (2008): Modelos matemáticos a través de proyectos., *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. V11, número 1*

Aravena, M.; Caamaño, C. (2008). The Method of Problem Solving based on the Japanise and Polya´s Models. A Classroom Experience in Chilean schools. *In Research and Development in Problems Solving in Mathematics Education. Topic Study Group 19.* (pp. 71-80). ICME-11. Monterrey. México.

Aravena, M; Caamaño, C. (2009). Mathematical Models in the secondary Chilean education. In Blomhøj, M. & S. Carreira, (eds.) (2009). *Mathematical applications and modeling in the teaching and learning of mathematics.* Proceeding from topic study group 21 at the 11th International congress on Mathematical education in Monterrey, México, July 6-13, 2008. Imfufa, Roskilde Universiy, Denmark: Authors.

Bishop, A. J. (1989). Review of Research on Visualization in Mathematics Education. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 11(1),* pp. 7-16.

BlomhØj ,M.(2009). Different Perspectives in Research on Teaching and Learning Mathematical Modelling. Categorizing the TSG21 Papers. In Blomhøj, M. & S. Carreira, (eds.) (2009). *Mathematical applications and modeling in the teaching and learning of mathematics.* Proceeding from topic study group 21 at the 11th International congress on Mathematical education in Monterrey, México, July 6-13, 2008. Imfufa, Roskilde Universiy, Denmark: Authors.

Burton, L. (1999). Why is Intuition so important to mathematics but Missing from mathematics Educations For the *Learning of mathematics, 19 (3),* 27-32

BROWN, S.I. (1983). *The art of problem posing*. Philadelphia: Franklin Institute Press.

Clements, D.H. y Battista, M.T. (1992). Geometry and Spatial Reasoning, en Grouws, D. A. (ed.) (1992). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, pp. 420-464. Nueva York: MacMillan.

De Guzmán, M. (1974). *Matemáticas en un mundo moderno*. Editorial Bluna. Madrid.

De Lange, J. (1996). Real problems with real world mathematics. , in Alsina C. et. Al (Eds): Porceedings of the 8th Congreso of Mathematics Education ICME (pp. 83-110). Sevilla, España.

Diaz, M. V. & Poblete, A. (1998). Resolver tipos de problemas matemáticos. ¿Uma Habilidad Inhabilitante?. *Revista Épsilon. Número Monográfico*. *42*, 409-423.

Duval, R. (2002). Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematics thinking. Basic issues for learning. En F. Hitt (Ed). *Representations and mathematics visualization*, (pp. 311-335). North american Chapter of PME: Cinvestav-IPN.

Dreyfus, T. (1991). On the Status of Visual Reasoning in Mathematics and Mathematics Education, en Furinghetti, F. (ed.) (1991).*Proceedings of the l5th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* 1, pp. 33-48. Italia: Asís

Filloy, E. & Rojano, T. (1984). La aparición del lenguaje aritmético-algebraico. *L'educazione matematica* V: 1-16.

Font, V. (2001). Some views on the representation in teaching mathematics. *Philosophy of Mathematics Education Journal 14*, 1-35.

Gómez, J. (2007). *La matemática reflejo de la realidad. La modelización matemática como herramienta para la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas.* Federación Española de Profesores de Matemática (FESPM). Badajoz. España.

Hershkowitz, R. (1990). Psychological Aspects of Learning Geometry, en Nesher, P. y Kilpatrick, J. (eds.) (1990). *Mathematics and cognition: A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, pp. 70-95. Cambridge: Cambridge UP.

Hitt, F. (1998). Visualización Matemática, representaciones, nuevas tecnologías y curriculum. En: *Educación Matemática.* Vol. 10 (pp. 23-45). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Janvier, C. (1987). Problems of representation in the teaching and learning of mathematics Hillsdale, New Jersey: Lawrence Earlbaum A. P. Kaput, J.J. (1988) representations, incripctions, description and learning: A kaleidoscope of windows. *Journal of mathematics Behaviors*, 17 (2), 266-281.

Jorba, J., Casellas, E. (1997). *La regulación y la autorregulación de los aprendizajes*. Madrid: Síntesis Ediciones.

Keitel, C. (1993). Implicit Mathematical Models in Social Practice and Explicit Mathematics Teaching by Aplications. En De Lange, J. and Keitel, C. Hunthey, I. Niss, M. (Ed) Innovations in Maths Education by Medelling an Aplications. Chichister, Ellis Horwood Limited.

Kieran, C. y Filloy, E., 1989. El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica.*Enseñanza de las Ciencias, 7*(3), pág. 229 - 240.
Matos, J.F; Blum, W.; Houston, S.K.; Carrera, S.P. (1996). (Ed.) Modelling and mathematics education. Chichester. Horwoord Publishing.

Niss, M. (1989). Aims and scope of applications and modeling in mathematics curricula. En: W. Blum et al. (Eds.): Applications and modeling in learning and teaching mathematics (22-31). Chichester: Ellis Horwood.

Niss, M. (2001). Issues and problems of research on the teaching and learning of applications and Modelling. In Matos, J.F. ; Blum,W. ; Houston,S.K. ; Carrera,S.P.(Ed.) Modelling and mathematics education. (pp. 73-88) Chichester. Horwoord Publishing.

PISA 2000 (2001). Competencias para La vida. Resultados de los estudiantes chilenos. PISA 2000 (extraído en marzo 2008 del sitio http://www.simce.cl/fileadmin/Documentos_y_archivos_SIMCE/evaluaciones_inter/pisa_2000/informe_CHILE_PISA_2000.pdf)

PISA 2006 (2007) The Programme for International Student Assessment .(extraido en marzo de 2008 de http://www.pisa.oecd.org/dataoecd/15/13/39725224.pdf).

Presmeg, N. C. (1986). Visualisation in high school mathematics. *For the Learning of Mathematics 6* (3), 42-46.

PROYECTO FONDECYT 1030122(2003-2005): Una propuesta integradora para la enseñanza de la matemática en la educación media chilena. La modelización matemática a través del trabajo de proyectos.

PROYECTO FONDECYT 1090617 (2009): Niveles de Razonamiento Geométrico en Estudiantes de Establecimientos Municipalizados de la Región del Maule.

Santos (1992). Resolución de problemas: El trabajo de Alan Schoenfeld: una propuesta a considerar en el aprendizaje de las matemáticas. *Revista Educación Matemática 2*, 16-24

SIMCE 2006 (2007). Resultados Nacionales SIMCE. *Obtenido en junio 10 de 2008, de* http://www.simce.cl/fileadmin/Documentos_y_archivos_SIMCE/informe_resultados/Informe_nacional.pdf).

Vinner, S. (1991). The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics. En: *Advanced Mathematical Thinking. Mathematics Education Library*, pp. 65-79. Cambridge: Board.

Zimmermann, W. & Cunningham, S. (1991). Visualization and the Nature of Mathematics. En: *Visualization in Teaching and Learning Mathematics. MAA NOTES, Number 19.* USA.

Williams,H., & Ahmed, A.(1997). Applications, modelling and communication in secondary school mathematics. (Ed) *Modelling and Mathematics Educations*.(pp. 11-21) Chichester. Horwood Publications.