



Análise de uma atividade sobre regiões do plano segundo os registros das representações semióticas

Monica **Karrer**

Universidade Bandeirante de São Paulo – UNIBAN e Centro Universitário da FEI
Brasil

mkarrer@uol.com.br

Luiz Gonzaga Xavier de **Barros**

Universidade Bandeirante de São Paulo – UNIBAN
Brasil

lgxbarros@hotmail.com

Resumo

Esse artigo apresenta os resultados de um estudo sobre as produções de estudantes universitários em uma atividade envolvendo representações de regiões do plano. As tarefas foram elaboradas com base na teoria dos registros das representações semióticas de Duval (1995, 2000, 2006) e requisitaram do estudante o estabelecimento de conversões entre representações dos registros gráfico, simbólico-numérico e simbólico-algébrico. A atividade foi aplicada em duas fases. Na primeira havia uma coleção de tarefas sobre conversões de representações de regiões do plano de um registro A para um registro B e, na segunda, foram propostas situações envolvendo conversões de representações do registro B para o registro A. Os objetivos do estudo consistiram em investigar a existência do fenômeno da heterogeneidade da conversão e em realizar uma categorização das principais dificuldades apresentadas pelos sujeitos nas tarefas propostas. Os resultados apontaram fragilidades conceituais e um menor sucesso nas conversões que partiam do registro gráfico.

Palavras chave: regiões do plano, registros de representações semióticas, conversão, fenômeno da heterogeneidade, registro gráfico.

Introdução

Serão apresentadas brevemente algumas concepções de Raymond Duval sobre os registros de representações semióticas, as quais constam em Duval (1995, 2000, 2006) e fundamentam teoricamente este estudo.

Para Duval (1995), a Matemática não pode ser tratada da mesma forma que as outras ciências porque nela há uma especificidade, proveniente de sua natureza não real, que deve ser considerada: os objetos matemáticos só podem ser acessados com a utilização de representações desses objetos.

Essas representações podem ser discursivas ou não-discursivas, podem ser monofuncionais (algoritmizáveis) ou multifuncionais (não-algoritmizáveis). Conforme essas propriedades, as representações podem ser agrupadas em registros e estes podem ser de quatro tipos diferentes, conforme a figura 1 apresentada a seguir.

	REGISTROS de representações discursivas	REGISTROS de representações não-discursivas
REGISTROS de representações multifuncionais	REGISTROS DA LINGUA NATURAL (RLN)	REGISTROS FIGURAIS (RF)
REGISTROS de representações monofuncionais	REGISTROS SIMBÓLICOS (RS)	REGISTROS GRÁFICOS (RG)

Figura 1. Tipos de registros.

A figura 2 mostra exemplos de representações do objeto matemático reta nos quatro diferentes registros.

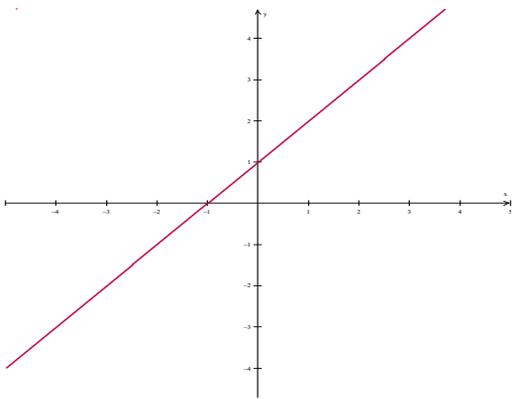
Representação no RLN	Representação no RF
Uma reta é determinada por dois pontos distintos.	
Representação no RS	Representação no RG
$y = \left(\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \right) \cdot (x - x_A) + y_A$	

Figura 2. Representações da reta nos diferentes registros.

Além disso, uma representação pode sofrer três atividades cognitivas: a sua formação, a sua transformação em outra representação do mesmo registro e a sua transformação em outra representação de outro registro. A primeira transformação denomina-se tratamento e a segunda transformação denomina-se conversão. Um registro de representação semiótica é um registro cujas representações são compatíveis com essas três atividades cognitivas.

A figura 3 apresenta um exemplo de conversão de uma representação de uma região do plano no registro simbólico para uma representação da mesma região do plano no registro gráfico.

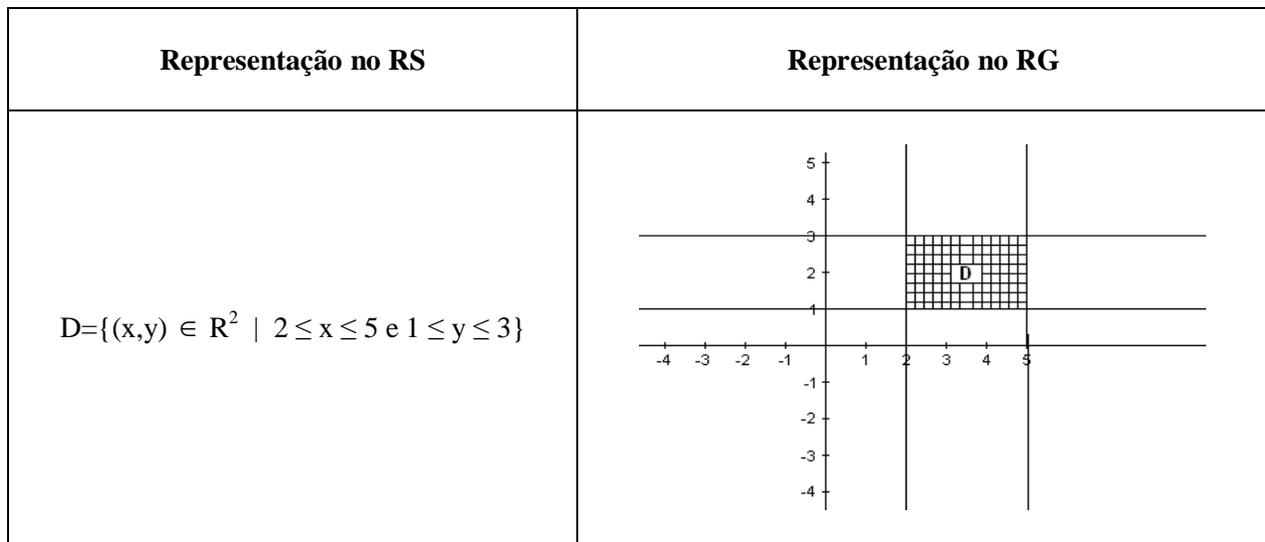


Figura 3. Exemplo de conversão.

Duval (2000) descreve um tipo de fenômeno inerente à conversão, denominado “fenômeno da heterogeneidade da congruência”, segundo o qual nem sempre os dois sentidos de conversão são equivalentes em termos de dificuldades cognitivas. Tal fato freqüentemente acarreta em uma diferença de desempenho dos estudantes nos dois sentidos de conversão.

Segundo o autor, é vital que o processo de ensino e aprendizagem de Matemática leve em conta esse fato, procurando fornecer ao estudante situações que requisitem uma constante coordenação de representações de diversos registros, explorando os dois sentidos de conversão.

Na figura 4, são apresentados dois exemplos estudados por Duval (1995) numa atividade em que foi solicitada aos estudantes a conversão nos dois sentidos.

	Representação no RLN	Representação no RS
Exemplo 1	A soma dos produtos de um inteiro com dois outros inteiros	$a.b + a.c$
Exemplo 2	A união das intersecções de um conjunto com dois outros conjuntos	$(A \cap B) \cup (A \cap C)$

Figura 4. Exemplos adaptados de Duval (1995, p 53).

A tabela 1, também adaptada de Duval (1995), mostra os percentuais de acertos dos estudantes nessa atividade envolvendo as conversões da figura 4.

Tabela 1

Porcentagem de acertos nas atividades de conversões

	Conversão do RLN para o RS	Conversão do RS para o RLN
Exemplo 1	48%	87%
Exemplo 2	41%	81%

Fonte: Adaptado de Duval (1995, p. 53)

Essas constatações indicam que, se um estudante é capaz de efetuar uma conversão em um sentido de conversão, não há garantia de que ele efetue a conversão no sentido oposto. Vários pesquisadores, dentre eles Pavlopoulou (1993) e Karrer (2006) utilizaram essa teoria em seus estudos e observaram percentuais de acerto bastante diferentes em conversões nas quais eram invertidos os registros de partida e de chegada.

Partindo dessas dificuldades e visando investigar os desempenhos de estudantes nos dois sentidos de conversão em uma atividade referente a regiões no plano, foi realizado o presente estudo, cujo detalhamento é apresentado a seguir.

Apresentação da proposta

Com base nas evidências obtidas pelos pesquisadores anteriormente citados, foram elaboradas duas atividades sobre regiões no plano. Ambas foram construídas com o intuito de explorar sentidos contrários de conversões e foram aplicadas em momentos distintos, a fim de investigar a existência ou não do fenômeno da heterogeneidade de conversão.

Nas figuras 5 e 6 são apresentados os enunciados das duas fases da atividade.

<p><i>Tarefa a)</i> Dados os pontos $A = (2,0)$ e $B = (0,4)$, obter a equação da reta AB.</p> <p><i>Tarefa b)</i> Dados os pontos $A = (1,3)$ e $B = (2,4)$, desenhar a reta AB.</p> <p><i>Tarefa c)</i> Dada a reta de equação $y = 2x+4$, desenhar a reta AB.</p> <p><i>Tarefa d)</i> Dada a região plana definida por $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 1 \leq x \leq 3 \text{ e } 2 \leq y \leq 4\}$, desenhar essa região no plano Oxy.</p> <p><i>Tarefa e)</i> Dada a região plana definida por $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 2 \text{ e } 0 \leq y \leq x+3\}$, desenhar essa região no plano Oxy.</p>

Figura 5. Apresentação das tarefas da primeira fase da atividade.

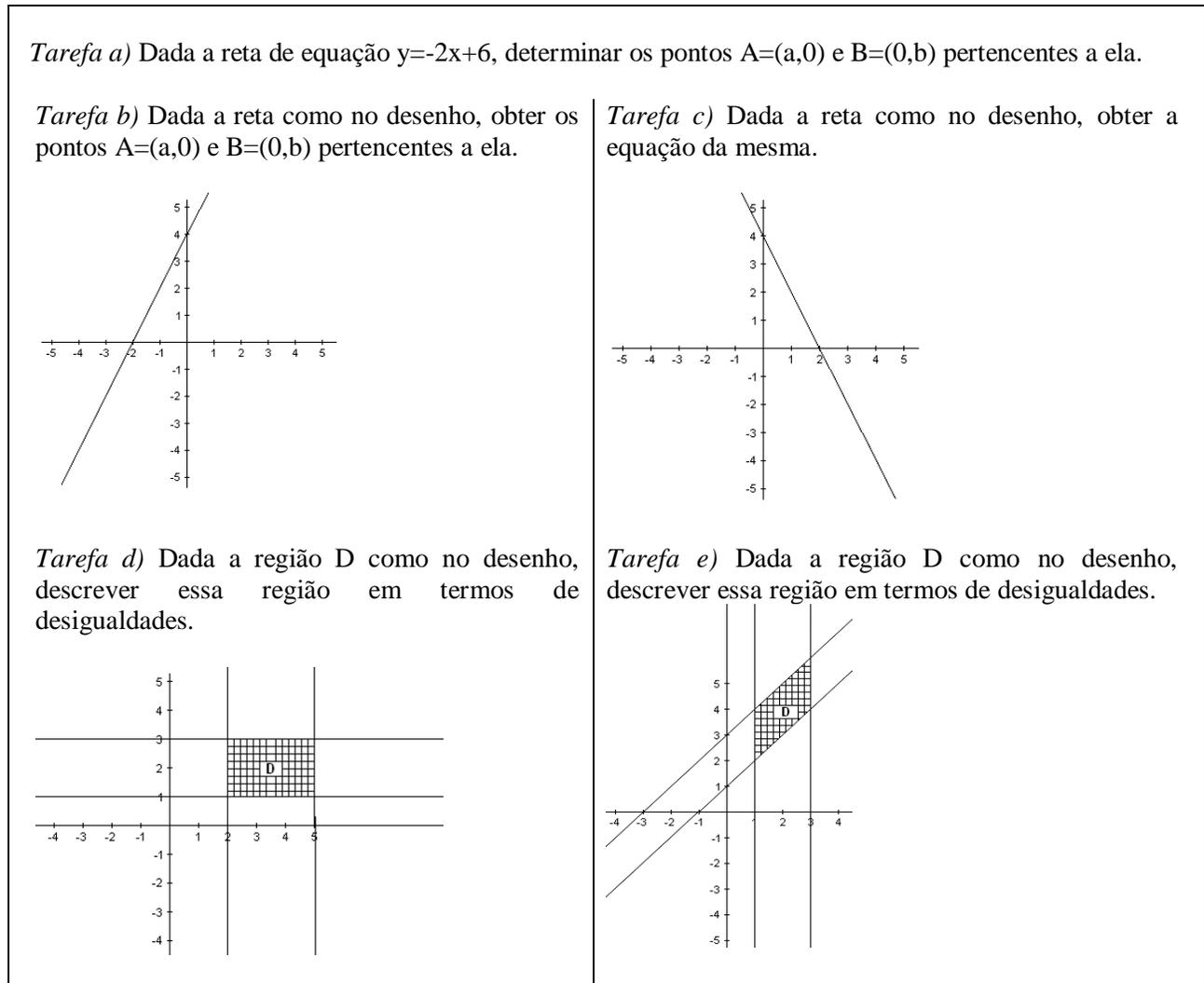


Figura 6. Apresentação das tarefas da segunda fase da atividade

Na primeira fase da atividade, a *Tarefa a* foi elaborada de forma a requerer uma conversão de uma representação do registro simbólico-numérico (RSN) para uma do simbólico-algébrico (RSA), a *Tarefa b* uma conversão de uma representação do registro simbólico-numérico (RSN) para uma do registro gráfico (RG) e as *Tarefas c, d e e* requisitaram conversões de representações do registro simbólico-algébrico (RSA) para representações do registro gráfico (RG). Na segunda fase as tarefas envolveram situações semelhantes, porém propostas de forma a requerer os sentidos contrários das conversões propostas na primeira fase.

Essa atividade foi aplicada em dois momentos para um grupo de trinta e sete estudantes, com faixa etária entre dezenove e vinte e dois anos. Como apenas trinta e um sujeitos participaram das duas fases, somente as respostas destes foram analisadas, uma vez o objetivo foi verificar a existência do fenômeno da heterogeneidade da conversão. No momento da aplicação, os sujeitos cursavam o terceiro semestre do curso de Engenharia de uma instituição particular de ensino superior do estado de São Paulo e já haviam tido contato com o conteúdo proposto. A atividade foi aplicada individualmente e sem consulta, a fim de avaliar como os sujeitos resolveriam as duas situações partindo de seus conhecimentos prévios. A seguir, são apresentados os resultados da aplicação, acompanhados da análise das dificuldades apresentadas.

Resultados

Para a análise dos resultados, inicialmente foi realizado um levantamento do número de acertos de cada questão. A tabela seguinte apresenta o percentual de acerto em cada tarefa, nos dois sentidos de conversão.

Tabela 2

Apresentação do percentual de acertos nas duas fases

FASE 1	Conversão requerida	% de acertos	FASE 2	Conversão requerida	% de acertos
<i>Tarefa a</i>	RSN → RSA	84%	<i>Tarefa a</i>	RSA → RSN	81%
<i>Tarefa b</i>	RSN → RG	74%	<i>Tarefa b</i>	RG → RSN	61%
<i>Tarefa c</i>	RSA → RG	61%	<i>Tarefa c</i>	RG → RSA	58%
<i>Tarefa d</i>	RSA → RG	74%	<i>Tarefa d</i>	RG → RSA	73%
<i>Tarefa e</i>	RSA → RG	52%	<i>Tarefa e</i>	RG → RSA	45%

Avaliando os dados da tabela anterior, nota-se nas *Tarefas a e d*, um desempenho equivalente nos dois sentidos de conversão. Já nas *Tarefas b, c e e*, evidencia-se um menor desempenho dos estudantes na segunda fase, quando a situação apresentava o gráfico como registro de partida. Apesar de no presente estudo a característica da heterogeneidade nos dois sentidos de conversão não ocorrer com a mesma discrepância observada por Pavlopoulou (1993) e Duval (1995), também foi constatada a existência de uma diferença de desempenho dos sujeitos participantes de nossa pesquisa, principalmente nas *Tarefas b e e*.

Na *Tarefa b*, na qual houve a maior discrepância de desempenho nos dois sentidos de conversão, ressalta-se que na primeira etapa não houve abstenção na resolução, enquanto na segunda etapa, quando a conversão foi proposta no sentido do registro gráfico para o simbólico-numérico, 16% dos estudantes não apresentaram qualquer resolução para essa tarefa. Na *Tarefa e* houve uma alta abstenção dos estudantes nas duas fases. Na primeira, 22% não apresentaram qualquer resolução e, na segunda, 16% deixaram a questão em branco. Tal fato sinaliza uma dificuldade maior nessa tarefa que provavelmente tenha ocorrido porque, na primeira fase, havia um complicador na representação gráfica da condição $0 \leq y \leq x + 3$, aliada à condição $0 \leq x \leq 2$. Na segunda fase, na conversão contrária, também era exigida uma leitura gráfica não imediata, necessitando do sujeito o reconhecimento gráfico de que $0 \leq y \leq x + 3$ e $0 \leq x \leq 2$.

Com o intuito de estabelecer uma análise qualitativa das dificuldades apresentadas pelos sujeitos, foi realizada uma categorização das mesmas em cinco classificações (D1, D2, D3, D4 e D5), conforme exposto e exemplificado a seguir.

Na categoria “Dificuldade 1 – D1” foram classificados os casos de dificuldades referentes à representação gráfica, tanto na sua representação como na leitura de dados partindo desse registro. A seguir, são apresentados casos que ilustram essa categoria de dificuldade.

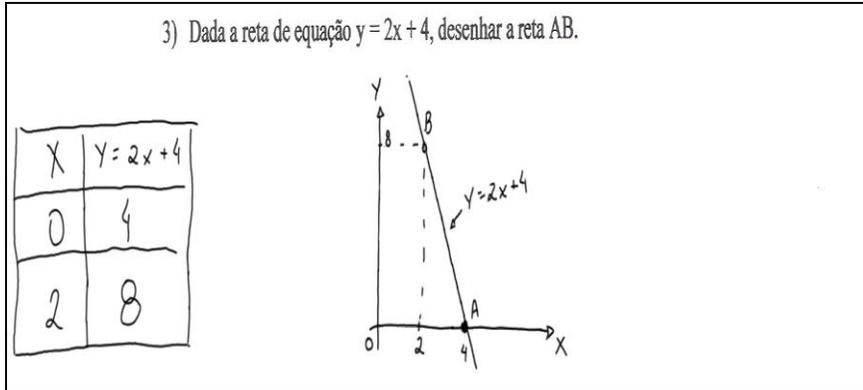


Figura 7. Exemplo 1 da categoria D1.

Observa-se nessa produção que o estudante determinou corretamente dois pontos da reta, porém não soube representá-los no plano cartesiano, revelando dificuldades na conversão da representação do registro simbólico-numérico para a representação do registro gráfico.

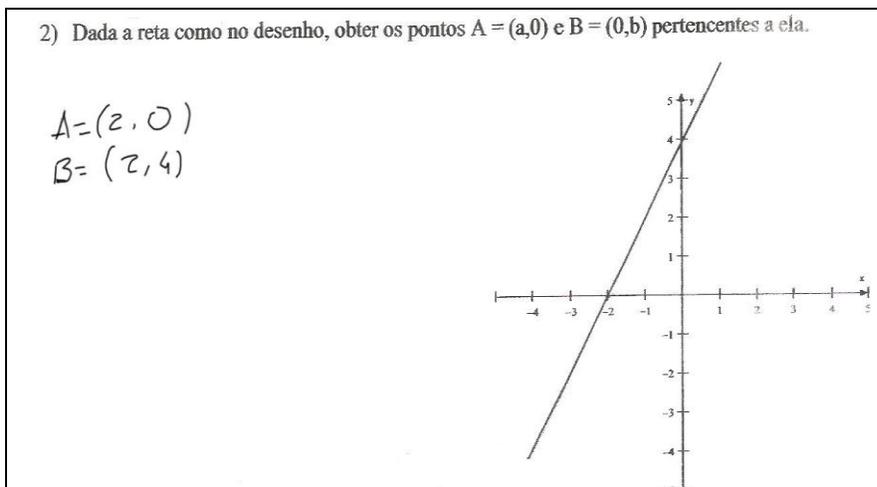


Figura 8. Exemplo 2 da categoria D1.

Na produção deste estudante, é possível observar problemas na leitura gráfica, tendo em vista que ele não soube destacar os pontos solicitados partindo da representação gráfica apresentada, o que revela problemas na conversão de uma representação do registro gráfico para uma do registro simbólico-numérico.

Na categoria “Dificuldade 2 – D2” foram classificados os casos em que as dificuldades eram referentes ao registro simbólico-algébrico, conforme exemplificado a seguir.

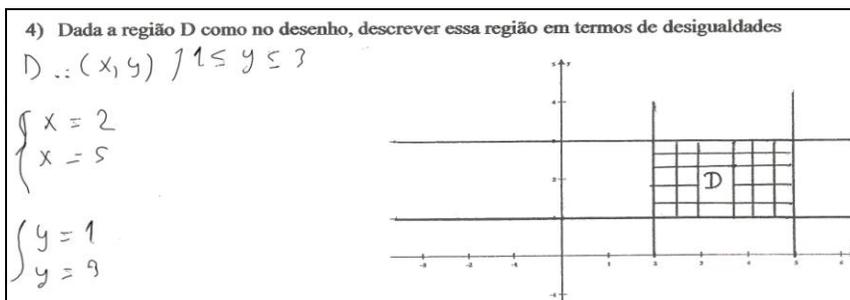


Figura 9. Exemplo 1 da categoria D2.

Nesta produção, o estudante reconheceu os limites dos intervalos, porém, na representação da região D, não apresentou o intervalo referente à x e não usou a notação de conjuntos, revelando problemas no registro simbólico-algébrico.

1) Dados os pontos $A = \begin{matrix} x \\ y \\ (2,0) \end{matrix}$ e $B = \begin{matrix} x \\ y \\ (0,4) \end{matrix}$, obter a equação da reta AB.

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

$$m = \frac{4 - 0}{0 - 2} = -2$$

$$\begin{cases} y - y_A = m \cdot (x - x_A) \\ y - 0 = -2 \cdot (x - 2) \\ y = -2x + 4 \end{cases}$$

$$\therefore D = \{(x, y) \mid y \leq -2x + 4\}$$

Figura 10. Exemplo 2 da categoria D2.

Nesta produção, pode-se notar que o estudante determinou corretamente a equação da reta AB solicitada, porém, apresentou problemas na representação final, provavelmente influenciado pela representação demandada nas duas últimas tarefas da atividade.

Na categoria “Dificuldade 3 – D3” foram inseridos os casos que apresentaram erros de cálculo, conforme ilustrado a seguir.

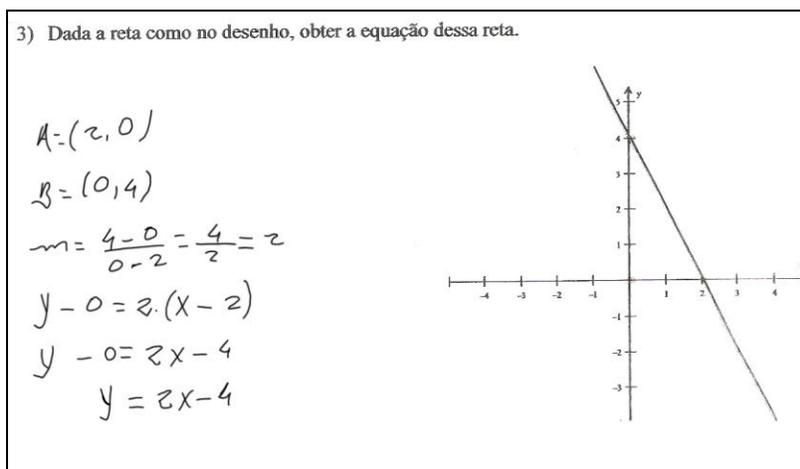


Figura 11. Exemplo da categoria D3.

Nesta resolução, nota-se que o estudante determinou corretamente dois pontos da reta, porém, apresentou um erro no cálculo do coeficiente angular, comprometendo o resultado da equação da reta obtida. Cabe ressaltar que o estudante não relacionou a coerência entre o registro gráfico dado e o sinal do coeficiente angular obtido. Tal fato indica uma resolução estritamente procedimental.

Na categoria “Dificuldade 4 – D4” foram classificados os casos nos quais os estudantes apresentaram problemas de compreensão, ou seja, aqueles em que a produção apresentada não condizia com o que o enunciado solicitava, conforme exemplificado a seguir.

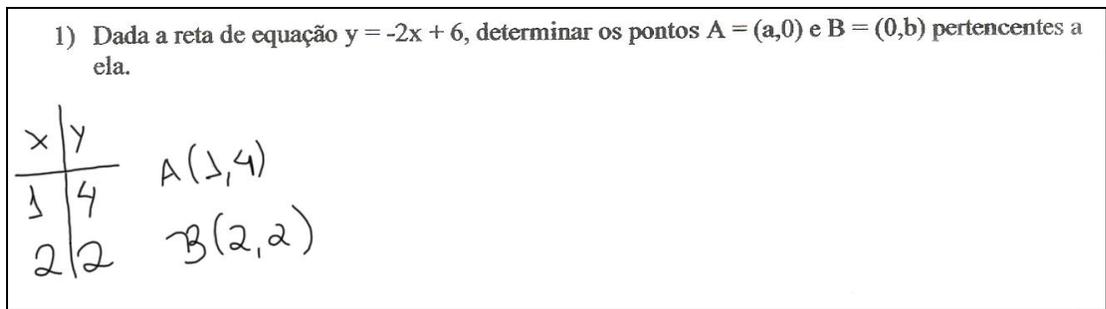


Figura 12. Exemplo 1 da categoria D4.

Nesta produção, o estudante apresenta dois pontos quaisquer da reta e não os pontos solicitados no enunciado.

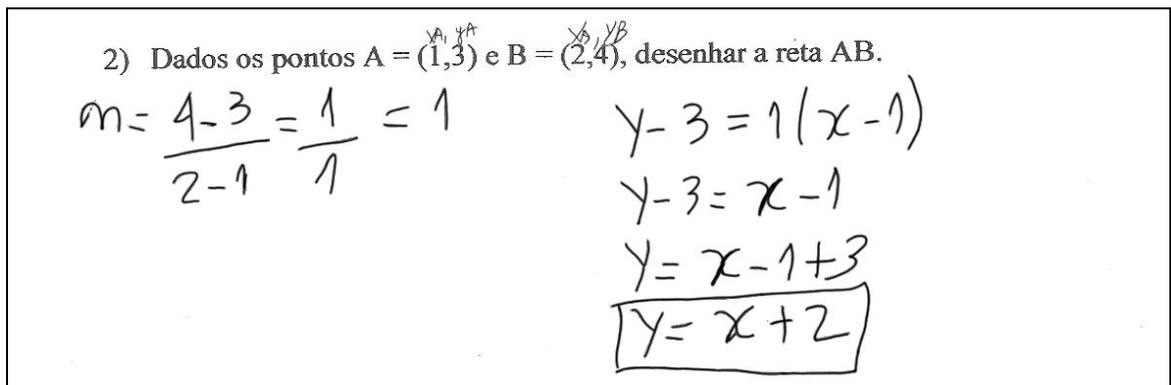


Figura 13. Exemplo 2 da categoria D4

Nesta situação, no enunciado era solicitado o registro gráfico da reta AB e o estudante apresentou a representação simbólico-algébrica da reta.

Na categoria “Dificuldade 5 – D5” foram considerados os casos em que os estudantes apresentaram dificuldades conceituais, conforme exemplificado a seguir.

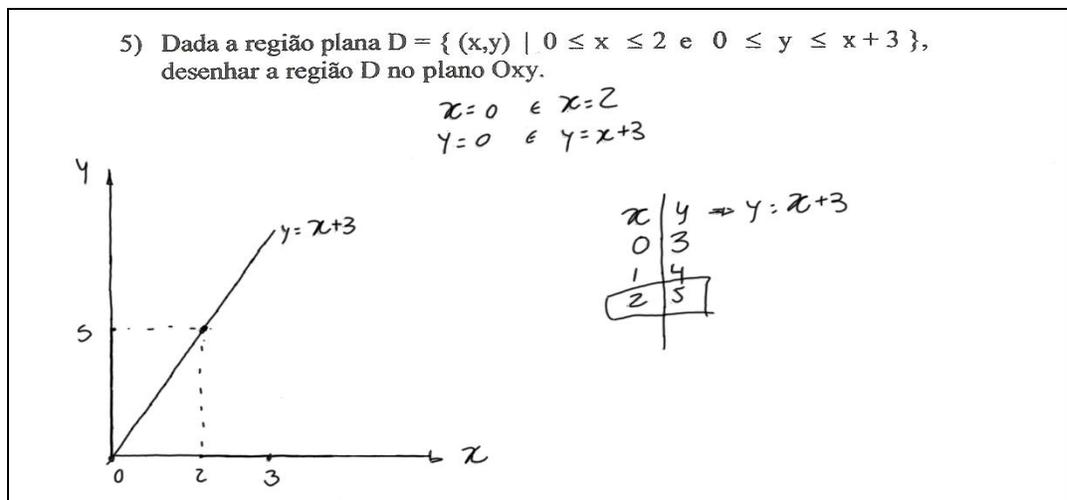


Figura 14. Exemplo 1 da categoria D5

A produção desse aluno indica que o mesmo confundiu a representação da região solicitada com a representação de uma reta. Além disso, ele não soube representar graficamente a reta

$y=x+3$, revelando também problemas na conversão de uma representação do registro simbólico-numérico para uma do registro gráfico.

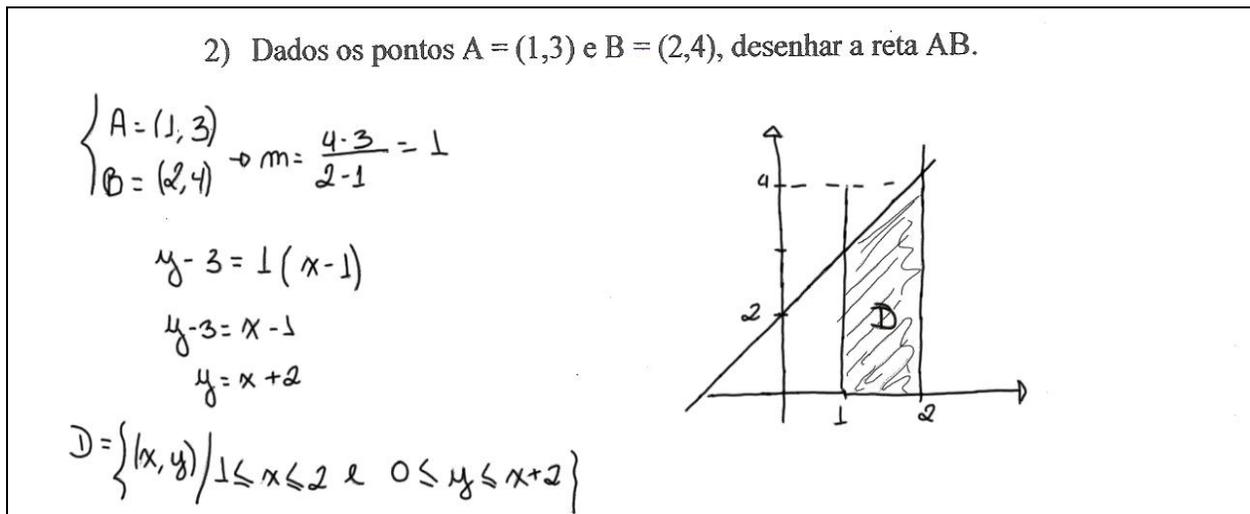


Figura 15. Exemplo 2 da categoria D5

Nesta tarefa, o enunciado solicitava a representação de uma reta e o estudante apresentou o gráfico de uma região plana, revelando, também, problemas conceituais.

Na tabela seguinte, apresenta-se a tabulação das dificuldades observadas nas duas fases da atividade.

Tabela 3

Tabulação das dificuldades nas duas fases da atividade

Dificuldade	D1	D2	D3	D4	D5
Presença da dificuldade na Fase 1	24	3	2	5	12
Presença da dificuldade na Fase 2	7	11	11	1	15
Total	31	14	13	6	27

Pela tabela anterior, pode-se observar que as dificuldades apresentadas pelos estudantes estão relacionadas principalmente ao registro gráfico (D1), tanto na determinação de representações gráficas como na leitura de dados partindo de representações desse registro. Além disso, dificuldades conceituais (D5) estiveram presentes em vários momentos da aplicação.

Dificuldades referentes ao registro gráfico foram citadas por vários autores, tais como Pavlopoulou (1993), Karrer (2006), Sierpiska, Dreyfus e Hillel (1999), Candido (2010) em conteúdos diversos do ensino superior e, particularmente em Cálculo Diferencial e Integral, por Godoy (2004) e Silva (2006).

Estes dois últimos autores também constataram que o ensino de Cálculo Diferencial e Integral privilegia um enfoque procedimental em detrimento a um trabalho de compreensão conceitual, o que provavelmente tenha contribuído nas dificuldades conceituais apresentadas pelos sujeitos do presente estudo.

Em uma análise por tarefa, foi observada a seguinte distribuição das dificuldades.

Tabela 4

Distribuição das dificuldades por tarefa

Item / Tipo de dificuldade	D1	D2	D3	D4	D5	Total
<i>Tarefa a</i> - Fase 1	1	3	1	2	1	8
<i>Tarefa a</i> - Fase 2	0	0	1	1	0	2
<i>Tarefa b</i> - Fase 1	5	0	0	3	2	10
<i>Tarefa b</i> - Fase 2	4	0	1	0	1	6
<i>Tarefa c</i> - Fase 1	9	0	1	0	0	10
<i>Tarefa c</i> - Fase 2	1	1	9	0	3	14
<i>Tarefa d</i> - Fase 1	1	0	0	0	1	2
<i>Tarefa d</i> - Fase 2	2	2	0	0	0	4
<i>Tarefa e</i> - Fase 1	8	0	0	0	8	16
<i>Tarefa e</i> - Fase 2	0	8	0	0	11	19
Total	31	14	13	6	27	-

Analisando a tabela, observa-se que a dificuldade D1, referente à representação gráfica, teve uma presença maior nas *Tarefas b, c e e* da primeira fase, as quais requeriam conversões entre representações dos registros simbólico-numérico ou simbólico-algébrico para o gráfico. A dificuldade D2, referente à representação simbólico-algébrica, esteve mais presente na *Tarefa e* da fase 2, na qual era necessário efetuar uma conversão de uma representação do registro gráfico para uma do registro simbólico-algébrico. A dificuldade D3, referente a erros de cálculos, esteve mais concentrada na *Tarefa c* da fase 2, que requeria a equação da reta partindo de sua representação gráfica. A dificuldade D4, na qual os estudantes não apresentavam a representação solicitada na atividade, teve uma presença reduzida, concentrada nas *Tarefas a e b* da primeira fase. Já a dificuldade D5, referente a problemas conceituais, ocorreu principalmente na *Tarefa e* das duas fases. Na seção seguinte são apresentadas as conclusões desse estudo.

Conclusões

Com base na teoria dos registros de representação semiótica de Duval (1995, 2000, 2006) e considerando pesquisas que revelaram diferentes desempenhos nos dois sentidos de conversão e dificuldades principalmente com o registro gráfico, foi proposta uma atividade sobre representações de regiões do plano, que explorou os dois sentidos de conversão, envolvendo os registros gráfico, simbólico-algébrico e simbólico-numérico.

Os resultados apontaram que os estudantes não tiveram o mesmo desempenho nos dois sentidos de conversão, apesar de a diferença não ser tão acentuada como a apresentada nos estudos de Duval (2005) e Pavlopoulou (1993), referentes aos conteúdos de conjuntos e vetores, respectivamente. Um menor sucesso dos estudantes no presente estudo foi notado nas conversões que apresentavam o gráfico como registro de partida, o que também foi observado por Pavlopoulou (1993), Karrer (2006) e Candido (2010). Uma categorização das dificuldades apresentadas pelos estudantes revelou cinco tipos de problemas, sendo os mais frequentes aqueles relativos às representações gráficas, tanto em questões de construção de gráficos como na análise de dados partindo desse registro.

Outra dificuldade muito presente foi a relativa ao conceito apresentado. Em diversos momentos, os estudantes apresentaram dúvidas em diferenciar uma questão que solicitava a

representação de uma reta com uma que solicitava a representação de uma região no plano, estabelecendo confusões entre as duas, tanto no registro gráfico como no simbólico. É provável que esse tipo de dificuldade seja gerado pelo fato de o ensino privilegiar um enfoque procedimental em detrimento da compreensão conceitual, conforme apontado por Silva (2006) e Godoy (2004) em suas pesquisas sobre Cálculo Diferencial e Integral.

Partindo dos resultados obtidos, esse estudo revela a importância de propor situações de exploração do duplo sentido de conversão bem como tarefas que requeiram do estudante um trabalho mais efetivo com o registro gráfico, propondo abordagens que, além do aspecto procedimental, valorizem a compreensão do conceito.

Referências bibliográficas

- Candido, A.S. (2010). *O ensino e a aprendizagem do produto de vetores na perspectiva dos registros de representação semiótica com o auxílio do software Cabri 3D*. 240f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da Universidade Bandeirante de São Paulo.
- Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine*. Berna: Peter Lang.
- Duval, R. (2000). Basic Issues for Research in Mathematics Education. In: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 24, 2000, Hiroshima. *Proceedings of the 24th PME*. Hiroshima: Department of Mathematics Education Hiroshima University, 24, 55-69.
- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, Springer, 61, 103-131.
- Godoy, L.F.S. (2004). *Registros de representação da noção de derivada e o processo de aprendizagem*. 98f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.
- Karrer, M. (2006). *Articulação entre álgebra linear e geometria: um estudo sobre as transformações lineares na perspectiva dos registros de representação semiótica*. 372p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.
- Pavlopoulou, K. (1993). Un problème décisive pour l'apprentissage de l'algèbre linéaire: la coordination des registres de représentation. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, I.R.E.M. de Strasbourg, 5, 67-93.
- Sierpinska, A.; Dreyfus, T.; Hillel, J. (1999). Evaluation of a design: Linear transformations. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Grenoble, 19, 9-39.
- Silva, J. R. D. (2006). *Um estudo de registros de representação semiótica na aprendizagem dos conceitos de máximos e mínimos de funções*. 234f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da Universidade Federal do Mato Grosso do Sul.