



Intervenções de combinatória na educação de jovens e adultos¹

Fernanda Lopes Sá **Barreto**
Universidade Federal de Pernambuco
Brasil

fernandasabarreto@gmail.com

Rute Elizabete de Souza Rosa **Borba**
Universidade Federal de Pernambuco
Brasil

borba@talk21.com

Resumo

O objetivo desse estudo foi desenvolver intervenções pedagógicas na Educação de Jovens e Adultos que pudessem auxiliar a superação de dificuldades com problemas que envolvem a Combinatória. Participaram da pesquisa dez estudantes do módulo III da EJA. O método estruturou-se em três momentos: o pré-teste, a intervenção e o pós-teste. No pré-teste, a maioria dos alunos não apresentou acertos nas questões e, no geral, suas respostas não estabeleceram relação alguma com o que era solicitado nos problemas. A finalidade das intervenções foi abordar os significados da Combinatória, a partir da exploração de diferentes situações, chamando a atenção dos estudantes para a percepção de peculiaridades cada significado, assim como se procurou analisar o uso de distintas formas de representações simbólicas. Apesar de apenas uma intervenção, os pós-testes evidenciaram avanços nos desempenhos de todos os alunos, o que mostra a importância de intervenções pedagógicas sistemáticas para auxiliar o desenvolvimento de conceitos Matemáticos.

Palavras chave: Combinatória, Educação de Jovens e Adultos, intervenções pedagógicas, resolução de problemas, Teoria dos Campos Conceituais.

¹ Esta pesquisa foi parcialmente financiada pela Fundação de Amparo à Ciência e Tecnologia do Estado de Pernambuco (Facepe – APQ 1095-7.08/08) e pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (MCT/CNPq – 476665/2009-4).

O raciocínio combinatório está presente no cotidiano, tanto no que diz respeito às atividades rotineiras (como jogos e brincadeiras), quanto a diversos procedimentos profissionais e acadêmicos. A Combinatória integra-se a diferentes aspectos da Matemática assim como a outras áreas do conhecimento como as Ciências da Informação, a Estatística e a Genética.

Apesar da presença da Combinatória no cotidiano, estudos anteriores (PESSOA e BORBA, 2009; SCHLIEMANN, 1988) mostram que estudantes do Ensino Fundamental, assim como recém ingressos no Ensino Superior, apresentam dificuldades em solucionar problemas que envolvem o raciocínio combinatório.

A escolha de realizar a pesquisa com alunos da Educação de Jovens e Adultos deve-se ao fato de que ainda existem poucas investigações sobre temas específicos da Matemática nessa modalidade de ensino. A Combinatória é um desses temas pouco explorados, principalmente, no que diz respeito a estudos de intervenção. O presente estudo se propõe a analisar, através da elaboração e realização de sequências de atividades, como é desenvolvida a compreensão da Combinatória em estudantes da Educação de Jovens e Adultos.

A análise e resolução de situações-problema que compreendem os diversos significados da multiplicação e divisão estão presentes entre os objetivos didáticos da Proposta Curricular para a Educação de Jovens e Adultos (BRASIL, MEC, 2002). Uma vez que a Combinatória faz parte desses significados, é relevante o desenvolvimento de pesquisas que analisem as contribuições de intervenções didáticas, construídas a partir da mediação entre o conhecimento já desenvolvido pelos alunos e o conhecimento formal, para favorecer a compreensão acerca de tal significado.

Fundamentação teórica

A Combinatória está inserida no Campo Conceitual das Estruturas Multiplicativas. Um Campo Conceitual é definido por Vergnaud (1986, p.84) “como um conjunto de situações cujo domínio requer uma variedade de conceitos, procedimentos e representações simbólicas em estreita conexão”. O campo conceitual das estruturas multiplicativas, de acordo com Vergnaud (ibidem) é caracterizado por um conjunto de situações que envolvem a multiplicação e a divisão, as proporções simples e múltiplas como também outros conceitos. Entre essas situações encontram-se os problemas que envolvem o raciocínio combinatório.

Pessoa e Borba (2009) estabelecem a seguinte classificação para os significados do raciocínio combinatório: Produto Cartesiano, Permutação, Arranjo e Combinação. Essa classificação foi usada no presente estudo. O problema que envolve o Produto Cartesiano é composto, no mínimo, por dois conjuntos básicos, sendo necessário, combinar cada elemento de um conjunto com cada elemento do outro para formar o conjunto-solução. A operação com problemas que envolvem o Arranjo, a Permutação e a Combinação, consiste basicamente, em formar subconjuntos, a partir de um conjunto, atendendo a determinadas condições peculiares a cada um desses significados (com todos os elementos – no caso da Permutação – ou com alguns dos elementos – nos casos do Arranjo e da Combinação e levando em consideração se a ordem dos elementos gera, ou não, novas possibilidades). Portanto, nesses casos, o raciocínio combinatório se desenvolverá na organização dos elementos de um conjunto básico, diferente do Produto Cartesiano que envolve a associação entre dois ou mais conjuntos básicos.

Schliemann (1988) realizou um estudo com três grupos distintos: vinte cambistas do jogo do bicho, vinte estudantes recém-aprovados no vestibular e vinte trabalhadores que não era exigida a utilização da Combinatória em suas funções profissionais. Tal estudo teve o objetivo de verificar as contribuições das fórmulas e dos algoritmos na compreensão do raciocínio combinatório. Os melhores desempenhos foram obtidos dos sujeitos que interligavam a experiência cotidiana e a experiência escolar. Os resultados apontam que apenas a experiência informal ou somente a formação escolar são insuficientes para a construção da compreensão acerca da Combinatória.

Barreto e Borba (2010) investigaram a compreensão acerca da Combinatória em alunos da EJA, os quais faziam parte de um programa de correção de fluxo do Ensino Médio (Programa Travessia). Os participantes desse estudo foram 15 alunos de uma turma que já haviam vivenciado o módulo em que eram ministradas aulas de Matemática e 15 alunos de outra turma que ainda não havia recebido aulas de Matemática, totalizando assim 30 estudantes. Todos foram submetidos à resolução de um teste. Na análise dos dados não foram identificadas diferenças significativas entre os desempenhos das turmas, o que mostra que a escolarização não se apresentou como um diferencial entre essas turmas. O significado que os alunos apresentaram maior compreensão foi o Produto Cartesiano. A maioria dos participantes não explicitou as estratégias utilizadas nas questões, limitando-se a escrita de respostas incorretas. Entre as estratégias que foram explicitadas, destacou-se o uso da listagem de possibilidades, entretanto os alunos tiveram muita dificuldade em esgotar todas as possibilidades.

Lima e Borba (2010) realizaram uma pesquisa com o objetivo de analisar como alunos da Educação de Jovens e Adultos compreendem problemas de estrutura multiplicativa, especialmente os que envolvem a Combinatória. Para isso, os participantes, 150 ao todo, resolveram 16 questões que abordavam diferentes tipos de problemas multiplicativos. Os resultados do estudo apontam a resistência dos alunos em fazer uso de representações simbólicas não-formais para resolver problemas que envolvem o raciocínio combinatório. A listagem de possibilidades foi a representação não-formal mais utilizada pelos estudantes, o que também foi observado no estudo de Barreto e Borba (2010).

Especificamente, ao se pensar em Educação Matemática de jovens e adultos deve-se focar “uma ação educativa dirigida a um sujeito de escolarização básica incompleta ou jamais iniciada e que ocorre aos bancos escolares na idade adulta ou na juventude” (FONSECA, 2006, p.14). Dessa forma, apesar da nomenclatura dessa modalidade de ensino se reportar à idade dos estudantes, “o grande traço definidor da EJA é a caracterização sociocultural do seu público” (Ibidem, p.15). A EJA não atende a um grupo qualquer de jovens e adultos, mas a um grupo que se apresenta homogêneo dentro da diversidade dos grupos culturais presentes na sociedade.

A Proposta Curricular para a EJA (BRASIL, MEC, 2002) chama a atenção para o fato de que o raciocínio multiplicativo ainda é apresentado apenas como adição de parcelas repetidas e ressalta que devem ser explorados todos os significados da multiplicação, entre esses o raciocínio combinatório. Mostra-se relevante o desenvolvimento de estudos que investiguem, especialmente na Educação de Jovens e Adultos, de que forma as sequências de atividades, que articulam os conhecimentos formais e informais, podem auxiliar na superação das dificuldades e na elevação da autoconfiança dos estudantes, contribuindo para uma ampla compreensão dos significados dos conceitos.

Objetivos

Geral

Desenvolver uma sequência de atividades na Educação de Jovens e Adultos que auxilie na superação de dificuldades com problemas que envolvem a Combinatória.

Específicos

- Analisar o desempenho de alunos do Módulo III da EJA (equivalente ao quarto e quinto anos do Ensino Fundamental) em solucionar problemas que envolvem o raciocínio combinatório, antes de um processo de intervenção na temática.
- Produzir uma sequência de atividades e desenvolvê-la de distintas formas, em função da utilização das representações simbólicas variadas.
- Analisar se os grupos avançaram ou não, após a utilização da sequência de atividades.

Método do estudo

Este trabalho faz parte de um estudo maior, que consiste em uma pesquisa de mestrado. O procedimento de coleta de dados do presente estudo foi composto por três momentos: o pré-teste, a intervenção pedagógica e o pós-teste.

O estudo foi realizado com alunos de duas turmas do módulo III da EJA (que equivale aos quarto e quinto anos do Ensino Fundamental). Cada turma pertencia a uma escola pública municipal, uma delas localizada na cidade do Recife e a outra na cidade de Paulista, região metropolitana do Recife. Os participantes da pesquisa totalizaram 10 estudantes, cinco de cada turma.

Inicialmente, foi elaborada uma sequência de situações problemas com base nos estudos de Barreto e Borba (2010), Martins e Borba (2010), Pessoa e Borba (2009), Lima e Borba (2010) e Azevedo, Costa e Borba (2010). Essa sequência foi composta por oito problemas, sendo dois envolvendo cada um dos significados da Combinatória: Arranjo, Combinação, Permutação e Produto Cartesiano. Houve a preocupação de controlar os valores dos resultados para que todas as questões pudessem ser resolvidas por representações não-formais, como a listagem das possibilidades, não sendo, desse modo, necessário o domínio do algoritmo para se chegar ao resultado esperado. Tais problemas foram utilizados no pré-teste e também nas intervenções. Abaixo, são dispostos os problemas na ordem em que foram apresentados aos alunos. Tal ordem foi escolhida aleatoriamente.

- Maria fabrica picolés em casa e decidiu criar picolés que combinem duas frutas. Ela tem disponíveis seis tipos de frutas (morango, acerola, cajá, graviola, limão e uva). Quantos tipos de picolés diferentes ela pode fabricar combinando duas dessas frutas? (Combinação)
- Quatro competidores (José, Marcos, Bruno e Sérgio) estão disputando uma corrida. De quantas maneiras diferentes pode-se ter o 1º e 2º lugares? (Arranjo)
- Para entrar em um estádio de futebol, Pedro pode passar por quatro portões de entrada (A, B, C e D). Depois do jogo, para sair do estádio, Pedro possui cinco opções de saídas diferentes (E, F, G, H e J). De quantas maneiras diferentes ele poderá entrar e sair do estádio? (adaptado de Azevedo, Costa e Borba, 2010) (Produto Cartesiano)

- Alda, Vera, Joana e Creusa são costureiras e formaram um grupo para participar de uma competição organizada pela associação do bairro. É necessário, que elas deem um nome à equipe utilizando as letras iniciais dos seus nomes, por exemplo (AVJC). Quantas siglas diferentes elas podem formar? (Permutação)
- O governador do estado irá promover um encontro em que cada município deverá enviar dois vereadores para representá-lo. Na cidade de Paulista, quatro vereadores (Carlos, Luís, Amanda e Daniel) mostraram interesse em participar do encontro. De quantas maneiras diferentes podem ser escolhidos dois desses vereadores para representar o município? (Combinação)
- De quantas maneiras diferentes Camila, Dalva e Luci podem se posicionar lado a lado para tirar uma fotografia? (Permutação)
- Quantos números de dois algarismos diferentes podem ser formados usando os números 1, 3, 5, 7 e 9? (Arranjo)
- Uma loja de estofados vende sofás de três tamanhos diferentes (pequeno, médio e grande) e também possui as opções de quatro cores diferentes (branco, marrom, verde e laranja). Quantos tipos de sofás diferentes são vendidos nessa loja? (Produto Cartesiano)

Ao todo, 17 alunos realizaram, individualmente, o pré-teste que consistiu na resolução dos problemas descritos anteriormente. Sendo que sete alunos pertenciam à turma A e 10 à turma B. Na análise dos dados do pré-teste, identificaram-se os tipos de respostas e de estratégias de resolução utilizados pelos estudantes.

Desse total de 17 alunos, foram selecionados 10 para participar da pesquisa. O critério de escolha utilizado foi a obtenção de desempenhos semelhantes no pré-teste. Como todos tiveram desempenhos próximos, a maioria não apresentou acertos, foram escolhidos aleatoriamente os dez participantes, cinco de cada turma.

O procedimento seguinte consistiu no momento de intervenção. Os participantes foram divididos em cinco grupos, isto é, cada grupo foi composto por dois participantes, sendo um de cada turma. Cada grupo passou por uma intervenção distinta. É importante ressaltar que as intervenções foram realizadas de modo individual e também foram áudio gravadas. Nos cinco grupos foram resolvidas as questões do pré-teste, as intervenções se diferenciaram apenas no uso das representações simbólicas. O quadro abaixo mostra como ocorreu a intervenção em cada um desses grupos.

Quadro 1: Organização do uso das representações simbólicas em cada grupo

Grupos	Tipos de Representações Simbólicas	
Grupo 1	Listagem (quatro primeiros problemas)	Árvore de Possibilidades (quatro últimos problemas)
Grupo 2	Árvore de Possibilidades (quatro primeiros problemas)	Listagem (quatro últimos problemas)
Grupo 3	Quatro problemas (os que apresentam os maiores resultados de cada significado da Combinatória) foram resolvidos por listagem e por árvore de possibilidades, alternando a ordem de utilização dessas representações.	
Grupo 4	Apenas listagem (oito problemas)	
Grupo 5	Apenas árvore de possibilidades (oito problemas)	

Como visto no Quadro 1, o grupo 1 vivenciou a resolução das quatro primeiras situações-problemas da sequência, através da listagem de possibilidades. E em seguida foram realizadas as demais questões utilizando a árvore de possibilidades.

O grupo 2 fez o inverso do que foi realizado no grupo 1, ou seja, as quatro primeiras questões da atividade utilizaram a construção de árvores de possibilidades, enquanto que nas quatro últimas foram usadas as listagens de possibilidades.

O grupo 3 resolveu apenas quatro problemas da sequência, entretanto cada problema foi resolvido duas vezes, uma por listagem e outra por árvore de possibilidades. O que garantiu o total de oito resoluções, que também foi o total dos demais grupos. Foi escolhido um problema de cada significado da Combinatória, sempre o que apresentou o maior resultado. A ordem de utilização das representações foi alternada, isto é se no primeiro problema foi usada a listagem e posteriormente a árvore de possibilidades, no problema seguinte realizou-se o inverso.

O grupo 4 resolveu todos os problemas fazendo uso de apenas um tipo de representação que foi a listagem de possibilidades.

O grupo 5, semelhante ao grupo 4, utilizou apenas uma forma de representação simbólica, que nesse caso foi a árvore de possibilidades.

Ambas as representações simbólicas exploradas, listagem e árvore de possibilidades, as quais tiveram uma forma de utilização distinta em cada grupo, são representações escritas. Estudos anteriores como Lima e Borba (2010) e Barreto e Borba (2010) observaram que a lista de possibilidades é uma forma de representação bastante utilizada por alunos da EJA, quando esses resolvem problemas que envolvem a Combinatória. Mas, no geral os estudantes não atingem os resultados esperados. A decisão de utilizar a listagem se justifica, portanto, no que foi evidenciado em estudos anteriores. Já a escolha pelo uso da árvore de possibilidades deve-se ao fato de que se trata, assim como a listagem, de uma representação simbólica expressa através da escrita das possibilidades. Sendo que, a árvore proporciona uma organização que permite uma melhor evidenciação de regularidades dos problemas, auxiliando os alunos na percepção de tais regularidades.

É importante que o estudante tenha a oportunidade de conhecer e explorar diferentes formas de representações simbólicas, já que cada representação ajuda a evidenciar alguma/algumas propriedades invariantes de um determinado conceito, mas não consegue apresentar claramente todas as propriedades desse conceito.

A pesquisadora foi quem realizou as intervenções. As questões foram resolvidas seguindo a ordem do pré-teste.

Posteriormente às atividades de intervenção, realizou-se, individualmente, um pós-teste com todos os grupos, a fim de verificar se houveram avanços nos desempenhos dos estudantes. Também se buscou analisar se o uso de diferentes representações, assim como as formas de alternar tais representações influenciaram o desenvolvimento do conceito.

A seguir serão apresentadas as questões do pós-teste. São oito questões, duas de cada um dos significados que, igualmente ao pré-teste, foram elaboradas a partir dos estudos de Barreto e Borba (2010), Martins e Borba (2010), Pessoa e Borba (2009), Lima e Borba (2010) e Azevedo, Costa e Borba (2010), os quais já foram citados anteriormente. Os valores dos resultados foram novamente controlados, para garantir que os problemas pudessem ser resolvidos através do uso das representações simbólicas trabalhadas nas intervenções. As questões estão organizadas na ordem em foram resolvidas.

- Uma empresa tem cinco funcionários no setor de vendas (Emílio, Ricardo, Adriana, Luíza e Gabriela). Desses, dois funcionários serão escolhidos para uma equipe de segurança. De quantas formas diferentes esses funcionários podem ser escolhidos? (Combinação)
- Em uma lanchonete existem cinco opções de suco (laranja, maracujá, goiaba, caju e pitanga) e dois tipos de salgados (coxinha e cachorro-quente). De quantas formas diferentes uma pessoa pode comer um salgado e tomar um suco? (Produto Cartesiano)
- Sete pessoas (João, Camila, Beatriz, Tatiana, Marcos, Danilo e Flávio) participaram de uma reunião. No final, cada uma cumprimentou outra, apenas uma vez, através de um aperto de mão. Quantos apertos de mão entre pessoas diferentes foram dados? (adaptado de Azevedo e Borba, 2010) (Combinação)
- Cinco vendedores de uma loja (Lucas, Vânia, Armando, Cláudio e Gorete) se candidataram às vagas de gerente e subgerente. De quantas maneiras diferentes estes funcionários podem ser selecionados para os cargos de gerente e subgerente? (Arranjo)
- Para uma entrevista de emprego, estão inscritos quatro rapazes (Bruno, Rodrigo, Valter e Gustavo) e seis moças (Celina, Mônica, Andrea, Iara, Rita e Fabiana). Desses, apenas um rapaz e uma moça serão selecionados. Quantos casais diferentes podem ser escolhidos? (Produto Cartesiano)
- Na fila do caixa de uma padaria estão quatro pessoas (Ana, Miguel, Érica e Felipe). De quantas maneiras elas podem estar posicionadas nessa fila?
- Quatro seleções de estados do Nordeste estão disputando um campeonato de futebol de salão (Pernambuco, Bahia, Sergipe e Alagoas). De quantas maneiras diferentes podemos ter o campeão e o vice-campeão? (Arranjo)
- De quantas maneiras diferentes pode-se escrever números de três algarismos utilizando os algarismos 2, 4 e 6? (Permutação)

Apresentação e discussão dos resultados

Pré-teste

Ao analisar os pré-testes, foi possível verificar que apenas um participante acertou uma questão. Os demais não apresentaram acertos totais em nenhuma das questões.

Nas análises dos tipos de respostas usados pelos alunos, foram utilizadas as categorias do estudo de Pessoa e Borba (2009). Exceto o caso em que um aluno chegou ao resultado adequado em apenas um dos problemas, foram observados quatro tipos de respostas apresentadas pelos estudantes: em branco, apenas resposta incorreta, resposta incorreta com estabelecimento de relação com o problema e resposta incorreta sem estabelecimento de relações com o problema.

Com relação às respostas em branco, foi possível identificar nos relatos que os estudantes deixaram de responder a algumas questões por não compreender como poderiam solucioná-las. De um modo geral, os alunos consideraram difíceis as questões do teste.

Em outro tipo de resposta que foi observado, os alunos apenas escreveram a resposta incorreta sem demonstrar o uso de estratégias de resolução. Além desse tipo de resposta, também foram observadas questões em que os alunos expressaram respostas incorretas, mas que apresentavam relação com o que foi solicitado. No geral, encontravam algumas possibilidades, porém não conseguiam esgotá-las.

Já no tipo de resposta incorreta sem relação com o problema, os estudantes responderam incorretamente e evidenciaram em suas respostas que não compreenderam o que era proposto na

questão, ou seja, não estabeleceram relação com o problema, fazendo uso de estratégias equivocadas.

Entre as estratégias de resolução observou-se: o uso da multiplicação, a listagem de possibilidades, a soma dos elementos dos conjuntos e o uso do número total de elementos dos conjuntos como resposta.

No que diz respeito ao uso da multiplicação, apenas um participante utilizou essa operação através do cálculo mental, o aluno não expressou o algoritmo. Já em relação à listagem de possibilidades, percebeu-se que essa foi a mais utilizada entre as estratégias explicitadas, mas os alunos apresentaram uma grande dificuldade em esgotar todas as possibilidades das questões.

A soma dos elementos também foi identificada como uma das formas de estratégias, principalmente nas questões de Produto Cartesiano, as quais possuem dois conjuntos bases. Dessa forma, os alunos somavam os elementos de tais conjuntos.

Outra estratégia utilizada pelos alunos consistia em dar como resposta o número de elementos do conjunto, como se a quantidade de itens desse correspondesse ao número de possibilidades que poderiam ser encontradas.

Após as análises dos pré-testes ocorreram as intervenções que buscaram auxiliar os estudantes a superar as dificuldades identificadas.

Intervenções

Como relatado no método, realizaram-se cinco formas de intervenção que se diferenciaram somente no uso das representações simbólicas.

Em todos os grupos, a pesquisadora realizou questionamentos para auxiliar a reflexão dos alunos em relação: ao esgotamento das possibilidades, ao número de elementos utilizados em cada possibilidade e à influência exercida pela ordem dos elementos para a formação de novas possibilidades. Buscou-se dessa forma, chamar a atenção para as propriedades invariantes da Combinatória, a fim de que os estudantes percebessem os invariantes de cada um dos significados. Em nenhum momento, os problemas foram apresentados aos alunos usando a nomenclatura formal Arranjo, Combinação, Permutação e Produto Cartesiano.

Em algumas questões, os participantes demonstravam grande preocupação em formar apenas as possibilidades que apresentavam algum sentido de acordo com suas preferências pessoais. A questão que envolve a fabricação de picolés (Combinação) é exemplo disso, uma vez que os estudantes apresentaram certa resistência em considerar, nas suas respostas, as combinações que eles julgavam os sabores desagradáveis.

Embora cinco participantes tenham logo percebido regularidades ao iniciar a resolução de algumas questões, eles sentiram a necessidade de elencar todas as possibilidades e de contá-las uma a uma.

No que diz respeito ao número de elementos que são utilizados em cada uma das possibilidades das questões, buscou-se provocar reflexões sobre as diferentes estruturas dos problemas. A pesquisadora chamou atenção para o fato de que em alguns problemas (Permutação) é necessário utilizar todos os elementos em todas as possibilidades. Diferente dos outros (Produto Cartesiano, Combinação e Arranjo), nos quais em cada possibilidade são usados apenas alguns dos elementos. Em todas as questões a pesquisadora perguntou se era necessário usar todos os elementos ou apenas alguns em cada possibilidade. Os participantes evidenciaram dificuldade em perceber que precisam utilizar todos os elementos para realizar as permutações, principalmente na questão em que era necessário permutar as letras AJVC. Nos demais significados não houve dúvidas sobre a quantidade de elementos usados em cada possibilidade.

Os estudantes, de um modo geral, apresentaram dificuldades em compreender que na Combinação a ordem dos elementos não cria novas possibilidades. Já nos problemas que envolvem o Arranjo, os alunos identificaram com facilidade que a ordem é um fator determinante.

Todos os participantes que fizeram parte dos grupos que usaram as duas representações simbólicas (listagem e árvore de possibilidades) consideraram que a árvore de possibilidades ajuda na melhor compreensão e organização das resoluções. Após as intervenções, foi realizado individualmente, o pós-teste, composto por oito questões, as quais foram descritas no método.

Pós-teste

Nas análises dos pós-testes, foi possível perceber avanços nos desempenhos de todos os estudantes, uma vez que apresentaram um maior número de acertos, parciais e totais, do que no pré-teste. Em diversas questões, observou-se a obtenção de acertos parciais, isto é os alunos não conseguiram atingir o acerto total, mas demonstraram ter compreendido o que o problema havia solicitado, entretanto não encontraram todas as possibilidades de respostas. Abaixo é apresentado um exemplo (Figura 1) que demonstra essa situação de acerto parcial no pós-teste. Além disso, também é possível, ao se observar a Figura, comparar o desempenho do estudante antes e depois da intervenção. Primeiro, à esquerda, pode-se visualizar o desempenho do aluno em um problema do pré-teste e à direita o seu procedimento no pós-teste. Ambas as questões possuem a mesma estrutura e abordam o Produto cartesiano.

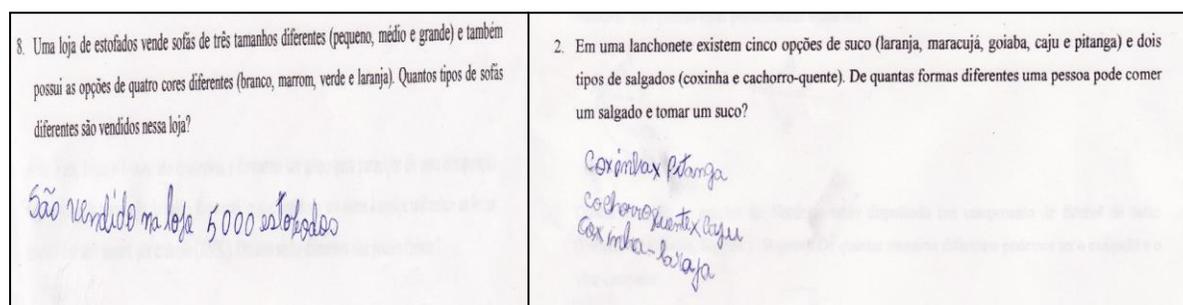


Figura 1: Resolução de um mesmo participante no pré-teste (esquerda) e no pós-teste (direita), onde no pós-teste é apresentado acerto parcial.

Na resolução apresentada acima, pode-se perceber o progresso do desempenho do estudante, uma vez que no pré-teste sua resposta não demonstra relação alguma com o que é pedido pelo problema, enquanto que na situação do pós-teste, ele lista algumas possibilidades adequadas à situação, evidenciando certa compreensão, ainda incipiente, uma vez que ainda não é verificado o uso de alguma estratégia que garantisse que o número total de possibilidades fosse identificado.

A seguir é apresentado o Quadro 2, onde se pode observar o número de acertos de cada grupo no pré-teste e no pós-teste.

Quadro 2: Acertos de cada grupo de intervenção no pré-teste e no pós-teste

Percentual (número) de acertos totais e parciais de cada grupo no pré-teste e pós-teste				
Grupos (Formas de intervenção)	Pré-teste		Pós-teste	
	Acertos totais	Acertos parciais	Acertos totais	Acertos parciais
Grupo 1 (listagem → árvore)	6,25% (1)	43,75% (7)	43,75% (7)	56,25% (9)

Grupo 2(árvore→listagem)	0	18,75% (3)	50% (8)	37,5% (6)
Grupo 3 (árvore e listagem)	0	0	31,25% (5)	56,25% (9)
Grupo 4 (apenas listagem)	0	18,75% (3)	31,25% (5)	62,5% (10)
Grupo 5 (apenas árvore de possibilidades)	0	12,5% (2)	43,75% (7)	37,5 % (6)

O Quadro 2 mostra que todos os grupos apresentaram acertos totais no pós-teste, diferentemente do pré-teste em que um único aluno acertou apenas uma das questões. Também é percebido um aumento dos acertos parciais nos cinco grupos. O que aponta que a intervenção ajudou os participantes a refletir melhor, auxiliando no desenvolvimento do raciocínio combinatório. Devido ao pequeno número de participantes de cada grupo de intervenção, não foi possível observar diferenças significativas entre os desempenhos dos grupos que possam ser atribuídas à organização das representações simbólicas utilizada em cada um desses grupos.

Entre os tipos de respostas, não foram mais encontradas respostas em branco. Em grande parte das questões, os estudantes apresentaram respostas que possuíam relação com o que era exigido pela situação-problema.

Embora todos os participantes tenham passado a fazer uma identificação de um número maior de possibilidades, quando comparados aos seus desempenhos nos pré-testes, o esgotamento de possibilidades ainda permaneceu como uma das dificuldades mais evidentes. Os alunos também apresentaram dificuldades na percepção de quando a ordem dos elementos não gera a obtenção de novas possibilidades, o que é característico dos problemas de Combinação. O maior nível de dificuldade foi observado na resolução dos problemas de Permutação, em que se faz necessária a utilização de todos os elementos em cada uma das possibilidades. Dessa forma, as questões que envolviam o significado da Permutação foram as que apresentaram os maiores números de erros totais.

Todos os participantes utilizaram as representações que foram trabalhadas nas intervenções. A Figura 2, abaixo, apresenta as resoluções de problemas de Arranjo, realizadas por um mesmo participante, no pré-teste (à direita) e no pós-teste (à esquerda). Na questão do pré-teste o aluno não expressa ter compreendido o problema, já no pós-teste utiliza adequadamente a árvore de possibilidades, apresentando acerto total na questão.

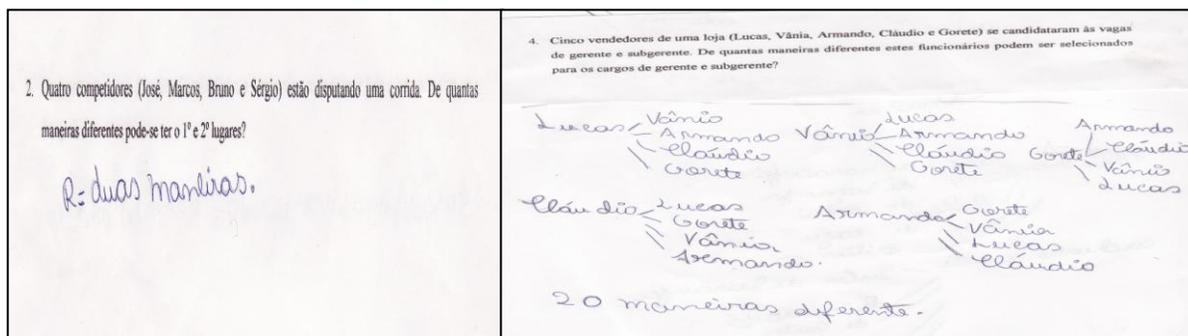


Figura 2: Resolução de um mesmo participante no pré-teste (esquerda) e no pós-teste (direita), onde no pós-teste a árvore de possibilidades é usada adequadamente.

No que diz respeito às estratégias de resolução, não foram mais verificados o uso do número de elementos de um conjunto como resposta, assim como não foram usadas as somas dos elementos dos conjuntos. Percebeu-se que houve a preocupação de alguns estudantes em buscar estratégias que os auxiliassem a encontrar todas as possibilidades, procurando garantir, desse

modo, que nenhum elemento deixasse de ser utilizado. Abaixo segue um exemplo (Figura 3), onde o estudante, em uma questão do pós-teste abrevia a escrita das possibilidades, como estratégia de agilizar a sua resposta. Para comparar o desempenho desse participante antes e depois da intervenção, apresentam-se duas questões de mesma estrutura que foram respondidas uma no pré-teste (à direita) e outra no pós-teste (à esquerda), ambos são problemas que envolvem a Combinação.

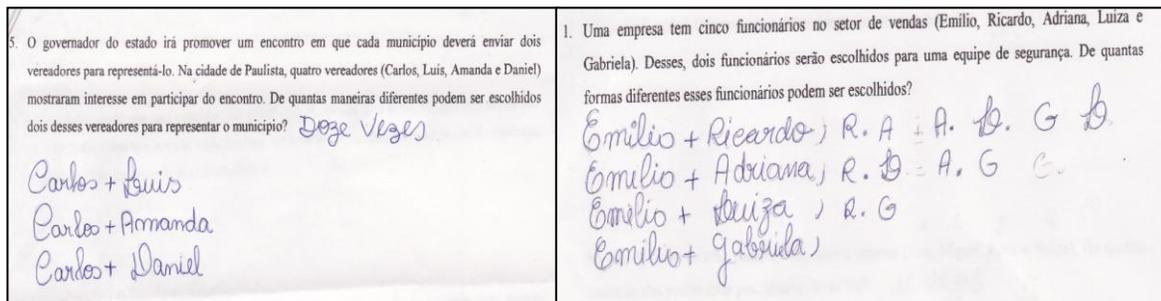


Figura 3: Resolução de um participante no pré-teste (esquerda) e no pós-teste (direita), em que no pós-teste é utilizada a abreviação dos nomes dos elementos e a listagem é feita de modo adequado.

Como pode ser visto na Figura 3, o estudante, na questão do pós-teste, demonstrou uma melhor compreensão sobre o problema, uma vez que procurou esgotar todas as possibilidades que envolviam cada elemento.

CONCLUSÕES

Os resultados obtidos mostram que ao passar por, apenas, uma sessão de intervenção, os estudantes da EJA já apresentam importantes progressos em seus desempenhos. Mesmo aqueles que na intervenção fizeram uso de somente uma forma de representação simbólica, também demonstraram avanços. Quando são considerados os acertos parciais, torna-se mais evidente o desenvolvimento dos participantes acerca da Combinatória. Uma vez que, mesmo quando não chegaram ao acerto total, os alunos, de modo geral, conseguiram identificar possibilidades que integravam as respostas, estabelecendo uma relação adequada com o que era solicitado nas situações.

Ao analisar os pré-testes, foi observado que os alunos apresentavam muitas dificuldades na compreensão dos problemas. Os estudantes não tiveram acertos totais, exceto um deles que acertou uma única questão. Os participantes também apresentaram respostas e estratégias que, no geral, não estavam adequadamente relacionadas com os problemas.

No momento da intervenção, realizou-se em cada um dos cinco grupos uma abordagem diferente em relação às representações simbólicas (listagem e árvore de possibilidades). Nesse primeiro estudo, que foi realizado com dez estudantes (dois em cada grupo), ainda não foi possível verificar a influência de cada forma de organização das representações. O que pode poderá ser melhor identificado, quando for realizado com um número maior de participantes, o que ocorrerá na continuação da pesquisa de mestrado. Nas intervenções, buscou-se chamar a atenção dos estudantes para aspectos fundamentais na resolução dos problemas de Combinatória, a fim de superar as dificuldades identificadas nos pré-testes. Os estudantes dos grupos que experimentaram o uso das duas representações consideraram que a árvore de possibilidades favorece uma organização que ajuda a compreender, de maneira mais clara, os procedimentos das resoluções.

Os pós-testes evidenciaram melhores desempenhos dos estudantes quando comparados aos resultados do pré-teste. Todos os grupos de intervenção apresentaram acertos totais, além de um crescimento dos acertos parciais, mostrando progressos na compreensão das situações.

É evidente, que não se esperava que todas as dificuldades fossem superadas com uma única intervenção, mas os resultados reafirmam a importância de trabalhos sistemáticos para o desenvolvimento de um determinado conceito, que nesse caso diz respeito à Combinatória.

REFERÊNCIAS

- AZEVEDO, J.; COSTA, D. M. E. da; BORBA, R. *O impacto do uso do software Árbol no desenvolvimento do Raciocínio Combinatório nos anos iniciais de escolarização*. Caderno de Trabalhos de Conclusão de Curso de Pedagogia. Recife: UFPE, 2010.
- BARRETO, F. L. S; BORBA, R. *O desenvolvimento do raciocínio combinatório em alunos de um programa de correção de fluxo na modalidade da educação de jovens e adultos*. Anais do VI Encontro Paraibano de Educação Matemática. Monteiro - PB, 9 a 11 de novembro de 2010.
- BRASIL. *Secretaria de Educação Continuada, Alfabetização e Diversidade. Proposta Curricular para a Educação de Jovens e Adultos: Primeiro Segmento do Ensino Fundamental: 1ª a 4ª série*. Brasília: MEC, 2002.
- FONSECA, M da C. F. R. *Educação Matemática de jovens e adultos: especificações, desafios e contribuições*. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.
- LIMA R; BORBA, R. *O raciocínio combinatório de alunos da educação de jovens e adultos: do início da escolarização até o ensino médio*. In: Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática (X ENEM). Bahia, 2010.
- MARTINS, G. V; BORBA, R. *Livros didáticos de alfabetização de jovens e adultos: um estudo sobre as estruturas multiplicativas*. In: Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática (X ENEM). Bahia, 2010.
- PESSOA, C; BORBA, R. *Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1ª a 4ª série*. ZETETIKÉ – Cempem – FE – Unicamp, v. 17, jan-jun, 2009.
- SCHLIEMANN, A. *A compreensão da análise combinatória: desenvolvimento, aprendizagem escolar e experiência diária*. In: CARRAHER, T. N.; CARRAHER, D. & SCHLIEMANN, A. Na vida dez, na escola zero. São Paulo: Cortez, 1988.
- VERGNAUD, G. *Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didática das matemáticas. Um exemplo: as estruturas multiplicativas*. Análise Psicológica, 1, 1986, p.75-90.