



Matemáticas y Música: Propuesta para el aprendizaje de la función trigonométrica Seno empleando instrumentos tecnológicos¹

Pablo Esteban **Arias** Vargas
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Colombia
pabloestebanariasvargas@hotmail.com

Jorge Isidro **Orjuela** Bernal
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Colombia
jorgelicmat@gmail.com

Resumen

La relación existente entre matemáticas y música es el objeto bajo el cual se desarrolla el presente artículo, se destacan tanto el aprendizaje como los instrumentos tecnológicos.

Dicha relación es considerada el contexto para proponer una serie de actividades con las cuales se pretende ayudar a generar aprendizaje de la representación de la función trigonométrica Seno, es un trabajo llevado a cabo por medio de la Investigación Acción, logrando así consolidar una propuesta en torno al aprendizaje de dicha función para estudiantes de décimo grado, destacando algunas características y ventajas que genera el implementar el uso de instrumentos tecnológicos en el aula.

Palabras clave: matemáticas, trigonometría, acústica, sistemas de representación, tecnologías de la información.

¹ El siguiente trabajo es una breve descripción referente a la monografía de grado que lleva el mismo título y que aún se encuentra en construcción, dicha monografía se realiza como requerimiento para aspirar al título de Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas y que es de nuestra autoría, bajo la dirección de Mancera G. y Peralta B.

Introducción

Al intentar comprender el mundo que nos rodea se ha hecho necesario incluir las matemáticas como un elemento que permita dar explicaciones a algunos de los fenómenos a los que nos vemos enfrentados o simplemente las usamos como una herramienta que nos da la posibilidad de desarrollar diferentes acciones en nuestro diario vivir, al mismo tiempo las expresiones artísticas en sus diversas representaciones también las han incluido, de manera específica las encontramos en la música, en este sentido se pueden establecer algunas relaciones como por ejemplo las descubiertas y evidenciadas por matemáticos como Pitágoras y su escuela de discípulos, quienes estudiaron la naturaleza de los sonidos musicales haciendo sonar algunas cuerdas donde medían sus distancias y generaban relaciones entre las longitudes y sus respectivos sonidos.

Por lo tanto, al momento de establecer relaciones entre las matemáticas y la música, que permitan generar una propuesta de aprendizaje, se destaca la modelación de sonidos por medio de ondas las cuales desde las matemáticas pueden ser representadas por medio de funciones trigonométricas, y de manera más específica por medio de la función trigonométrica Seno.

Planteamiento del problema

Para generar las relaciones antes dichas, es necesario plantear un objetivo el cual está dirigido al hecho de reconocer los procesos de aprendizaje de la función trigonométrica Seno y sus transformaciones, por medio del diseño, aplicación y evaluación de una secuencia de actividades mediada por instrumentos tecnológicos con estudiantes de grado décimo.

La propuesta busca responder a la pregunta ¿Cómo se puede favorecer el proceso de aprendizaje de la función trigonométrica Seno, por medio de una secuencia de actividades mediada por instrumentos tecnológicos y que propicie la representación como modelo de movimientos ondulatorios? De la cual se derivan las siguientes: ¿Qué secuencia de actividades permite se genere aprendizaje de la función trigonométrica Seno en la que se propicie la representación como modeladora de movimientos ondulatorios mediante instrumentos tecnológicos? ¿De qué manera el uso de instrumentos tecnológicos permite una representación de la función trigonométrica Seno?

Ahora bien, al tener en cuenta el aprendizaje de la trigonometría en la escuela, es necesaria la incorporación de representaciones –como la gráfica– que permitan un mejor entendimiento de lo que sucede con el comportamiento de dichas funciones al introducir cambios dentro de las variables tales como la amplitud, el periodo y la frecuencia, en este caso sobre la función trigonométrica Seno. De esta forma se obtienen gráficas que representan un movimiento ondulatorio² el cual permite dar cuenta de la función que se modela.

En este sentido, se ha visto la necesidad de generar nuevos espacios de aprendizaje de las funciones trigonométricas en los que sea posible un entendimiento de las características de las gráficas, donde se incorpore herramientas tecnológicas como software que permitan una

² De acuerdo a Stewart (2005) éste es definido normalmente como la propagación de una onda sobre un determinado medio, comportamiento que se repite una y otra vez. (p. 442)

precisión a la hora de generar (simular) ondas producidas por sonidos, es así como se llega a concebir la forma de la onda dada por distintos sonidos –pregrabados o producidos en vivo- que después será expresada en relación a la función trigonométrica Seno.

Se ha pensado en las funciones trigonométricas, donde sea posible –a partir del uso de instrumentos tecnológicos- generar una nueva forma de entender la representación gráfica de la función trigonométrica Seno, dado que al proponer el uso de nuevos instrumentos, que permitan la modelación matemática de algunos fenómenos tales como el comportamiento de ondas sonoras, es necesario determinar tanto las falencias como las fortalezas que poseen los estudiantes al enfrentarse al concepto función y a la transición posible entre los diferentes sistemas de representación.

Marco teórico

Al considerar un contexto en el que se permita el desarrollo conceptual de la función trigonométrica Seno y sus transformaciones, se tiene en cuenta a Duval (1998), quién afirma que toda actividad matemática implica el recurso a representaciones porque no todos los objetos matemáticos y de estudio son accesibles al entendimiento de forma intuitiva.

De acuerdo a este mismo autor, el conocimiento matemático se puede representar bajo diferentes formas y pocos estudios se centran en la operación de cambiar la forma a través de la cual un conocimiento es representado. De esta manera, se puede concluir que el punto principal de las actividades matemáticas se centra en la capacidad para pasar de un registro de representación a otro.

San Martín (2006) citando a Duval, denomina “semiosis” a la aprehensión o a la producción de una representación semiótica y afirma que para que un sistema semiótico pueda ser un registro de representación debe permitir las tres actividades cognoscitivas fundamentales ligadas a la semiosis, a saber:

- Formación de una representación identificable como una representación de un registro dado.
- Tratamiento de la representación, esto es, la transformación de la representación realizada en el mismo registro en que ha sido formulada. El tratamiento es una transformación interna a un registro.
- Conversión de la representación es la transformación de la representación en una representación de otro registro, conservando la totalidad o una parte solamente del contenido de la representación inicial; La conversión es una transformación externa a un registro. (p. 5)

En este sentido, se puede afirmar que el trabajo desarrollado por este proyecto constituye las condiciones para que se considere un registro de representación semiótica dado que permite las tres operaciones cognoscitivas básicas ligadas a la semiosis, donde estas se dan como:

- Establece una representación de un registro dado.
- Se da una representación donde se asocia con una transformación interna, de esta forma se genera un tratamiento al interior del mismo registro donde se ha formulado.

- Se dan conversiones y/o transformaciones exteriores al registro original, entre la representación.

De la misma forma se tiene en cuenta a Duval (s.f.), cuando afirma que [...] *no existe comprensión en matemáticas sin la capacidad de cambiar de tipo de representación* (p.11)

Es así como se presenta un registro gráfico, el cual es entendido como una representación donde se tiene una serie de ondas las cuales pertenecen a sonidos específicos, en esta dirección se debe encontrar una representación algebraica la cual permita modelar la forma de la onda que se presenta.

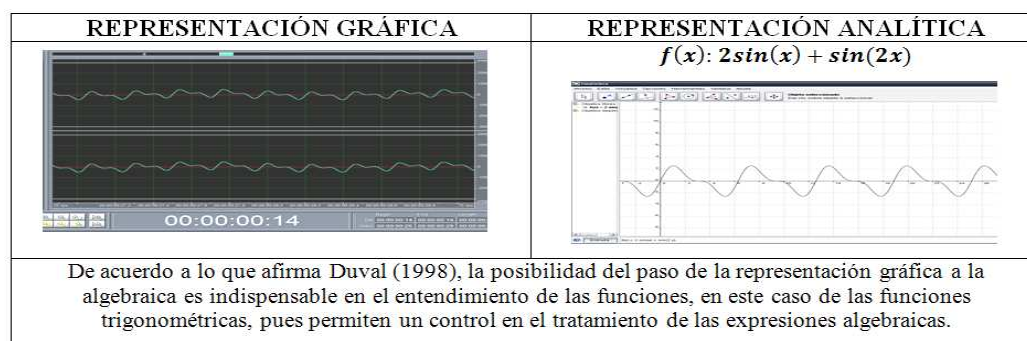


Figura 1: Comparación entre los dos software a usar: Cool Edit 2.1 y GeoGebra

Ahora bien, se señala de acuerdo a Ardila (2006), una serie de características que poseen los diferentes sistemas de representación de esta manera se tiene:

- Representación verbal: utiliza el lenguaje común y permite una descripción generalmente cualitativa de la relación funcional y es utilizada comúnmente cuando se quiere dar a conocer una interpretación de las restante representaciones.
- Representación tabular: permite una visión cualitativa y es fácilmente interpretable desde la óptica de una correspondencia, por que se pueden observar pares de valores, sin embargo la interpretación que permite es parcial puesto que de ella difícilmente se pueden extraer las características globales de la función.
- Representación gráfica: permite obtener una mejor visión de la función, muestra características globales como la continuidad, la concavidad, máximos y mínimos relativos, aunque en algunos casos estas características son aproximadas.
- Representación analítica o la ecuación: también permite ver las características que muestra la representación gráfica, pero ello depende del manejo algebraico que se tenga y en algunos casos de conocimientos de cálculo. (p. 23)

Por lo tanto, se tiene que, de acuerdo a las formas de representación que establece Duval (1998), y las caracterizaciones que realiza Ardila (2006), se resaltan las distintas representaciones por las que se hace transición para generar el proceso de enseñanza y aprendizaje de las gráficas de las funciones trigonométricas, en este caso, la función trigonométrica Seno, de esta forma, es necesario identificar qué tipo de tratamiento los estudiantes generan en un registro, destacando que las transformaciones de la representación hacen parte de un tratamiento en un mismo registro, donde se debe tener en cuenta dentro del

desarrollo de la propuesta transformaciones de las gráficas en la medida en que se habla de traslación de funciones, (corrimiento vertical y horizontal), estiramientos (horizontal y vertical), es así como se esbozan algunos ejemplos gráficos realizados en GeoGebra de dichos elementos a abordar.

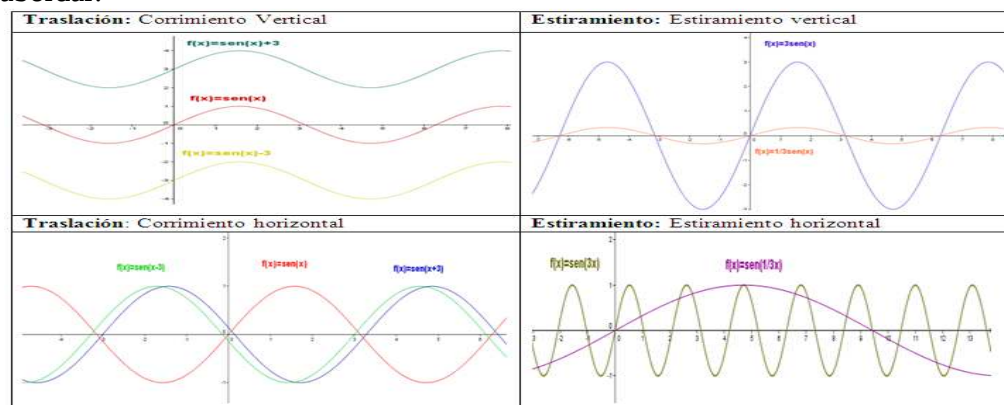


Figura 2: Representaciones en GeoGebra de las diferentes traslaciones de una determinada función.

En esta medida, se indaga por la forma en cómo los estudiantes llevan a cabo el aprendizaje de la representación gráfica de las transformaciones de la función Seno, aquí se involucran los elementos descritos anteriormente y se espera que el estudiante logre identificar que pasa al combinar estos elementos entre sí. Para ello también se resalta lo mencionado Godino, Batanero y Font (2003), quienes afirman que los procesos matemáticos aparecen en la actividad matemática cuando el sujeto interacciona con las situaciones - problemas, bajo cualquier tipo de contexto y de situación. Es así como se resalta la importancia de los procesos matemáticos. Desde:

- Resolución de problemas (implica la exploración de posibles soluciones, modelización de la realidad, desarrollo de estrategias y aplicación de técnicas).
- Representación (uso de recursos verbales, simbólicos y gráficos, traducción conversión entre los mismos).
- Comunicación (diálogo y discusión).
- Justificación (con distintos tipos de argumentaciones inductivas, deductivas, etc.).
- Conexión (establecimiento de relaciones entre distintos objetos matemáticos)

Ahora bien, al entender lo que sucede con el comportamiento de una onda sonora, implícitamente también se está entendiendo lo que se puede expresar por medio de la modelación de la función trigonométrica Seno, dado que de acuerdo con Crowell (2009), las ondas sinusoidales permiten “descomponer” cualquier tipo de onda periódica sin importar su frecuencia como una superposición de ondas sinusoidales, concluyendo que las ondas sinusoidales son la base de las demás ondas.

Lloreda F. (s.f), destaca que la tecnología además de revolucionar el conocimiento matemático evidencia por medio de diferentes estudios [...] *su impacto cognitivo en el aprendizaje, dado el poder expresivo que las herramientas computacionales poseen.*

A partir de las consideraciones dadas anteriormente se da paso a los instrumentos tecnológicos en si:

COOL EDIT PRO 2.1: Al ser uno de los instrumentos tecnológicos que se emplea en la propuesta, se destaca que permite evidenciar el comportamiento de las ondas sonoras en la medida en que se produce un sonido, bien sea desde una reproducción en vivo (hacer sonar un instrumento) o desde una reproducción con sonidos pregrabados (sonidos grabados previamente); siendo este software un generador y reproductor de las ondas sonoras, las cuales en la mayoría de las ocasiones se muestran de forma sinusoidal o en forma de suma de funciones trigonométricas (Seno y Coseno).

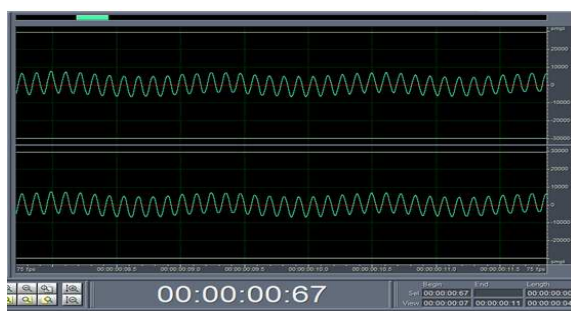


Figura 3: Tono MI, visualizado en Cool Edit 2.1.

GEOGEBRA: Es un instrumento tecnológico que reúne geometría, álgebra y cálculo el cual permite la enseñanza de matemática escolar. Al ser un software que posee varias características hace que los estudiantes generen tratamientos en un mismo registro de distintas funciones, donde es posible evidenciar los cambios deseados respecto a la representación gráfica de la función trigonométrica Seno.

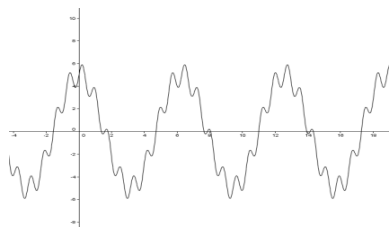


Figura 4: Representación en GeoGebra de una función trigonométrica compuesta.

Por lo tanto al establecer relaciones entre los dos software y la función trigonométrica Seno, se realizan modelaciones (a partir de los distintos tipos de registro) en las que se tiene en cuenta la curva producida por un sonido determinado y los posibles desarrollos a nivel matemático que se generan a partir de la función Seno, destacando que se tiene en cuenta la relación entre el tratamiento entre un registro para poder hacer la conversión a otro registro, a modo de ejemplo, el hacer la conversión del registro gráfico al registro algebraico y viceversa.

Metodología

La metodología que se llevó a cabo es la Investigación Acción, en la cual se tienen en cuenta los ciclos en las planeaciones, Lewin (1946 citado por Latorre (2003)), afirma que ésta consiste en ciclos comprendidos por cuatro fases, planificar, actuar, observar y reflexionar. Es de

esta forma como la presente investigación toma el mismo rumbo, es decir, el proceso se convierte en ciclos, una vez completado un ciclo, se reflexiona si éste permite el avance a otro momento, en caso de que se haya encontrado alguna falencia, es necesario planear de nuevo y cumplir con las fases reiteradamente, esto teniendo en cuenta las reflexiones hechas con anterioridad para que no se presenten falencias nuevamente.

Parte de la investigación (pilotaje) fue desarrollada en un Colegio Distrital en Bogotá-Colombia, el colegio fue seleccionado debido a que ya se había tenido un trabajo previo con los estudiantes de grado décimo, es así como de acuerdo al currículo, en este grado es donde se genera el aprendizaje de las funciones trigonométricas. Los participantes fueron quince estudiantes de edades entre quince y dieciséis años, quienes estuvieron en diez sesiones de trabajo, los cuales eran distribuidos en grupos de tres estudiantes.

Recolección y Análisis de Datos

Los materiales que se usaron hacen parte de los instrumentos para la recolección de datos, éstos fueron puestos en ejecución en la medida en que se aplicaba la propuesta y dependen de los momentos que se asignen en la metodología, de forma general atienden a:

Guías³: Descripción de las actividades: Las guías fueron elaboradas de tal forma que se presentaba en orden la temática, los objetivos, una breve explicación de lo que se pretendía generar, así mismo un tutorial que permitía definir la forma en cómo se utilizan los instrumentos tecnológicos;

Guías de estudiantes: En algunos momentos se presentaron como guías de trabajo las cuales permitieron que se recolectaran los datos necesarios para el análisis, pues en éstas se generaban preguntas orientadoras (estas preguntas se hacían de forma rigurosa y específica, donde se cuestionaba de forma específica por algún aspecto), las cuales eran resueltas de forma escrita, en ocasiones los estudiantes generaban gráficos como forma de explicación, algunas guías de estudiantes eran sustentadas mediante la ejecución de procesos en los software.

Videos de las interacciones entre profesores y estudiantes: algunos de las sesiones fueron grabadas en video, esto se hacía de forma general en el salón de clase, asimismo se utilizaban fotogramas los cuales daban evidencias de las acciones ejecutadas por los estudiantes mediante el manejo de los software propuestos, es de esta forma como eran analizados posteriormente generando relaciones entre la expresión algebraica y la representación gráfica.

Software: Siendo específicos, se emplea el software GeoGebra en la representación gráfica de las funciones, de esta forma se introducen las funciones de tal manera que se pueda hacer la transición de la representación analítica a la representación gráfica. Respecto a Cool Edit 2.1, se tiene en cuenta únicamente la representación de las ondas, donde estas se muestran de acuerdo a las melodías que se estén ejecutando.

³ Consideramos guías a una serie de material físico el cual tiene una contextualización de las temáticas que se aborden, asimismo se presenta los objetivos de lo que se pretende con la guía y la vez una serie de actividades que refuerzan el tema a tratar.

El análisis de los resultados fue llevado a cabo por medio de los criterios generados en cada una de las guías de trabajo, donde se hacía la descripción de cada uno de los momentos junto con criterios de evaluación que permitían la clasificación del desarrollo generado por cada uno de los estudiantes, estas fueron respaldadas por unas categorías de análisis las cuales fueron creadas previamente.

Resultados

Estos fueron producto de un pilotaje donde se pretendió aplicar cada una de las actividades planificadas, en este sentido se desarrolló quince sesiones en un tiempo aproximado de dos meses. El objetivo de que se aplicara la prueba piloto atendía a la metodología de la investigación, la cual es la Investigación Acción.

Para dar cuenta del proceso de aprendizaje en los estudiantes, se hizo necesario generar comparaciones entre nociones iniciales y nociones finales, esto por medio de dos entrevistas estructuradas hechas respectivamente, en este sentido, se pudieron clasificar algunos resultados de acuerdo a los criterios establecidos al final de cada actividad.

Tabla 1

Categorías asociadas a las respuestas dadas por los estudiantes

Categorías	Sub Categorías	Resultados por parte de los estudiantes
Categoría 0	<i>Relaciones intuitivas (iniciales)</i>	Al inicio de la puesta en práctica de la propuesta, catorce estudiantes no generaron ninguna relación entre las ondas sonoras y la trigonometría, de esta forma no reconocían ninguna relación entre la representación gráfica y la representación algebraica de las ondas sonoras.
Categoría 1	<i>Representación de Registro</i>	Después de cinco sesiones, en las que se trabajó teoría de ondas y un poco de trigonometría, donde se hicieron distintos experimentos, diez estudiantes reconocieron las relaciones entre las ondas sonoras presentadas y la representación de la función trigonométrica Seno. Estas ondas fueron presentadas sin transformaciones de las gráficas, donde las ondas fueron producidas por tonos sencillos generando gráficas sencillas (por ejemplo representación gráfica de la función Seno).
	<i>Sub Categoría manejo de software</i>	Durante las siete primeras sesiones, los estudiantes fueron capaces de manipular el software GeoGebra generando de esta forma una representación de la gráfica dada (una onda sinusoidal de forma sencilla), donde reconocían algunas de las características (como por ejemplo el periodo y la amplitud de la onda).

Categoría 2	<i>Transformación Interna</i>	En esta categoría, así como afirma San Martín (2006), se da una representación donde se asocia con una transformación interna, se genera un tratamiento al interior del mismo registro donde se ha formulado. En este sentido, cerca ocho estudiantes consideraron las relaciones existentes entre las gráficas presentadas y las funciones trigonométricas, es así como fueron capaces de concebir y hacer el respectivo tratamiento de ondas que en su representación gráfica se mostraron con transformaciones, como por ejemplo las ondas producidas por varios sonidos a la vez, que se muestran como una suma de funciones trigonométricas (suma de gráficas Seno, a modo de ejemplo $f(x): 2\sin(x)+\sin(2x)$).
	<i>Sub Categoría Manejo de Software</i>	Los estudiantes hicieron el respectivo tratamiento de una función inicial, a la cual le generaron los procedimientos correspondientes, de tal forma que estos se relacionaban con las ondas presentadas inicialmente, es así como los estudiantes entendieron la forma en cómo se modificaba la amplitud y la periodicidad de la función (por ejemplo GeoGebra permite que se pueda modificar una gráfica y éste a la vez muestra una representación algebraica). En esta dirección los estudiantes, verificaron el comportamiento de la representación gráfica de las ondas generando operaciones como la suma de las funciones encontradas.
Categoría 3	<i>Conversiones (C) y/o Transformaciones Exteriores</i>	En las últimas sesiones, doce estudiantes relacionaron la representación gráfica con una representación analítica, logrando generar la transición entre el registro gráfico al analítico y del analítico al gráfico, así como afirma Duval (s. f), <i>No existe comprensión en matemáticas sin la capacidad de cambiar de tipo de representación(...)</i> de esta forma, en la medida en que los estudiantes lograron tratar y convertir los distintos registros se evidenció la construcción de conocimiento sobre el objeto tratado.
	<i>Sub Categoría C, TE: Manejo del Software</i>	Finalmente, cerca de doce estudiantes entendieron las relaciones existentes entre los tipos de representación, de esta forma, iniciaron por medio de una expresión analítica (desde donde empezaron generando un patrón algebraico) al cual le hicieron algunas transformaciones logrando que éstas en su representación gráfica tomara la forma esperada.

Conclusiones⁴

Se logró consolidar una propuesta en torno al aprendizaje de la función trigonométrica Seno y sus transformaciones -con estudiantes de grado décimo- la cual estuvo mediada por el uso de instrumentos tecnológicos en nuestro caso el software GeoGebra y Cool Edit Pro 2.1; a partir de reconocer la relación existente entre las matemáticas y la música.

⁴ Se señala que las conclusiones que se presenten en el presente artículo, corresponden a lo realizado hasta el momento en la monografía, resaltando nuevamente que se encuentra en construcción y por lo tanto sujeta a cambios; así mismo los datos obtenidos provienen del pilotaje realizado.

La puesta en práctica de la propuesta ha permitido establecer algunas características y ventajas al implementar el uso de instrumentos tecnológicos en el aula, como por ejemplo, se reconoce una mayor manipulación y mejor entendimiento de la representación gráfica de la función trigonométrica Seno por parte de los estudiantes, así mismo se destaca que se logra captar mucho más su atención debido a que la forma en como se desarrollaron las clases no es lo que tradicionalmente se hace en clase de matemáticas.

Se contribuyó al desarrollo en los estudiantes de la noción de la función trigonométrica Seno como modeladora de movimientos ondulatorios, a partir del eje central del trabajo –la relación entre matemáticas y música– reconociendo las características de sus procesos de aprendizaje.

A modo de observación:

Limitaciones:

En la investigación se pronosticó que serían dos sesiones de clase en las que se enseñaría acerca del tratamiento de los software, ocurrió que algunos estudiantes poco conocían de computadores y evidentemente de los software un poco menos, lo que prolongó la aplicación de la planeación a cinco sesiones.

El colegio donde se aplicó la propuesta contaba con equipos de computación en óptimas condiciones, lo que facilitó la aplicación de la propuesta.

Alcances del estudio (alcances a futuro):

Se espera que la propuesta pueda ser aplicada en otras instituciones y con la misma se permita el aprendizaje de la representación gráfica de la función trigonométrica Seno, incluso se prevé puede ser usada como material de apoyo al enseñar lo correspondiente al movimiento armónico simple y teoría de ondas.

REFERENCIAS

Ardila B. (2006), Aproximación al concepto de función mediante la modelación de problemas experimentales: movimiento uniformemente variado. Tesis de Grado para obtener el título de Licenciada en Matemáticas. Universidad Pedagógica Nacional.

Crowell Benjamin. (2009), Vibrations and Waves. Book 3 in the Light and Matter series of free introductory physics textbooks. www.lightandmatter.com

Duval R. (s. f), La conversión de representaciones: uno de los dos procesos fundamentales del pensamiento.

Duval R. (1998), Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed.), Investigaciones en Matemática Educativa II (pp. 173-201). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Godino. J; Batanero. C; y Font. V. (2003) Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros. Departamento de Didáctica de la Matemática. Facultad de Ciencias de la Educación Universidad de Granada. (España) Disponible en: <http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/>

Latorre A. (2003), Investigación Acción. Conocer y cambiar la práctica educativa. Ed. Graó España, Disponible en la web en [articulo_latorrecap2.doc](http://www.avm.cl/attachments/093_articulo_latorrecap2.doc) - :: AVM - Apoyo Virtual en Matemática ...http://www.avm.cl/attachments/093_articulo_latorrecap2.doc (p. 11)

Lloreda M. J (s. f). Publicaciones Formación de Docentes sobre el Uso de Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas Francisco José, Ministro de Educación Nacional.

San Martín. (2006), Un Registro De Representación Semiótica De Naturaleza Geométrica Para La Trigonometría. Disponible en la web en <http://www.comie.org.mx/congreso/memoria/v9/ponencias/at05/PRE1178828913.pdf>.

Stewart J. (2005), Pre-Cálculo de Stewart. Quinta Edición. Editorial Thomas. México.