



Resgate histórico dos ternos pitagóricos como ferramenta pedagógica para compreensão do Teorema de Pitágoras¹

Georgiane Amorim **Silva**
Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Brasil
georgianeamor@hotmail.com

Resumo

Historicamente, o Teorema de Pitágoras é ligado aos ternos pitagóricos, assunto que foi motivo de estudo de ilustres personalidades, como por exemplo, Pitágoras, Platão, Euclides, Diofanto, Fermat e o pouco conhecido Eugène Bahier. Considerando que para responder adequadamente aos diversos desafios que serão levantados no decorrer da prática docente, o professor de Matemática necessita de um conhecimento mais amplo, ou seja, necessita de um maior aprofundamento do que tem de ensinar e necessita fazer uso da História da Matemática como recurso pedagógico. Nesse contexto, propomos a aplicação da oficina “Resgate histórico dos ternos pitagóricos como ferramenta pedagógica para o ensino do Teorema de Pitágoras”, com o intuito de proporcionar aos pesquisadores, professores, educadores e estudantes de Matemática e demais interessados que utilizam a Educação Matemática como trabalho, estudo ou pesquisa, uma maior compreensão do Teorema de Pitágoras, tendo como enfoque os ternos pitagóricos sob uma apresentação histórica.

Palavras chave: História da Matemática, Ternos Pitagóricos, Teorema de Pitágoras, Teoria dos Números, Formação de Professores.

Introdução

Particularmente, em relação às funções que a história pode desempenhar em situações no ensino de Matemática, os Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1998), consideram várias, tais como o desenvolvimento de atitudes e valores mais favoráveis diante do conhecimento matemático, o resgate da própria identidade cultural, a compreensão das relações entre tecnologia e herança cultural, a constituição de um olhar mais crítico sobre os objetos

¹ O trabalho a ser apresentado faz parte de uma intervenção pedagógica que fora elaborada e aplicada durante o mestrado sob orientação do professor Dr. John Andrew Fossa.

matemáticos, a sugestão de abordagens diferenciadas e a compreensão de obstáculos encontrados pelos alunos. São vários os autores interessados pelo uso da História da Matemática como recurso pedagógico. Dentre eles podemos citar Fossa (2001), Mendes (2001), Miguel e Miorim (2004). No último, afirma-se que:

Muitos autores defendem a importância da história no processo de ensino-aprendizagem da matemática por considerar que isso possibilitaria a desmistificação da Matemática e o estímulo à não alienação do seu ensino. Os defensores desse ponto de vista acreditam que a forma lógica e emplumada através da qual o conteúdo matemático é normalmente exposto ao aluno, não reflete o modo como esse conhecimento foi historicamente produzido. Então, caberia à história estabelecer essa consonância desmistificando, portanto, os cursos regulares de Matemática, que transmitem a falsa impressão de que a Matemática é harmoniosa, de que está pronta e acabada, etc. (Miguel & Miorim, 2005, p.52).

Historicamente, o Teorema de Pitágoras é ligado aos ternos pitagóricos, assunto que foi motivo de interesse de ilustres personalidades, como por exemplo, Pitágoras, Platão, Euclides, Diofanto, Fermat e o pouco conhecido Eugène Bahier. É provável que alguns ternos pitagóricos fossem conhecidos antes do que o próprio Teorema de Pitágoras. O terno (3,4,5), por exemplo, seria facilmente encontrado aritmeticamente e isto poderia ter incentivado uma busca para outros ternos.

Em especial, com relação ao triângulo pitagórico de lados 3, 4 e 5, Fossa (no prelo), destaca que

É o único para que os lados são números consecutivos. Sua área é 6, o próximo número da seqüência numérica, e seu perímetro é duas vezes sua área. O produto dos seus lados é 60, 6 vezes sua área e a base do sistema de numeração babilônico. Mais interessante ainda, o produto dos lados de qualquer triângulo pitagórico é divisível por $60 = 3 \times 4 \times 5$. (Fossa, no prelo)

Essas relações do menor triângulo pitagórico (3, 4, 5) com o número 60, base do sistema de numeração babilônico, pode ser uma justificativa plausível para entender o fato de que esse caso particular era conhecido pelos babilônios antes dos pitagóricos.

Com base no que é chamado de hipótese de van der Waerden-Seidenberg, consideramos que a chave da investigação sistemática dos ternos pitagóricos poderia ser achada, com a descoberta do próprio Teorema. Segundo Fossa (no prelo), a referida hipótese afirma, em parte, que os triângulos pitagóricos tiveram um papel fundamental na matemática pré-histórica.

No que diz respeito ao ensino do referido Teorema, Silva (2009) destaca que a mecanização do ensino do Teorema de Pitágoras, desprovida do desenvolvimento histórico e da construção significativa, contribui para com a deficiência no ensino do mesmo. Com isso, consideramos que para responder adequadamente aos diversos desafios que são levantados no decorrer da prática docente, o professor de Matemática, necessita de um conhecimento mais amplo, ou seja, necessita de um maior aprofundamento do que tem de ensinar e necessita fazer uso da História da Matemática como um fio unificador que liga vários tópicos de matemática num todo que é significativo para o aluno.

Nesse contexto, propomos aplicar a oficina “Resgate histórico dos ternos pitagóricos como ferramenta pedagógica para o ensino do Teorema de Pitágoras”, com um enfoque histórico, tendo como referencial a obra *Recherche méthodique et propriétés des triangles rectangles en nombres entiers*, de Eugène Bahier (1916), em que o conceito é estudado de forma sistemática.

Desenvolvimento da oficina

A oficina “Resgate histórico dos ternos pitagóricos como ferramenta pedagógica para o ensino do Teorema de Pitágoras” será desenvolvida tendo como público alvo pesquisadores, professores, educadores e estudantes de Matemática e demais interessados que utilizam a Educação Matemática como trabalho, estudo ou pesquisa. O conteúdo central será os ternos pitagóricos.

O objetivo geral da oficina é oferecer aos participantes uma prática que possibilite a reflexão da utilização dos ternos pitagóricos como uma ferramenta pedagógica no ensino do Teorema de Pitágoras.

Por sua vez, estabelecemos os seguintes objetivos específicos:

1. Apresentar o desenvolvimento histórico do Teorema de Pitágoras;
2. Discutir sobre a importância do Teorema de Pitágoras, no ensino de Matemática, bem como suas aplicações.
3. Definir os ternos pitagóricos;
4. Estabelecer a importância do estudo dos ternos pitagóricos para a futura prática docente;
5. Promover o uso da História da Matemática como recurso pedagógico e não apenas como elemento motivador;

No que diz respeito à metodologia, será apresentada uma aula expositiva, considerando como sendo um dos recursos e não o único. Entretanto, com o intuito de obter uma boa produtividade, serão realizadas algumas atividades, tais como, exercícios por escrito e solicitação de exposições orais por parte dos ouvintes. No decorrer da oficina, fornecemos algumas dicas de dinâmicas de grupo e metodologias que podem ser úteis à prática docente.

Conteúdos a serem desenvolvidos

Silva (2009) em sua pesquisa de mestrado constatou o potencial pedagógico presente na inter-relação histórica entre os ternos pitagóricos e o Teorema de Pitágoras. A referida inter-relação quando enfocada no ensino do Teorema de Pitágoras, segundo Silva (2009), proporciona uma melhor compreensão do conceito do conteúdo matemático em tela. Com isso, considerando tais inferências e a importância do uso da História da Matemática nas aulas de Matemática, a oficina que propomos, assume um caráter histórico.

O problema geral a ser focado é as propriedades dos conjuntos dos três números inteiros positivos que satisfazem a relação $a^2 + b^2 = c^2$. Para tal, se faz necessário apresentar algumas definições e propriedades fundamentais, conforme descreveremos na presente sessão.

Triângulo retângulo em números inteiros é todo triângulo retângulo cujos três catetos são mensuráveis conforme uma unidade convenientemente escolhida, podendo ser expressa por

números inteiros e que traduzindo em linguagem aritmética, retoma oferecer a consideração das soluções através dos números inteiros da relação $a^2 + b^2 = c^2$ (I), que existe entre os três lados de um triângulo retângulo

As condições dos termos de $a^2 + b^2 = c^2$ (I) são: a , b e c são inteiros, primos entre si, dois a dois;

Relação primitiva ou triângulo primitivo é toda relação (I), nas quais a , b e c são números inteiros primos entre si, dois a dois. Por sua vez, relação secundária ou triângulo secundário é toda relação da forma (I) que pode ser reconduzida a uma relação primitiva, dividindo os três termos por seu máximo divisor comum, que é, portanto, um número maior que a unidade;

Um importante teorema que enunciaremos e demonstraremos é o seguinte: “Se entre três números inteiros a , b , c , primos entre si, dois a dois existe a relação $a^2 + b^2 = c^2$, os números a e b são sempre de paridades diferentes, e número c é sempre ímpar”.

Por fim, apresentaremos a relação fundamental $(x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2 = (x^2 + y^2)^2$, considerando x e y primos entre si e de paridades diferentes, podemos obter para a, b, c , valores inteiros para as relações: $a = (x^2 - y^2)^2$ (IV); $b = (2xy)^2$ (V); $c = (x^2 + y^2)^2$ (VI); sendo que esses valores verificam a relação primitiva da forma $a^2 + b^2 = c^2$.

Diante da generalidade da relação fundamental, a saber: “a todo número inteiro maior que dois, tomado por valor de a ou de b , sempre corresponde ao menos um triângulo retângulo em números inteiros, ou seja, um grupo de três números inteiros ligados pela relação $a^2 + b^2 = c^2$ (I)”, emerge a possibilidade da construção de uma Tábua que agrupa valores associados de a , b e c , em função do número gerador x . Particularmente, nessa oficina, construiremos uma tábua agrupando os valores associados de a , b e c , em função de x , permitindo calcular facilmente, os sucessores, considerando $1 \leq x \leq 25$, conforme podemos verificar a seguir.

Tábua que será construída

x	y = x - 1	2(x - 1)	(x - 1) + x	2(x-1)x	b+1
			a	b	c
1	0	0	1	0	1
2	1	2	3	4	5
3	2	4	5	12	13
4	3	6	7	24	25
5	4	8	9	40	41
6	5	10	11	60	61
7	6	12	13	84	85
8	7	14	15	112	113
9	8	16	17	144	145

10	9	18	19	180	181
11	10	20	21	220	221
12	11	22	23	264	265
13	12	24	25	312	313
14	13	26	27	364	365
15	14	28	29	420	421
16	15	30	31	480	481
17	16	32	33	544	545
18	17	34	35	612	613
19	18	36	37	684	685
20	19	38	39	760	721
21	20	40	41	840	841
22	21	42	43	924	925
23	22	44	45	1012	1013
24	23	46	47	1104	1105
25	24	48	49	1200	1201

Repercussões esperadas pela oficina

Intencionamos possibilitar aos participantes da oficina, uma melhor compreensão do Teorema de Pitágoras a partir de sua inter-relação histórica com os ternos pitagóricos. No mais, a importância pedagógica dos ternos pitagóricos se justifica pelo fato de que eles simplificam os exemplos, possibilitando uma discussão contextualizada e mais interessante, por se tratarem de números inteiros positivos.

Acreditamos que a oficina que apresentaremos, com um enfoque histórico, não mecanizado, proporcionará que os participantes atuem como artistas, refletindo e criando durante a própria ação, assimilando com relativa compreensão os conceitos que serão abordados na oficina.

Bibliografia e referências

- Bahier, E. (1916). *Recherche méthodique et propriétés des triangles rectangles en nombres entiers*. France: A. Hermann et fils.
- Brasil. (1998). Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Terceiro e Quarto Ciclos do Ensino Fundamental: Matemática*. Brasília: MEC / SEF.

Fossa, J. A. (2001). *Ensaio sobre a Educação Matemática*. Belém: EDUEPA.

_____. (no prelo). *Os Primórdios da Teoria dos Números*. Natal: EDUFRRN.

Mendes, I. A. (2001). *Ensino da Matemática por atividades: uma aliança entre o construtivismo e a história da matemática*. Tese de doutorado, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, RN, Brasil.

Miguel, A., & Miorim, M. A. (2004). *História na Educação Matemática: propostas e desafios*. Belo Horizonte: Autêntica.

Silva, G. A. (2009). *Estudo histórico e pedagógico sobre ternos pitagóricos à luz de Eugène Bahier*. Dissertação de mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, RN, Brasil.