



Explorando o conceito de proporcionalidade por meio da modelagem matemática

Eleni Bisognin

Centro Universitário Franciscano

Brasil

eleni@unifra.br

Vanilde Bisognin

Centro Universitário Franciscano

Brasil

vanilde@unifra.br

Resumo

Neste trabalho descrevem-se resultados parciais de uma pesquisa que vem sendo desenvolvida com professores em formação continuada, com enfoque na modelagem matemática, alicerçada na teoria de Tall & Vinner (1981), relacionada à “imagem de conceito” e “definição de conceito”. Os resultados estão relacionados com o conceito de proporcionalidade presentes na descrição de modelos matemáticos lineares. De acordo com esta finalidade, foram analisados diferentes modelos, com distintas representações, de modo a proporcionar a criação de imagens conceituais referentes à proporcionalidade. O estudo seguiu uma metodologia de caráter qualitativo baseado em estudo de caso. Os resultados da pesquisa têm apontado que a modelagem matemática é um caminho que pode propiciar a criação de imagens conceituais que favorecem a compreensão do conceito de proporcionalidade.

Palavras chave: Modelagem matemática, proporcionalidade, modelos lineares e não lineares, formação continuada, professores.

Introdução

Documentos oficiais como as Diretrizes Curriculares Nacionais para os cursos de Licenciatura e Bacharelado em Matemática (Brasil, 2001) apontam que os cursos de licenciatura devem desenvolver habilidades e competências, como as de “estabelecer relações entre a Matemática e outras áreas do conhecimento” e “trabalhar na interface da Matemática com outros campos de saber”. (Brasil, 2001, p. 4). Especificamente em relação ao educador matemático, o mesmo documento sugere que o licenciado em Matemática deve ter a capacidade de “desenvolver estratégias de ensino que favoreçam a criatividade, a autonomia e a flexibilidade do pensamento matemático dos educandos, buscando trabalhar com mais ênfase nos conceitos do que nas técnicas, fórmulas e algoritmos.” (Ibid., p. 4).

Trabalhando com formação inicial e continuada de professores, preocupamo-nos em analisar estratégias de ensino, centradas na construção de imagens conceituais de determinados conteúdos matemáticos, que conduzam à formulação do conceito. Entre estas estratégias situa-se a modelagem matemática.

O uso pedagógico da modelagem matemática, sob diferentes concepções, tem sido largamente explorado na literatura nacional e internacional de educação matemática, desde o começo da década de 1980. Potencialidades da modelagem têm sido apontadas em diferentes pesquisas como em (Almeida & Brito, 2005; Almeida & Ferruzzi, 2009; Araujo, 2007; Bassanezi, 2002; Barbosa, 2001; Biembengut & Hein, 2000; Oliveira, 2007; Santos & Bisognin, 2007), entre outros. De acordo com Blum (apud Barbosa, 2003, p.67), tem-se os seguintes argumentos para seu uso no ensino da matemática: motivação, facilitação da aprendizagem, preparação para utilizar a matemática em diferentes áreas, desenvolvimento de habilidades gerais de investigação e compreensão do papel sócio-cultural da matemática. Explorando essas potencialidades, foram formuladas e testadas propostas de abordagens para o ensino de matemática com a modelagem, nos diversos níveis, desde a educação básica até a formação inicial e continuada de professores.

Por outro lado, uma das dificuldades apontadas, entre outras, pelas pesquisas como as descritas em Almeida & Dias (2004), em relação ao uso da modelagem matemática na sala de aula, é a introdução de conceitos matemáticos. Muitas vezes, os fatos e os temas escolhidos não propiciam a vivência de experiências que levam à compreensão dos conceitos envolvidos. A complexidade dos conceitos matemáticos requer, muitas vezes, diferentes representações e o uso de uma linguagem adequada pelos professores para que estes sejam compreendidos pelos alunos. Esse é um dos desafios colocados aos professores que utilizam a modelagem matemática como estratégia de ensino na sala de aula.

É comum observar que, apesar dos esforços dos professores, existem dissonâncias entre a linguagem que o professor usa e a linguagem matemática. Ou seja, existem dificuldades de compreensão entre o que o professor fala e o que os alunos entendem. Essas dificuldades estão relacionadas, segundo Tall e Vinner (1981), com a complexidade do cérebro humano que não é uma entidade puramente lógica e que funciona de um modo que contrasta com a lógica matemática.

A modelagem matemática é uma estratégia de ensino que favorece a aproximação entre a linguagem docente e a do aluno em sala de aula, pois parte de situações do cotidiano. Esta pesquisa tem como propósito analisar as contribuições da modelagem matemática na abordagem do conceito de proporcionalidade e a identificação de situações em que este conceito está presente, com professores em formação continuada participantes de um curso de mestrado em Ensino de Matemática. Neste trabalho, descrevem-se resultados parciais desta pesquisa, com enfoque na modelagem matemática, alicerçada na teoria de Tall & Vinner (1981) relacionada à “imagem de conceito” e “definição de conceito”.

A pesquisa é de caráter qualitativo, do tipo interpretativo, com base em diferentes representações de modelos lineares encontrados na literatura e reinterpretados pelos alunos/professores. Os resultados da pesquisa têm apontado que a modelagem matemática é um caminho que pode aproximar a linguagem do professor à dos alunos e propiciar a criação de imagens conceituais que favorecem a compreensão de conceitos matemáticos.

Referencial Teórico

Modelagem Matemática e a Construção de Imagem Conceitual e Definição de Conceito

Tall & Vinner (apud Escarlate, 2008), ao descreverem como se processa o funcionamento cognitivo da mente humana, desenvolveram uma teoria com base na noção de imagem de conceito. Os autores utilizam os termos “imagem de conceito” e “definição de conceito” para estabelecer a diferença entre o significado de um conceito como o estabelecido pela comunidade científica e a interpretação subjetiva que cada indivíduo faz sobre determinado conteúdo matemático. Para os autores a imagem de conceito,

[...] descreve a estrutura cognitiva que está associada ao conceito, que inclui todas as figuras mentais e propriedades associadas. Ela é desenvolvida ao longo dos anos, através de experiências de todos os tipos, mudando enquanto o indivíduo encontra novos estímulos e amadurece. (Tall & Vinner, apud Escarlate, 2008, p. 20).

A imagem de conceito é, portanto, a estrutura cognitiva associada ao conceito e que inclui todas as figuras e esquemas mentais e o conjunto de todos os pensamentos produzidos pela mente de um indivíduo, em relação a um determinado objeto matemático. O que prevalece aqui é a interação entre o sujeito e o objeto matemático em suas múltiplas representações e não a imagem de conceito associado ao conceito em si.

De acordo com Tall & Vinner (1981), o indivíduo, ao interagir com determinado tópico matemático, processa as ideias produzindo em sua mente a estrutura cognitiva referente ao conceito. Para Escarlate (2008, p. 20), os elementos que contribuem para a formação de imagens conceituais podem ser “figuras, tabelas, diagramas, gráficos ou qualquer outro objeto matemático de natureza visual ou não, desde que esteja relacionado de alguma forma com o conceito em questão para o indivíduo.” O autor afirma ainda que muitos outros atributos podem pertencer à imagem conceitual de um determinado conceito e isso depende do tipo de “experiências que o indivíduo terá e de como ele irá interagir com dada abordagem sobre o assunto” (Escarlate, 2008, p. 21).

A imagem de conceito, segundo Tall & Vinner (1981), pode ser transformada ao longo da vida na medida em que novas experiências são vivenciadas pelo indivíduo e isso pode ocorrer a partir de diferentes tipos de situações pedagógicas experimentadas. O termo, “definição de conceito”, é “uma sentença de palavras usadas para descrever um determinado conceito”. (Tall & Vinner, 1981, p. 152). Ainda, segundo os autores, um conceito pode simplesmente ser memorizado pelos estudantes, mas também pode ser aprendido de modo significativo, na medida em que os alunos tenham oportunidades de criar diferentes imagens conceituais referentes ao conceito.

Para Freudenthal (1973, apud Gomes & Ralha, 2003, p.228), definir é mais do que descrever, é um meio de organizar dedutivamente as propriedades de um objeto. A definição é uma sistematização teórica que relaciona o objeto com todos os outros e esta deve ser a fase final do processo de produção do conhecimento e não o ponto de partida.

A partir de diferentes estímulos, em diferentes momentos, o indivíduo pode ativar partes distintas de sua imagem de conceito. Por exemplo, quando ouvimos a palavra “função” podemos lembrar de um gráfico, de uma tabela, de uma expressão específica ou de um modelo matemático construído. As múltiplas representações que a construção de modelos proporciona permitem que os estudantes, em diferentes momentos, possam evocá-las e assim facilitar a compreensão de novos conceitos.

Em relação aos conceitos e propriedades de funções, Usiskin (1988, apud Andrade & Saraiva, 2010, p.625) afirma que “é importante que os alunos compreendam relações e funções, que representem e analisem situações matemáticas usando símbolos algébricos e que utilizem modelos matemáticos para representar e compreender diversas situações”. O mesmo autor defende também que “as expressões algébricas podem ser interpretadas de formas

distintas e que a utilização dos símbolos envolve uma grande diversidade de significados, de acordo com as situações em que são utilizados”. (Ibid., p. 625).

Referente ao conceito de proporcionalidade direta, Silvestre (2006), em sua pesquisa, analisa situações em que aparece o conceito de proporcionalidade direta, as representações e os tipos de estratégias utilizadas pelos alunos na resolução de atividades envolvendo este conceito.

Por outro lado, nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio para a área de Matemática, encontramos sugestões para o uso da modelagem matemática:

Em anos recentes, os estudos em educação matemática também têm posto em evidência, como um caminho para se trabalhar a Matemática na escola, a idéia de *modelagem matemática*, que pode ser entendida como a habilidade de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real. (Brasil, 2006, p. 84. Grifo do autor).

O mesmo documento ainda salienta que a modelagem matemática permite que o aluno mobilize variadas competências, associadas, também, à resolução de problemas, tais como:

selecionar variáveis que serão relevantes para o modelo a construir; problematizar [...]; formular hipóteses explicativas do fenômeno em causa; recorrer ao conhecimento matemático acumulado para a resolução do problema formulado [...]; confrontar as conclusões teóricas com os dados empíricos existentes; e eventualmente [...] modificar o modelo para que esse melhor corresponda à situação real. (Ibid., p. 85).

A modelagem matemática constitui-se, conforme Burak (1992,p.62), “ em um conjunto de procedimentos cujo objetivo é construir um paralelo para tentar explicar, matematicamente, os fenômenos presentes no cotidiano do ser humano, ajudando-o a fazer previsões e a tomar decisões”.

Barbosa (2001) coloca que a modelagem matemática,

[...] trata-se de uma oportunidade para os alunos indagarem situações por meio da Matemática sem procedimentos fixados previamente e com possibilidades diversas de encaminhamentos. Os conceitos e idéias matemáticas exploradas dependem do encaminhamento que só se sabe à medida que os alunos desenvolvem a atividade (p. 5).

Embora com diferentes concepções entende-se que a modelagem matemática está associada à criação de imagens conceituais, pois ao envolverem-se com o processo de modelagem os alunos podem criar imagens significativas que contribuem para a aprendizagem dos conceitos envolvidos.

Metodologia

A pesquisa, de abordagem qualitativa, faz parte de um projeto de investigação que tem como objetivos: desenvolver experiências com uso de modelagem matemática em turmas de Ensino Fundamental, Médio e Superior; avaliar os conhecimentos construídos pelos alunos, por meio das atividades de modelagem, nos três níveis de ensino.

A busca de dados foi efetuada durante o primeiro semestre de 2010, durante o desenvolvimento da disciplina de Fundamentos de Matemática em uma turma de professores em educação continuada que participam de um curso de Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e de Matemática, sendo a primeira autora a responsável pela disciplina. Desse estudo, participaram dez alunos que foram reunidos em dois grupos de cinco participantes, identificados como A e B e seus elementos como A1,...A5 e B1,...B5.

Os instrumentos de busca de dados foram os trabalhos produzidos pelos alunos nas aulas e um diário do investigador, em que foram registradas as dificuldades e os avanços dos alunos no processo de modelagem.

Para o desenvolvimento das atividades em sala de aula, foram seguidos os passos da modelagem matemática descritos por Burak (1992), que são: escolha do tema, pesquisa exploratória; levantamento dos problemas; resolução dos problemas e o desenvolvimento do conteúdo matemático no contexto do tema e análise crítica das soluções.

As atividades desenvolvidas pelos alunos foram apresentadas oralmente e analisadas coletivamente entre os alunos e a professora da turma.

Atividades de Modelagem Relacionadas ao Conceito de Proporcionalidade

Nesta seção, são apresentadas os modelos lineares construídos pelos alunos /professores que possibilitaram a construção de imagens conceituais referente ao conceito de proporcionalidade, por meio da vivência das etapas da modelagem matemática como descritas em Burak (1992). A proposição de construção de modelos lineares deve-se ao fato de que, nesses modelos, a proporcionalidade se apresenta de diferentes maneiras, quais sejam, em tabelas, gráficos e em expressões algébricas representativas dos mesmos.

Atividade 1

A primeira situação-problema, construída pelo grupo A, foi a realização de um experimento simples para verificar como funciona a lei de Hooke. Os alunos/ professores realizaram medições das deformações de uma mola de arame flexível, presa numa das extremidades, correspondentes a diferentes pesos colocados em sua extremidade livre. Foram colocados discos de 23g a cada etapa do experimento. Os dados obtidos são descritos no Quadro1a seguir.

Massa dos discos em gramas	Elongação (mm)
0	0
23	10,01
46	21,6
69	33,2
92	45
115	55,3
138	65,96

Quadro1-Medidas das elongações da mola

Fonte- Dados obtidos experimentalmente

Durante a realização do experimento, a professora-pesquisadora indagou: *os dados da tabela apresentam uma relação de proporcionalidade?*

Aluno A1-*não, mas os valores ficaram muito próximos.*

Professora-*como podemos saber se existe proporcionalidade nesta situação?*

Aluno A3-*quando temos um mesmo valor entre a divisão dos valores de y pelos correspondentes valores de x. Já calculei estes valores e ficaram próximos mas não são iguais, assim não é possível afirmar que existe proporcionalidade nesta situação.*

O grupo utilizou os conhecimentos prévios sobre as características gráficas de uma relação proporcional para afirmar que não havia proporcionalidade. Para isso evocaram imagens conceituais já construídas anteriormente relacionadas com o conceito de proporcionalidade.

Professora- *é possível fazer uma aproximação dos dados de modo a obter uma constante de proporcionalidade?*

A partir da indagação da professora, o grupo construiu o gráfico representativo dos dados da tabela e observaram que os pontos não ficaram situados sobre uma reta e então propuseram fazer uma aproximação por meio de um ajuste dos dados por mínimos quadrados como mostrado no Gráfico1 abaixo.

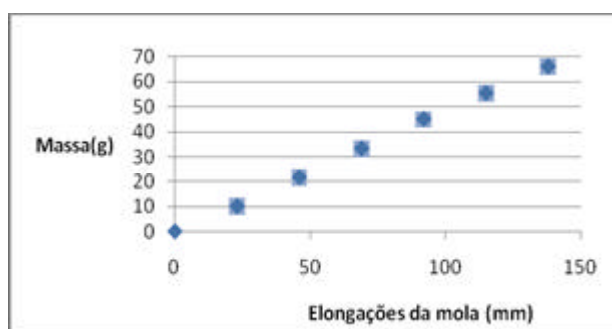


Gráfico1-Representação gráfica das medidas das elongações

Por meio desse ajuste dos dados, obtiveram a expressão $y=0,49x$ representativa de um modelo linear. Essa representação do modelo por meio de uma equação algébrica, explicita a constante de proporcionalidade ou a constante elástica da mola.

A representação gráfica do modelo obtido é mostrada no Gráfico 2 , a seguir.

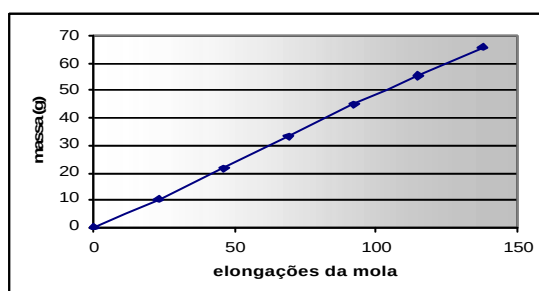


Gráfico2-Representação gráfica das medidas das elongações.

Observou-se que as etapas da construção do modelo permitiram que os alunos/professores vivenciassem o processo de modelagem e identificassem, por meio de diferentes representações, as situações em que a proporcionalidade é evidenciada e as situações em ela não está presente. Ao longo da realização da experiência, construíram imagens conceituais sobre proporcionalidade que permitiram a compreensão do significado da constante, no contexto em que o experimento foi realizado.

Atividade2

A segunda situação-problema foi proposta pelo grupo B e teve como propósito responder a seguinte pergunta: qual a distância que se deve manter de um veículo a nossa frente para conduzir com segurança na estrada?

Após a escolha do tema e do estabelecimento do problema, os alunos buscaram dados e informações junto ao Departamento Estadual de Trânsito do Rio Grande do Sul (Detran), além de entrevistarem um engenheiro especialista em construção de estradas.

A partir das informações e dos estudos realizados, o grupo considerou que, para responder a pergunta, deveriam conhecer a distância de reação e a distância de frenagem de um carro. A distância de reação depende do tempo de reação do motorista e da velocidade do carro. O tempo de reação do motorista é o tempo decorrido desde o instante que o motorista percebeu o obstáculo a sua frente até o momento em que aciona o freio.

A distância de reação é determinada pela seguinte equação: $d_r = t_r \cdot v$, sendo d_r a distância de reação, t_r representa o tempo de reação e v a velocidade do carro.

A distância de frenagem é a distância que o carro percorre desde o momento em que o freio foi acionado até a parada total do carro.

Portanto, a distância que se deve manter do carro a nossa frente, denominada de distância de parada, é calculada somando-se a distância de reação e a distância de frenagem, isto é, $d_p = d_r + d_f$.

A partir do estabelecimento destas equações e com base nas informações obtidas no Detran, os alunos construíram o Quadro2 que mostra os valores médios da distância de reação em função da velocidade.

Velocidade Km/h	Distância Média de Reação (m)
0	0
30	6,25
40	8,33
50	10,41
60	12,5
70	14,58
80	16,66
90	18,75
100	20,83
110	22,91
120	25
130	27,08
140	29,16
150	31,25

Quadro2-Valores médios da distância de reação.

Ao observar o trabalho do grupo, a professora indagou se eles percebiam alguma proporcionalidade entre os valores constantes no quadro. Ao tentar responder o questionamento da professora, o grupo percebeu que a velocidade estava indicada por

quilometro por hora e a distância média de reação, por metro. Após esta observação os alunos efetuaram os cálculos dividindo o valor médio da distância de reação pela velocidade correspondente e encontraram valores muito próximos a 0,75. Concluíram assim que o modelo matemático $d_r = 0,75 v$ seria um bom modelo para descrever a distância média de reação.

A professora indagou ao grupo: *como podemos analisar graficamente o significado da constante de proporcionalidade ?*

Ao construírem o gráfico, o grupo percebeu que a constante de proporcionalidade é a inclinação da reta que passa pela origem. No Gráfico3, tem-se a representação do modelo matemático.

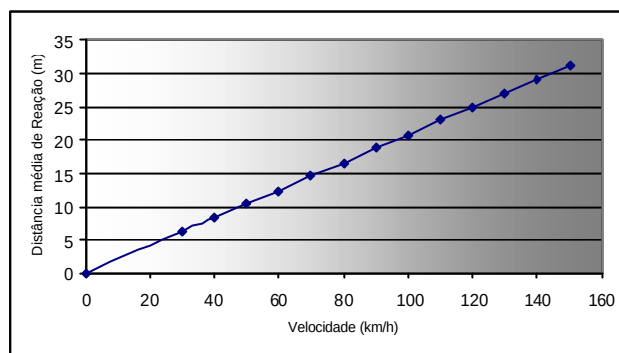


Gráfico3-Distância média de reação em função da velocidade

Os alunos/professores observaram, nesse caso, diferentes significados do coeficiente linear e sua relação com o conceito de proporcionalidade.

Para calcular a distância de frenagem, o grupo observou que ela depende de vários fatores tais como peso e a velocidade do carro, eficiência dos freios, condição dos pneus, atrito, condições da pista considerando se a pista está seca ou molhada. Para este cálculo, o grupo necessitou de conceitos físicos ligados a força, trabalho e energia cinética.

Se o freio de um carro é acionado, este produz uma força contrária ao movimento do carro, portanto o trabalho T para anular a energia cinética do carro é o produto da força F pela distância de frenagem d_f , ou seja, $T = F \cdot d_f$.

Por outro lado, a energia cinética de um carro de massa m e velocidade v é $\frac{1}{2} m v^2$. Obtiveram então a relação $\frac{1}{2} m v^2 = F \cdot d_f$.

Como a força F é proporcional à massa do carro, concluíram que a distância de frenagem é proporcional ao quadrado da velocidade.

A partir dessas informações e dos dados obtidos junto ao Detran, construíram o Quadro 3, a seguir, que fornece a distância média de frenagem em pista seca e em pista molhada.

Velocidade (km/h)	Distância média de frenagem em pista seca(m)	Distância média de frenagem em pista molhada(m)
0	0	0
30	12,75	18,75
40	17,00	25,00
50	21,25	31,25
60	25,50	37,50
70	29,75	43,75
80	34,00	50,00
90	38,00	56,25
100	42,25	62,50
110	46,75	68,75
120	51,00	75,00
130	55,25	81,25
140	59,50	87,50

Quadro 3 – Valores das distâncias médias de frenagem

Da análise dos dados constantes do Quadro 3 e fazendo um ajuste pelo método dos Mínimos Quadrados, deduziram os modelos $d_f = 0,425 v^2$ e $d_f = 0,625 v^2$ que descrevem, respectivamente, a distância de frenagem em pista seca e em pista molhada.

Embora os modelos matemáticos construídos pelo grupo não sejam lineares, eles mostram uma proporcionalidade direta entre a distância de frenagem e o quadrado da velocidade.

Portanto, os modelos matemáticos que descrevem a parada total do carro são $dp = 0,75v + 0,425 v^2$, que fornece a distância de parada em pista seca e $dp = 0,75v + 0,625 v^2$, que descreve a distância de parada em pista molhada.

Por meio desses modelos, o grupo concluiu que um carro andando numa velocidade de 80km/h, numa pista seca, necessita 230m para parar e 326m, se andar em uma pista molhada.

A construção desses dois modelos permitiu analisar o significado do conceito de proporcionalidade sob uma nova ótica associada a um modelo linear e outro não linear.

Conclusões

Ao longo do desenvolvimento das atividades de modelagem matemática, os alunos/professores mostraram estabelecer relações entre os modelos construídos e as imagens conceituais formadas a partir das diferentes representações sobre o conceito de proporcionalidade.

A compreensão do conceito de proporcionalidade foi sedimentada a partir das conexões entre os modelos matemáticos construídos, a análise de suas diferentes representações, tabular, algébrica, gráfica e o significado dos símbolos presentes nessas representações, identificando nesses modelos, a característica de proporcionalidade.

No decorrer das aulas, os alunos/professores conseguiram compreender o processo de modelagem e criar imagens conceituais associadas ao conceito de proporcionalidade, conforme Tall & Vinner (1981). Observou-se que os alunos/professores aprofundaram seus conhecimentos à medida que estabeleciam relações entre as representações dos modelos, nas suas diferentes formas, e o significado da constante de proporcionalidade.

Ao tentarem identificar se o modelo construído apresentava uma situação de proporcionalidade, eles mostraram conhecer a existência de regularidades entre os dados de uma relação proporcional e evocaram as imagens conceituais já estabelecidas em suas mentes sobre o conceito para responder às suas indagações. Isto está de acordo com os resultados descritos em Silvestre (2006).

Nas atividades desenvolvidas, os alunos/professores tiveram a oportunidade de vivenciar as etapas da modelagem matemática e, por meio dos modelos estudados, explorarem o conceito de proporcionalidade que servirá de subsídio para transposição didática desse conceito aos alunos da Educação Básica.

Da análise das produções dos alunos e do seu desempenho, durante o processo de construção dos modelos, é possível concluir que a modelagem matemática contribuiu para a criação de imagens conceituais e a compreensão do conceito de proporcionalidade direta.

Referências

- Almeida, L. M. W.; Brito, D. S. (2005). Atividades de Modelagem Matemática: que sentido os alunos podem lhe atribuir? *Ciência e Educação*. v.11, p.1-16.
- Almeida, L. M. W.; Ferruzzi, E. (2009). Uma aproximação socioepistemológica para a Modelagem Matemática. *Alexandria Revista de Educação em Ciência e Tecnologia*. v.2 n.2, p.117-134.
- Almeida, L. M. W., & Dias, M. R. (2004). Um estudo sobre a modelagem matemática como estratégia de ensino e aprendizagem. *Bolema*, 12 (22), 19-36.
- Andrade, J. M., & Saraiva, M. J. (2010). Representações de funções na compreensão do conceito de função por alunos do décimo ano de escolaridade. *Actas do XXI Seminário de Investigação em Educação Matemática*, Aveiro, Portugal.
- Araujo, J. L. (2007). Relação entre matemática e realidade em algumas perspectivas de modelagem matemática na Educação Matemática. In: J.C. Barbosa; A.D. Caldeira; J. L. Araujo. (Orgs.) *Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira: pesquisas e práticas educacionais* (pp.17-32). Recife: Sociedade Brasileira de Educação Matemática.
- Barbosa, J. C. (2003). Modelagem Matemática na sala de aula. *Perspectiva*, 27 (98), 65-74.
- Barbosa, J. C. (2001) *Modelagem matemática: concepções e experiências de futuros professores*. Tese de Doutorado em Educação Matemática, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, São Paulo, Brasil.
- Bassanezi, R. C. (2002). Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia. São Paulo: Contexto.
- Biembengut, M. S.; Hein, N. (2000). *Modelagem matemática no ensino*. São Paulo: Contexto.
- Brasil. (2001). Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. *Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura*. Brasília. Acesso em 20 abril 2009, <http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/CES13022.pdf>
- Brasil. (2006). Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. *Orientações Curriculares para o Ensino Médio: ciências da natureza, matemática e suas*

- tecnologias. Brasília. Acesso em 30 abril 2009, http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf.
- Burak, D. (1992). *Modelagem Matemática: ações e interações no processo de ensino e aprendizagem*. Tese de Doutorado em Educação, Universidade Estadual Paulista, Campinas, São Paulo, Brasil.
- Escarlate, A. C. (2008). *Uma Investigação sobre a Aprendizagem de Integral*. Dissertação de Mestrado em Ensino de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil.
- Gomes, A., & Ralha, E. (2003). Conceitos elementares em geometria:que definição escolher? In E. C. Martinez (Coord.), *Investigación en Educación Matemática:séptimo simpósio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 227-236). Granada: Universidad de Granada.
- Oliveira, A. M. P. (2007). Os professores e as situações de tensões no fazer Modelagem Matemática. *Anais do 11º Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-graduação em Educação Matemática*, Curitiba, PR, Brasil.
- Santos, L. M.& Bisognin,V. (2007). Experiências de ensino por meio da modelagem matemática na educação fundamental .J.C. Barbosa;A.D. Caldeira; J. L. Araujo. (Orgs.) *Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira: pesquisas e práticas educacionais*(pp.99-114). Recife: Sociedade Brasileira de Educação Matemática.
- Silvestre, A. I. (2006). Investigações e novas tecnologias no ensino da proporcionalidade directa:uma experiência no 2º ciclo.Dissertação de Mestrado em Educação,Universidade de Lisboa,Lisboa,Portugal.
- Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with particular reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-169.